ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ЗАКРЕПЛЁННЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ*

А. В. Фоминых

alexfomster@mail.ru

9 марта 2017 г.

Аннотация. В докладе исследуется дифференциальное включение с заданным непрерывным выпуклым многозначным отображением. На заданном конечном промежутке времени требуется построить решение дифференциального включения, которое удовлетворяет заданным начальному и конечному условиям. С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к минимизации некоторого функционала в пространстве кусочно-непрерывных функций. В случае непрерывной дифференцируемости опорной функции многозначного отображения по фазовым переменным этот функционал дифференцируем по Гато. В докладе найден градиент Гато, получены необходимые и достаточные условия минимума данного функционала. На основании этих условий к исходной задаче применяется метод наискорейшего спуска. Численные примеры иллюстрируют работу метода.

1°. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t) \tag{1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

В формуле (1) $F(x,t)$ — заданное непрерывное многозначное отображение при $t \in [0, T]$, x — n-мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат с кусочно-непрерывной (с конечным числом точек разрыва) и ограниченной на $[0, T]$ производной, $T > 0$ — заданный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0, T]$ и каждой фазовой точке $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(x, t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$. В формуле (2) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

---

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Требуется найти вектор-функцию $x^* \in C_n[0,T]$, являющуюся решением включения (1) и удовлетворяющую условию (2).

Здесь $C_n[0,T]$ — пространство n-мерных непрерывных на $[0,T]$ вектор-функций с производной из пространства $P_n[0,T]$, $P_n[0,T]$ — пространство кусочно-непрерывных и ограниченных на $[0,T]$ n-мерных вектор-функций, имеющих на $[0,T]$ конечное число точек разрыва.

Если $t_0 \in [0,T)$ — точка разрыва вектор-функции $\dot{x}$, то для определённости полагаем, что $\dot{x}(t_0)$ — правосторонняя производная вектор-функции $\dot{x}$ в точке t_0; $\dot{x}(T)$ — левосторонняя производная вектор-функции $\dot{x}$ в точке T.

Для произвольного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ определим опорную функцию вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ соотношением $c(F,\psi) = \sup\limits_{f\in F}\langle f,\psi\rangle$, где $\langle a,b\rangle$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$.

2°. Эквивалентная постановка задачи. Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x,t)$. Поскольку для всех $t \in [0,T]$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $F(x,t)$ представляет собой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, то включение (1) можно переписать так [1]:

$$(\dot{x},\psi) \leqslant c(F,\psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0,T],$$

где S — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат.

Обозначим $z = \dot{x}$, $z \in P_n[0,T]$, тогда с учётом (2) будет

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau.$$

Введём функции

$$\ell(\psi,z,t) = (z,\psi) - c(F,\psi), \tag{3}$$

$$h(z,t) = \max_{\psi\in S}\max\{0, \ell(\psi,z,t)\} \tag{4}$$

и составим функционал

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\int_0^T h^2(z,t)dt. \tag{5}$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0,T] \mid \varphi(z) = 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что для функционала (5) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \ (z \in \Omega), \text{ если } (\dot{x},\psi) \leqslant c(F,\psi) \quad \forall\psi \in S, \quad \forall t \in [0,T], \\ \hfill \varphi(z) > 0 \ (z \notin \Omega), \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, задача нахождения решения дифференциального включения (1) при начальном условии (2) свелась к минимизации функционала (5) на пространстве $P_n[0,T]$. Если $z^* \in P_n[0,T]$ — решение этой задачи, то

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau)d\tau$$

является решением задачи (1), (2).

