ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕБЫШЁВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

26 сентября 2017 г.

Аннотация. В процессе работы на книгой [1] мной была доказана теорема существования решения для линейной задачи чебышёвского приближения с линейными ограничениями. Это доказательство представлено в последнем параграфе главы 1 книги [1] и больше нигде не публиковалось. Важно отметить, что доказательство имеет конструктивный характер и может служить основой для численного метода решения линейных задач чебышёвского приближения. Я возвращаюсь к этой теме с современных позиций.

1°. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^s$ — компактное множество и $u_1, \dots, u_{p-1}, f$ — непрерывные на Q функции. Рассмотрим линейную задачу чебышёвского приближения с линейными ограничениями:

$$\varphi(x) := \max_{t \in Q} \Bigl| \sum_{j=1}^{p-1} x[j] u_j(t) - f(t) \Bigr| \to \inf \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{p-1} C[i,j] \times x[j] \geqslant d[i], \quad i \in 1 : m_1;$$

$$\sum_{j=1}^{p-1} C[i,j] \times x[j] = d[i], \quad i \in m_1 + 1 : m.$$

Вектор $x = x[1 : p-1]$, удовлетворяющий ограничениям задачи (1), будем называть её *планом.*

ТЕОРЕМА. *Задача* (1) *имеет решение, если множество её планов непусто.*

---

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Начнём доказательство теоремы с того, что приведём задачу (1) к каноническому виду. Обозначив $u_p = -f$, $C[i,p] = -d[i]$ при $i \in 1:m$, упростим запись задачи (1):

$$\max_{t \in Q} \Big| \sum_{j=1}^{p} x[j] u_j(t) \Big| \to \inf$$

$$\sum_{j=1}^{p} C[i,j] \times x[j] \geqslant 0, \quad i \in 1:m_1;$$

$$\sum_{j=1}^{p} C[i,j] \times x[j] = 0, \quad i \in m_1+1:m;$$

$$x[p] = 1.$$

Далее при $j \in 1:p-1$ заменим $x[j]$ на разность $x[j] - x[p+j]$ с неотрицательными $x[j]$ и $x[p+j]$, после чего вычтем из левой части i-го ограничения-неравенства неотрицательную переменную $x[2p-1+i]$, превратив его в равенство. Дополнительно положим

$$n = 2p + m_1, \quad N = 1:n-1, \quad M = 1:m+1;$$
$$u_{p+j}(t) = -u_j(t), \quad j \in 1:p-1;$$
$$u_{2p-1+i}(t) \equiv 0, \quad i \in 1:m_1.$$

Теперь задача (1) принимает канонический вид

$$\max_{t \in Q} \Big| \sum_{j \in N} x[j] u_j(t) \Big| \to \inf \tag{2}$$
$$A[M,N] \times x[N] = b[M],$$
$$x[N] \geqslant \mathbb{O}[N],$$

где

$$A = \begin{pmatrix} C & -d & -C & -E[1:m, 1:m_1] \\ 0\dots0 & 1 & 0\dots0 & 0\dots0 \end{pmatrix},$$

$C = C[1:m, 1:p-1]$ — матрица, входящая в ограничения задачи (1), и $b = (0,\dots,0,1)^T$. По построению задачи (1) и (2) эквивалентны. В частности, если $x_0 = x_0[N]$ — решение задачи (2), то вектор $x_* = x_*[1:p-1]$ с компонентами $x_*[j] = x_0[j] - x_0[p+j]$ будет решением задачи (1).

Доказательство теоремы сводится к доказательству существования решения у задачи (2).

3°. Множество планов задачи (2) обозначим Ω. Условие теоремы и эквивалентность задач (1) и (2) гарантируют, что $\Omega \neq \varnothing$.

Обобщённый полином

$$P(x,t) = \sum_{j\in N} x[j]u_j(t)$$

назовём *допустимым*, если $x \in \Omega$.

