ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЕБЫШЁВСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

17 октября 2017 г.

1°. Рассмотрим дискретный вариант линейной задачи чебышёвского приближения с линейными ограничениями:

$$
\begin{gathered}
\varphi(x) := \max_{j \in 1:p} \Big| \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} - f_j \Big| \to \min \\
\sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i \leqslant d_k, \quad k \in 1:m.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь $p \geqslant n+1$. Множество планов этой задачи обозначим Ω и предположим, что $\Omega \neq \varnothing$. В этом случае задача (1) имеет решение [1].

Базисом назовём множество индексов

$$T = \{J, K\} = \{j_0, j_1, \ldots, j_r, k_1, \ldots, k_s\},$$

где $J \subset 1:p$, $K \subset 1:m$, $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $r+s=n$. Отметим, что базис состоит из $n+1$ индексов и обязательно содержит индекс из $1:p$, так что $J \neq \varnothing$.

Введём задачу наилучшего приближения на базисе T:

$$
\begin{gathered}
\varphi_J(x) := \max_{j \in J} \Big| \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} - f_j \Big| \to \min \\
\sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i \leqslant d_k, \quad k \in K.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Множество планов задачи (2) обозначим Ω_K. Очевидно, что $\Omega_K \supset \Omega$, поэтому $\Omega_K \neq \varnothing$. Как следствие, задача (2) также имеет решение на любом базисе T.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/

ТЕОРЕМА. *Справедливо соотношение двойственности*

$$\min_{x\in\Omega}\varphi(x)=\max_T\min_{x\in\Omega_K}\varphi_J(x), \tag{3}$$

где максимум в правой части берётся по всем базисам $T=\{J,K\}$.

Доказательство. Введём обозначения

$$\mu=\min_{x\in\Omega}\varphi(x),$$
$$\mu(T)=\min_{x\in\Omega_K}\varphi_J(x),\quad \nu=\max_T\mu(T).$$

Выполнение неравенств $\nu\leqslant\mu$ и $\mu\leqslant\nu$ гарантирует справедливость соотношения (3).

Проверим, что $\nu\leqslant\mu$. Для любого базиса $T=\{J,K\}$ имеем

$$\varphi_J(x)\leqslant\varphi(x)\quad\forall x\in\Omega, \tag{4}$$
$$\min_{x\in\Omega_K}\varphi_J(x)\leqslant\min_{x\in\Omega}\varphi_J(x). \tag{5}$$

В силу (4)

$$\min_{x\in\Omega}\varphi_J(x)\leqslant\min_{x\in\Omega}\varphi(x). \tag{6}$$

Объединив (5) и (6), получим

$$\min_{x\in\Omega_K}\varphi_J(x)\leqslant\min_{x\in\Omega}\varphi(x)\quad\forall T.$$

Отсюда следует, что

$$\max_T\min_{x\in\Omega_K}\varphi_J(x)\leqslant\min_{x\in\Omega}\varphi(x),$$

то есть $\nu\leqslant\mu$. Таким образом, вывод неравенства $\nu\leqslant\mu$ элементарен и не зависит от количественных характеристик множеств J и K.

Обратное неравенство $\mu\leqslant\nu$ представляет собой более глубокий факт. Для его доказательства воспользуемся теоремой Хелли о пересечении выпуклых множеств.

Введём выпуклые множества

$$D_j=\Big\{x\in\mathbb{R}^n\mid\Big|\sum_{i=1}^n x_ia_{ij}-f_j\Big|\leqslant\nu\Big\},\quad j\in 1:p,$$
$$D_{p+k}=\Big\{x\in\mathbb{R}^n\mid\sum_{i=1}^n c_{ki}x_i\leqslant d_k\Big\},\quad k\in 1:m.$$

Покажем, что любая подсистема системы $\{D_j\}_{j=1}^{p+m}$, состоящая из $n+1$ множеств, имеет общую точку. Выделение такой подсистемы связано с выделением множества индексов $T = \{J, K\}$, где $J \subset 1:p$, $K \subset 1:m$ и $|J|+|K| = n+1$. Если $J = \varnothing$, то наличие общей точки у подсистемы следует из непустоты множества планов Ω. Пусть $J \neq \varnothing$. Тогда T — базис. В этом случае наличие общей точки у подсистемы следует из существования решения у задачи наилучшего приближения на базисе T и неравенства $\mu(T) \leqslant \nu$.

Установлено, что у системы $\{D_j\}_{j=1}^{p+m}$ выпуклых множеств из $\mathbb{R}^n$ любая подсистема, состоящая из $n+1$ множеств, имеет общую точку. По теореме Хелли (её доказательство приводится в Приложении) и вся система $\{D_j\}_{j=1}^{p+m}$ имеет общую точку. Обозначим её x^*. По определению

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i^* a_{ij} - f_j\Big| \leqslant \nu, \quad \forall j \in 1:p,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i^* \leqslant d_k, \quad \forall k \in 1:m.$$

Значит, $x^* \in \Omega$ и $\varphi(x^*) \leqslant \nu$. Тем более, $\mu \leqslant \nu$.