3°. Дифференциальные свойства функционала φ. Далее считаем, что опорная функция $c(F,\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ непрерывно дифференцируема по фазовой переменной x. Тогда для любых $x, y \in C_n[0,T]$, и для любых $\psi \in S$, $t \in [0,T]$ верно соотношение

$$c\big(F(x+\alpha y,t),\psi\big) - c\big(F(x,t),\psi\big) =$$

$$= \alpha\Big(\frac{\partial c(F,\psi)}{\partial x}, y\Big) + o(\alpha,\psi,t), \quad \frac{o(\alpha,\psi,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \tag{6}$$

Пусть $v \in P_n[0,T]$. Положим

$$z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v(t),$$

$$y(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Используя свойство аддитивности опорной функции по первому аргументу [2] и равенства (6), (7), вычислим

$$\ell(\psi, z_\alpha, t) = \ell(\psi,z,t) + \alpha H_1(\psi,z,v,t) + o(\alpha,\psi,t), \quad \frac{o(\alpha,\psi,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H_1(\psi,z,v,t) = (\psi, v(t)) - \Big(\int_0^t v(\tau)d\tau, \frac{\partial c(F,\psi)}{\partial x}\Big).$$

С учётом соотношений (3), (4) далее найдём

$$h(z_\alpha,t) = h(z,t) + \alpha H(z,v,t) + o(\alpha,t), \quad \frac{o(\alpha,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H(z,v,t) = \max_{\psi\in\overline{R}} H_1(\psi,z,v,t), \text{ если } \max_{\psi\in S}\ell(\psi,z,t) > 0,$$

$$H(z,v,t) = 0, \text{ если } \max_{\psi\in S}\ell(\psi,z,t) < 0,$$

$$H(z,v,t) = \max_{\psi\in\overline{R}}\max\{0, H_1(\psi,z,v,t)\}, \text{ если } \max_{\psi\in S}\ell(\psi,z,t) = 0,$$

$$\overline{R}(z,t) = \Big\{\overline{\psi}(t) \in S \mid \max\{0, \ell(\overline{\psi},z,t)\} = \max_{\psi(t)\in S}\max\{0,\ell(\psi,z,t)\}\Big\}.$$

В силу структуры функционала (3) легко заметить, что в случае $\ell(\psi, z, t) > 0$ максимум следующего выражения

$$\max\{0, \ell(\psi, z, t)\} = \ell(\psi, z, t)$$

достигается на единственном элементе $\psi^*(t) \in S$, поэтому в этом случае множество $\overline{R}(z, t)$ состоит из единственного элемента $\psi^*(t)$.

Теперь нетрудно получить разложение

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha \int_0^T h(z,t) H(z, v, t) dt + o(\alpha), \quad \frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0, \tag{8}$$

и мы приходим к следующему результату

ТЕОРЕМА 1. *Если опорная функция $c(F, \psi)$ многозначного отображения $F(x, t)$ непрерывно дифференцируема по фазовой переменной x, то функционал φ дифференцируем по Гато и его градиент в точке z находится по формуле*

$$\nabla \varphi(z) = h(z,t)\psi^*(t) - \int_t^T h(z,\tau) \frac{\partial c(F(x,\tau), \psi^*(\tau))}{\partial x} d\tau. \tag{9}$$

4°. Необходимые условия минимума. Из известного необходимого условия минимума [3] дифференцируемого по Гато функционала, соотношения (9) и единственности нулевого решения однородного интегрального уравнения Вольтерры второго рода заключаем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы точка x^* удовлетворяла включению* (1) *и условию* (2) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$h(z^*, t)\psi^*(t) - \int_t^T h(z^*, \tau) \frac{\partial c(F(x^*, \tau), \psi^*(\tau))}{\partial x} d\tau = 0_n, \tag{10}$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$.

Вернёмся к исходной задаче. Пусть помимо начального условия (2) имеется концевое ограничение на траекторию

$$x(T) = x_T, \tag{11}$$

где $x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, которая является решением дифференциального включения (1) и удовлетворяет краевым условиям (2), (11).

Введём функционал

$$I(z) = \frac{1}{2}\Big[\int_0^T h^2(z,t)dt + \big(x_0 + \int_0^T z(t)dt - x_T\big)^2\Big] =: \varphi(z) + \chi(z). \tag{12}$$

Понятно, что задача свелась к минимизации функционала (12) на пространстве $P_n[0,T]$. Если $z^* \in P_n[0,T]$ — решение этой задачи, то

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau)d\tau$$

является решением задачи (1), (2), (11).