Плану x задачи (2) сопоставим его носитель

$$N_+(x) = \bigl\{ j \in N \mid x[j] > 0 \bigr\}.$$

Так как $b \neq \mathbb{O}$, то $N_+(x) \neq \varnothing$. Через A_j обозначим j-й столбец матрицы A, $A_j = A[M,j]$, $j \in N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Допустимый полином $P(x,t)$ назовём *базисным*, если система

$$\begin{gathered} \sum_{j\in N_+(x)} z[j]u_j(t) = 0 \quad \forall t \in Q, \\ \sum_{j\in N_+(x)} z[j]A_j = \mathbb{O} \end{gathered} \tag{3}$$

имеет только нулевое решение.

Решение x_0 задачи (2) порождает полином $P(x_0,t)$, наименее уклоняющийся от нуля на множестве Q. Покажем, что у задачи (2) существует *базисный* полином, наименее уклоняющийся от нуля.

4°. Сначала предположим, что множество Q конечно, $Q = \{t_1, \dots, t_q\}$. Тогда задача (2) сводится к эквивалентной задаче линейного программирования в канонической форме

$$x[n] \to \inf \tag{4}$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1} x[j]u_j(t_k) + x[n] - x[n+k] = 0, \quad k \in 1:q;$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} x[j]u_j(t_k) + x[n] - x[n+q+k] = 0, \quad k \in 1:q;$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} x[j]A_j = b;$$

$$x[j] \geqslant 0, \quad j \in 1:n+2q.$$

У задачи (4) множество планов непусто и целевая функция ограничена снизу на множестве планов (неотрицательна). В таком случае у задачи (4) существует оптимальный базисный план $x_1 = x_1[1 : n + 2q]$ (см. [1], стр. 14). По эквивалентности, вектор $x_0 = x_0[1 : n - 1]$ с компонентами $x_0[j] = x_1[j]$ будет решением задачи (2), а полином $P(x_0, t)$ — полиномом, наименее уклоняющимся от нуля. Проверим, что $P(x_0, t)$ — базисный полином.

Допустим противное. Тогда система (3) при $x = x_0$ будет иметь нетривиальное решение. Учитывая вид матрицы ограничений у задачи (4), заключаем, что столбцы этой матрицы с индексами $j \in N_+(x_0)$ линейно зависимы. Тем более будут линейно зависимыми столбцы с индексами из $N_+(x_1)$. Это противоречит тому факту, что x_1 — базисный план задачи (4).

Таким образом, доказано, что в случае $Q = \{t_1, \ldots, t_q\}$ у задачи (2) существует базисный полином, наименее уклоняющийся от нуля.

5°. Пусть теперь $Q \subset \mathbb{R}^s$ — произвольное компактное множество. Возьмём последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, стремящуюся к нулю. При каждом k введём на Q конечную ε_k-сеть Q_k. Тогда, в частности, для любого $\hat{t} \in Q$ найдётся последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \in Q_k$, сходящаяся к $\hat{t}$.

По доказанному задача (2) при замене Q на Q_k имеет решение — базисный полином $P(x_k, t)$, наименее уклоняющийся от нуля на Q_k. Отметим, что для любого плана $x \in \Omega$ задачи (2) выполняется неравенство

$$\max_{t \in Q_k} \bigl|P(x, t)\bigr| \leqslant \max_{t \in Q} \bigl|P(x, t)\bigr|.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{x \in \Omega} \max_{t \in Q_k} \bigl|P(x, t)\bigr| \leqslant \inf_{x \in \Omega} \max_{t \in Q} \bigl|P(x, t)\bigr|.$$

Обозначив правую часть этого неравенства через μ, перепишем его в эквивалентном виде

$$\bigl|P(x_k, t)\bigr| \leqslant \mu \quad \forall t \in Q_k. \tag{5}$$

Среди носителей $N_+(x_k)$ хотя бы один повторяется бесконечное число раз. Можно проредить последовательность $\{x_k\}$ так, чтобы обеспечить выполнение соотношения $N_+(x_k) =: N_+$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ Покажем, что в этом случае последовательность $\{x_k\}$ будет ограниченной.