Теорема доказана. $\square$

Идея использовать теорему Хелли для доказательства соотношения двойственности в линейных задачах чебышёвского приближения в случае отсутствия ограничений принадлежит Л. Г. Шнирельману [2].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Теорема Хелли о пересечении выпуклых множеств

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана конечная система выпуклых множеств $\{D_j\}_{j=1}^{N}$, где $N \geqslant n+1$. Если каждые $n+1$ множеств этой системы имеют общую точку, то и вся система $\{D_j\}_{j=1}^{N}$ имеет общую точку.*

Доказательство. Достаточно проверить, что если каждые $m \geqslant n+1$ множеств из $\{D_j\}_{j=1}^{N}$ имеют общую точку, то и любые $m+1$ таких множеств также имеют общую точку.

Возьмём произвольные $m+1$ множеств. Пусть это будут $D_1, \ldots, D_{m+1}$. Обозначим через x_i общую точку множеств $D_1, \ldots, D_{i-1}, D_{i+1}, \ldots, D_{m+1}$,

$i \in 1 : m+1$. Так как $m+1 \geqslant n+2$, то точки $x_1, \ldots, x_{m+1}$ аффинно зависимы. Это значит, что существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i = \mathbb{O},$$
$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 0. \tag{7}$$

В силу (7) среди коэффициентов α_i имеются как положительные, так и отрицательные. Пусть $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$ — неотрицательные коэффициенты и $\alpha_{i_{s+1}}, \ldots, \alpha_{i_{m+1}}$ — отрицательные. Тогда

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_{i_k} x_{i_k} = \sum_{k=s+1}^{m+1} |\alpha_{i_k}| x_{i_k},$$
$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_{i_k} = \sum_{k=s+1}^{m+1} |\alpha_{i_k}| =: b.$$

Обозначив $\beta_{i_k} = \alpha_{i_k}/b$ при $k \in 1 : s$ и $\gamma_{i_k} = |\alpha_{i_k}|/b$ при $k \in s+1 : m+1$, получим

$$\sum_{k=1}^{s} \beta_{i_k} x_{i_k} = \sum_{k=s+1}^{m+1} \gamma_{i_k} x_{i_k} =: x^*,$$
$$\sum_{k=1}^{s} \beta_{i_k} = \sum_{k=s+1}^{m+1} \gamma_{i_k} = 1,$$
$$\beta_{i_k} \geqslant 0, \ k \in 1 : s; \quad \gamma_{i_k} \geqslant 0, \ k \in s+1 : m+1.$$

В частности,

$$x^* = \sum_{k=1}^{s} \beta_{i_k} x_{i_k},$$
$$\sum_{k=1}^{s} \beta_{i_k} = 1, \quad \beta_{i_k} \geqslant 0 \quad \forall k \in 1 : s.$$

По определению, точки x_{i_k} при $k \in 1 : s$ принадлежат всем множествам D_{i_p}, $p \in s+1 : m+1$. Значит,

$$x_{i_k} \in \bigcap_{p=s+1}^{m+1} D_{i_p}, \quad k \in 1 : s.$$

По условию теоремы множества D_{i_p}, $p \in s+1 : m+1$, — выпуклые. Выпуклым будет и их пересечение. Принимая во внимание, что x^* является выпуклой комбинацией точек $x_{i_1} \ldots, x_{i_s}$, заключаем, что

$$x^* \in \bigcap_{p=s+1}^{m+1} D_{i_p}. \tag{8}$$

Теперь воспользуемся другим представлением точки x^*:

$$x^* = \sum_{k=s+1}^{m+1} \gamma_{i_k} x_{i_k},$$
$$\sum_{k=s+1}^{m+1} \gamma_{i_k} = 1, \quad \gamma_{i_k} \geqslant 0 \quad \forall k \in m+1 : s+1.$$

Аналогично предыдущему придём к выводу о том, что

$$x^* \in \bigcap_{p=1}^{s} D_{i_p}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что x^* принадлежит всем множествам $D_1, \ldots, D_{m+1}$.

Теорема доказана. □

Приведённый вариант доказательства теоремы Хелли представляет собой немного усовершенствованный вариант доказательства из книги [3, с. 46–48].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Теорема существования решения для линейной задачи чебышёвского приближения с линейными ограничениями* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 26 сентября 2017 г. (`http://apmath.spbu.ru/cnsa/reps17.shtml#0926`)

2. Шнирельман Л. Г. *О равномерных приближениях* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. Т. 2. № 1. С. 53–59.

3. Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М.: Наука, 1973. 552 с.