Используя вновь разложение (8), а также вычисляя градиент Гато функционала χ и используя известное условие минимума [3], убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы точка x^* удовлетворяла включению* (1) *и условиям* (2), (11) *необходимо, чтобы*

$$\nabla\varphi(z^*) + \nabla\chi(z^*) =$$

$$= h(z^*,t)\psi^*(t) - \int_t^T h(z^*,\tau)\frac{\partial c(F(x^*,\tau),\psi^*(\tau))}{\partial x}d\tau +$$

$$+ x_0 + \int_0^T z^*(t)dt - x_T = 0_n. \tag{13}$$

Если оказалось $I(z^*) = 0$, то условие (13) *также является достаточным.*

5°. Метод наискорейшего спуска. Опишем метод наискорейшего спуска [4] для поиска стационарных точек функционала φ (функционала I). Фиксируем произвольную точку $z_1 \in P_n[0,T]$. Пусть уже построена точка $z_k \in P_n[0,T]$. Если выполнено условие минимума (10) $\big((13)\big)$, то точка z_k является стационарной точкой функционала φ (функционала I), и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{k+1} = z_k - \gamma_k\nabla\varphi(z_k)$$

$$\big(z_{k+1} = z_k - \gamma_k\nabla I(z_k)\big),$$

где вектор-функция $x_k(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t z_k(\tau)d\tau$, а величина γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma>0}\varphi\big(z_k - \gamma\nabla\varphi(z_k)\big) = \varphi\big(z_k - \gamma_k\nabla\varphi(z_k)\big)$$

$$\Big(\min_{\gamma>0} I\big(z_k - \gamma\nabla I(z_k)\big) = I\big(z_k - \gamma_k\nabla I(z_k)\big)\Big). \tag{14}$$

В силу (14) $\varphi(z_{k+1}) \leqslant \varphi(z_k)$ $\big(I(z_{k+1}) \leqslant I(z_k)\big)$. Если последовательность $\{z_k\}$ конечна, то последняя ее точка является стационарной точкой функционала φ (функционала I) по построению.

Если же последовательность $\{z_k\}$ бесконечна, то метод сходится [4] в следующем смысле

$$\big|\big|\nabla\varphi(z_k)\big|\big|_{L_n^2[0,T]} \to 0 \text{ при } k \to \infty$$

$$\Big(\big|\big|\nabla I(z_k)\big|\big|_{L_n^2[0,T]} \to 0 \text{ при } k \to \infty\Big),$$

где $L_n^2[0,T]$ — пространство суммируемых с квадратом на $[0,T]$ n-мерных вектор-функций.

Отметим, что если в результате работы метода получена некоторая стационарная точка $\overline{z} \in P_n[0,T]$, однако $I(\overline{z}) \neq 0$, то следует взять другое начальное приближение повторить итерационный процесс, поскольку точка $\overline{z}$ в данном случае не является точкой глобального минимума функционала I (см. формулу (12)).

6°. Численные примеры. Рассмотрим примеры реализации предложенного алгоритма. В первых трёх примерах исследуются дифференциальные включения со свободным правым концом, далее в двух последующих примерах правый конец закреплён.

ПРИМЕР 1. Пусть задано дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

и начальное условие

$$x(0) = (0,0)'.$$

Здесь одно из решений очевидно. Например, можно взять $z_1 = \beta \in [-1,1]$, тогда $x_1 = \beta t$, $z_2 = x_1 = \beta t$, тогда $x_2 = 0.5\beta t^2$. Однако поставим цель подробно продемонстрировать шаги алгоритма на этом простейшем примере. Выберем начальную точку, не являющуюся решением, и совершим одну итерацию согласно описанному алгоритму.

В данном случае $c(F,\psi) = |\psi_1| + x_1\psi_2$, $\dfrac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, 0)'$.