Допустим противное. Проредив при необходимости последовательность $\{x_k\}$ ещё раз, добьёмся того, чтобы числовая последовательность

$$\gamma_k = \sum_{j \in N_+} x_k[j]$$

стремилась к $+\infty$. (Напомним, что $x_k[j] > 0$ при $j \in N_+$ и $x_k[j] = 0$ при $j \in N \setminus N_+$.) Введём векторы $z_k = \frac{1}{\gamma_k} x_k$. На основании (5) и определения множества Ω имеем

$$\Big|\sum_{j\in N_+} z_k[j]u_j(t)\Big| \leqslant \frac{\mu}{\gamma_k} \quad \forall t\in Q_k,$$
$$\sum_{j\in N_+} z_k[j]A_j = \frac{1}{\gamma_k}b, \tag{6}$$
$$\sum_{j\in N_+} z_k[j] = 1, \quad z_k[j] > 0 \quad \forall j\in N_+.$$

Из ограниченной последовательности $\{z_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем считать, что $z_k \to z_*$ при $k \to \infty$. Зафиксируем $\hat{t} \in Q$ и возьмём последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \in Q_k$, сходящуюся к $\hat{t}$. Тогда и $u_j(t_k) \to u_j(\hat{t})$ при всех $j \in N_+$ в силу непрерывности функций u_j на Q. Подставим в (6) $t = t_k$ и перейдём к пределу при $k \to \infty$. Получим

$$\sum_{j\in N_+} z_*[j]u_j(\hat{t}) = 0 \quad \forall \hat{t}\in Q,$$
$$\sum_{j\in N_+} z_*[j]A_j = \mathbb{O}, \tag{7}$$
$$\sum_{j\in N_+} z_*[j] = 1.$$

В частности, соотношения (7) справедливы, если заменить Q на Q_k. Но это противоречит базисности полиномов $P(x_k, t)$, у которых $N_+(x_k) = N_+$.

Доказано, что последовательность $\{x_k\}$ ограничена. Из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не умоляя общности, будем считать, что $x_k \to x_*$ при $k \to \infty$. Очевидно, что $x_* \in \Omega$ и $N_+(x_*) \subset N_+$. Снова зафиксируем $\hat{t} \in Q$ и возьмём последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \in Q_k$, сходящуюся к $\hat{t}$. В неравенство (5) подставим $t = t_k$ и перейдём к пределу при $k \to \infty$. Получим

$$\Big|P(x_*, \hat{t})\Big| \leqslant \mu \quad \forall \hat{t}\in Q.$$

Учитывая определение μ, заключаем, что x_* — решение задачи (2).

Проверим, что $P(x_*, t)$ — базисный полином. В противном случае система

$$\sum_{j\in N_+(x_*)} z[j]u_j(t) = 0 \quad \forall t\in Q,$$
$$\sum_{j\in N_+(x_*)} z[j]A_j = \mathbb{O}$$

будет иметь ненулевое решение $z_0 = z_0[N_+(x_*)]$. Напомним, что $N_+(x_*) \subset N_+$ и $Q_k \subset Q$. Дополнив вектор z_0 компонентами $z_0[j] = 0$ при $j \in N_+ \setminus N_+(x_*)$, получим ненулевой вектор $z_0[N_+]$ со свойствами

$$\sum_{j\in N_+} z_0[j]u_j(t) = 0 \quad \forall t \in Q_k,$$
$$\sum_{j\in N_+} z_0[j]A_j = \mathbb{O}.$$

Но это противоречит базисности полиномов $P(x_k, t)$.

Теорема доказана. $\square$

Попутно установлено, что у линейной задачи чебышёвского приближения с линейными ограничениями в канонической форме в случае непустоты множества планов существует *базисный* полином, наименее уклоняющийся от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.