Положим $z_1 = (2, x_{1\_1})$. По формуле (3) имеем

$$\ell(\psi, z_1, t) = 2\psi_1 - |\psi_1| = \begin{cases} \psi_1, & \psi_1 \geqslant 0, \\ 3\psi_1, & \psi_1 < 0, \end{cases}$$

$$\max_{\psi \in S}(2\psi_1 - |\psi_1|) = 1 \text{ при } \psi^* = (1,0)',$$

и из (4) получаем

$$h(z_1, t) = 1.$$

Градиент функционала φ в точке z_1 имеет вид (см. (9))

$$\nabla\varphi(z_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \int_t^1 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Строим следующую точку $z_2 = (2-\gamma, x_{1\_2})'$.

Вычисляем

$$\ell(\psi, z_2, t) = (2-\gamma)\psi_1 - |\psi_1| = \begin{cases} (1-\gamma)\psi_1, & \psi_1 \geqslant 0, \\ (3-\gamma)\psi_1, & \psi_1 < 0. \end{cases}$$

Чтобы точка z_2 удовлетворяла рассматриваемому дифференциальному включению нужно, чтобы $\ell(\psi, z_2, t) \leqslant 0$ для всех $\psi \in S$ и для всех $t \in [0, T]$, что верно при $\gamma_1 \in [1, 3]$.

Получаем $z_2 = (2-\gamma_1, x_{1\_2}) = (\beta, x_{1\_2})$, $\beta \in [-1, 1]$, т. е. точка $x_2(t) = \displaystyle\int_0^t z_2(\tau)d\tau$ — решение данного примера.

ПРИМЕР 2. Задано дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x,t), \quad F(x,t) = [0.5xt, 1.5xt], \quad t \in [0,1]$$

и начальная точка

$$x(0) = 1.$$

В данном случае $c(F,\psi) = xt(\psi + 0.5|\psi|)$, $\dfrac{\partial c}{\partial x} = t(\psi + 0.5|\psi|)$.

Пусть $z_1 = 1$, тогда $x_1 = t+1$. По формуле (3) имеем

$$\ell(\psi, z_1, t) = \psi - t(t+1)(\psi + 0.5|\psi|) = \begin{cases} \psi - 1.5t(t+1)\psi, & \psi \geqslant 0, \\ \psi - 0.5t(t+1)\psi, & \psi < 0, \end{cases}$$

$$\max_{\psi\in S}\big(\psi - t(t+1)(\psi + 0.5|\psi|)\big) = \begin{cases} 1 - 1.5t(t+1), & t \in [0, t^*], \text{ при } \psi^* = 1, \\ 1 - 1.5t(t+1), & t \in [t^*, 1], \text{ при } \psi^* = 1, \end{cases}$$

где $t^* \in [0, T]$ — корень уравнения $1 - 1.5t(t+1) = 0$, и из (4) получаем

$$h(z_1, t) = \begin{cases} 1 - 1.5t(t+1), & t \in [0, t^*], \\ 0, & t \in [t^*, 1]. \end{cases}$$

Градиент функционала φ в точке z_1 имеет вид (см. (3))

$$\nabla\varphi(z_1) = \begin{cases} 1 - 1.5t(t+1) - \displaystyle\int_t^{t^*} \big(1 - 1.5\tau(\tau+1)\big)1.5\tau\, d\tau, & t \in [0, t^*], \\ 0_n, & t \in [t^*, 1]. \end{cases}$$

Строим следующую точку

$$z_2 = z_1 - \gamma_1 \nabla\varphi(z_1),$$

где $\gamma_1 = \arg\min\limits_{\gamma>0} \varphi\big(z_1 - \gamma_1 \nabla\varphi(z_1)\big)$ (см. (14)).

Видно, что точка $x_3(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t z_3(\tau)d\tau$ — решение данного примера (см. рис. 1).

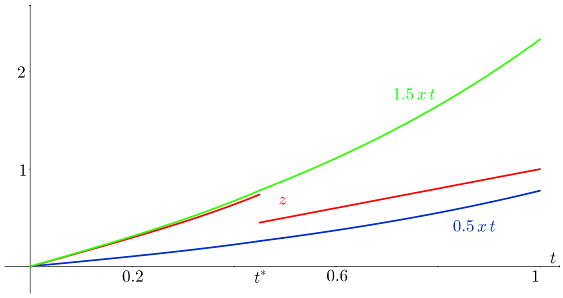

Рис. 1. Решение Примера 2

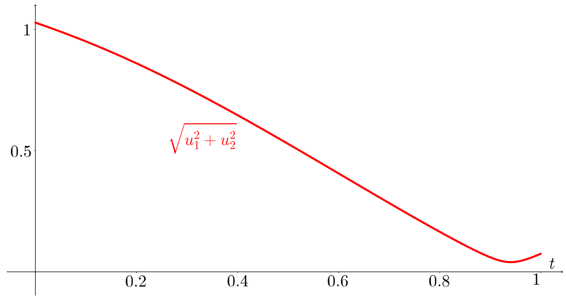

Рис. 2. Решение Примера 3

ПРИМЕР 3. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B, \quad t \in [0,1],$$

где B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, и условие на левом конце

$$x(0) = (0.5, 0.25)'.$$

В данном случае $c(F,\psi) = x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$, $\dfrac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, \psi_1)'$.

Положим $z_1 = (2,1)'$, тогда $x_1 = (0.5 + 2t, 0.25 + t)'$.

По формуле (3) имеем

$$\ell(\psi, z_1, t) = 2\psi_1 + \psi_2 - (0.25 + t)\psi_1 - (0.5 + 2t)\psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} =$$

$$= (1.75 - t)\psi_1 + (0.5 - 2t)\psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2},$$

$$\max_{\psi\in S} \left((1.75 - t)\psi_1 + (0.5 - 2t)\psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}\right) =$$

$$= \sqrt{(1.75 - t)^2 + (0.5 - 2t)^2} - 1$$

при $\psi^* = \left(\dfrac{1.75 - t}{\sqrt{(1.75 - t)^2 + (0.5 - 2t)^2}}, \dfrac{0.5 - 2t}{\sqrt{(1.75 - t)^2 + (0.5 - 2t)^2}}\right)'$, и из (4) получаем

$$h(z_1,t) = \sqrt{(1.75-t)^2 + (0.5-2t)^2} - 1.$$

Градиент функционала φ в точке z_1 имеет вид (см. (9))

$$\nabla\varphi(z_1) = \frac{h(z_1,t)}{\sqrt{(1.75-t)^2+(0.5-2t)^2}}\begin{pmatrix}1.75-t\\0.5-2t\end{pmatrix} -$$

$$-\int_t^1 \frac{h(z_1,\tau)}{\sqrt{(1.75-\tau)^2+(0.5-2\tau)^2}}\begin{pmatrix}0.5-2\tau\\1.75-\tau\end{pmatrix}d\tau.$$

Строим следующую точку

$$z_2 = z_1 - \gamma_1\nabla\varphi(z_1),$$

где $\gamma_1 = \arg\min_{\gamma>0}\varphi\big(z_1-\gamma_1\nabla\varphi(z_1)\big)$ (см. (14)).

Видно, что точка $x_2(t) = (0.5, 0.25)' + \int_0^t z_2(\tau)d\tau$ — решение данного примера (см. рис. 2). На рис. 2 использовано обозначение $u_1(t) = z_1(t) - x_2(t)$, $u_2(t) = z_2(t) - x_1(t)$.

ПРИМЕР 4. Имеется дифференциальное включение Примера 3 с тем же начальным условием и дополнительно задано ограничение на правом конце

$$x(1) = (1.75, 2)'.$$

Первый шаг алгоритма аналогичен описанному в Примере 3 (вместо $\nabla\varphi(z_1)$ нужно рассмотреть $\nabla I(z_1)$).

Далее продолжаем аналогично. Видно, что точка $x_4(t) = (0.5, 0.25)' + \int_0^t z_4(\tau)d\tau$ — решение данного примера (см. рис. 3). На рис. 3 использовано обозначение $u_1(t) = z_1(t) - x_2(t)$, $u_2(t) = z_2(t) - x_1(t)$.

ПРИМЕР 5. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix}x_2^2\\2x_1\end{pmatrix} + R, \quad t\in[0,1],$$

где R — единичный ромб в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат $\big(R = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant 1\}\big)$, и краевые условия

$$x(0) = (0,1)',$$

$$x(1) = (1.75, 2)'.$$

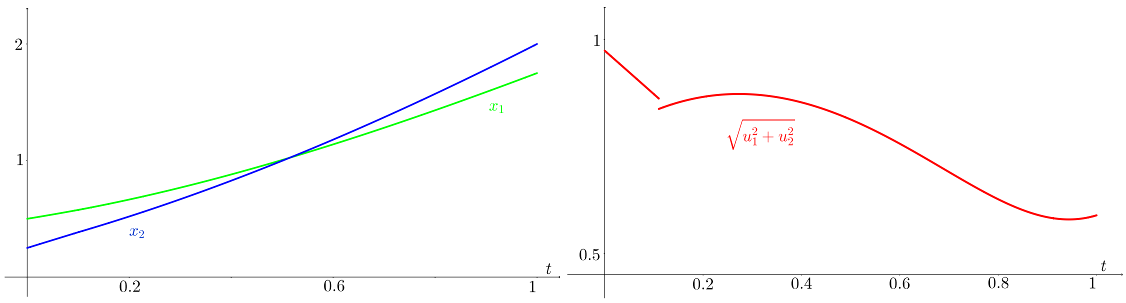

Рис. 3. Решение Примера 4

В данном случае $c(F,\psi) = x_2^2\psi_1 + 2x_1\psi_2 + \max\{|\psi_1|, |\psi_2|\}$, $\dfrac{\partial c}{\partial x} = (2\psi_2, 2x_2\psi_1)'$.
Положим $z_1 = (1,1)'$, тогда $x_1 = (t, 1+t)'$.
По формуле (3) имеем

$$\ell(\psi, z_1, t) = \psi_1 + \psi_2 - (1+t)^2\psi_1 - 2t\psi_2 - \max\{|\psi_1|, |\psi_2|\} =$$

$$= \big(1 - (1+t)^2\big)\psi_1 + (1-2t)\psi_2 - \max\{|\psi_1|, |\psi_2|\}.$$

Действуя далее по алгоритму, видим, что точка

$$x_{13}(t) = (0,1)' + \int_0^t z_{13}(\tau)d\tau$$

— решение данного примера (см. рис. 4). На рис. 4 использовано обозначение $u_1(t) = z_1(t) - x_2^2(t)$, $u_2(t) = z_2(t) - 2x_1(t)$.

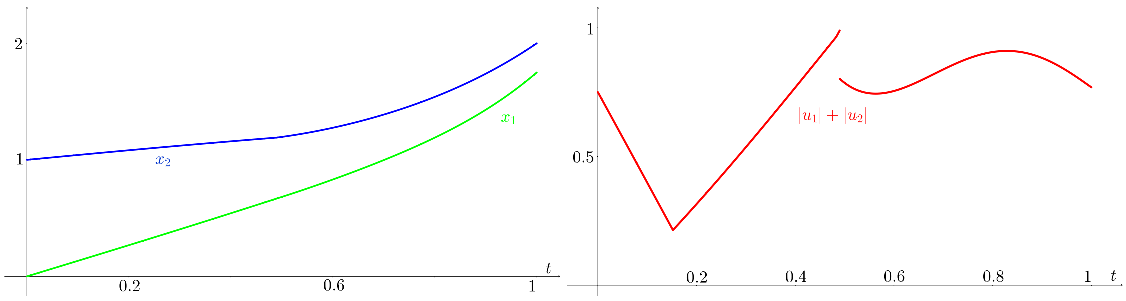

Рис. 4. Решение Примера 5

7°. Заключение. Таким образом, в данном докладе рассмотрена задача поиска решения дифференциального включения как со свободным, так и с закреплённым правым концом. С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к минимизации некоторого функционала. Для него найден градиент Гато, выписаны необходимые и достаточные условия минимума. На основании этих условий построен численный метод решения исходной задачи, базирующийся на методе наискорейшего спуска. Реализация данного метода иллюстрируется на численных примерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 239 с.

2. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.

3. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.