ЛЕММА ГИББСА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ*

В. Н. Малозёмов   Г. Ш. Тамасян

v.malozemov@spbu.ru   g.tamasyan@spbu.ru

10 октября 2017 г.

Данный доклад пополняет серию докладов по элементарным методам в экстремальных задачах.

1°. Рассмотрим сепарабельную экстремальную задачу

$$\begin{aligned} &F(x) := \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \longrightarrow \max \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = X; \quad x_i \geqslant 0 \ \ \forall i \in 1:n. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь все f_i — функции одной переменной, дифференцируемые на отрезке $[0, X]$. Очевидно, что задача (1) имеет решение.

ЛЕММА ГИББСА. *Для того чтобы план $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ задачи* (1) *был оптимальным, необходимо, а в случае вогнутости всех функций f_i на* $[0, X]$ *и достаточно, чтобы нашлось число λ, такое, что*

$$f_i'(x_i^*) = \lambda, \quad \textit{если} \ \ x_i^* > 0, \tag{2}$$

$$f_i'(x_i^*) \leqslant \lambda, \quad \textit{если} \ \ x_i^* = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_i^* > 0$. Возьмём $j \neq i$ и введём функцию

$$p(\varepsilon) = f_i(x_i^* - \varepsilon) + f_j(x_j^* + \varepsilon) + \sum_{k \notin \{i,j\}} f_k(x_k^*), \quad \varepsilon \in [0, x_i^*].$$

Эта функция достигает максимального значения при $\varepsilon = 0$. Значит, $p'(0) \leqslant 0$, что равносильно неравенству

$$f_j'(x_j^*) \leqslant f_i'(x_i^*). \tag{4}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

При $x_j^* > 0$ справедливо и обратное неравенство. Следовательно, для всех $i \in 1 : n$, при которых $x_i^* > 0$, производные $f_i'(x_i^*)$ имеют одинаковое значение. Обозначив его λ, придём к равенству (2).

При $x_j^* = 0$ неравенство (4) принимает вид $f_j'(x_j^*) \leqslant \lambda$. Поменяв здесь индекс j на i, получим неравенство (3).

Достаточность. Прежде всего отметим, что из (2) следует равенство

$$\sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i^*)x_i^* = \sum_{i:x_i^*>0} f_i'(x_i^*)x_i^* = \lambda X. \tag{5}$$

Теперь воспользуемся вогнутостью функций f_i. Для любого плана x в силу условий (2), (3) и (5) имеем

$$F(x) - F(x^*) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_i) - f_i(x_i^*)] \leqslant \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i^*)\,(x_i - x_i^*) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i^*)x_i - \lambda X \leqslant 0.$$

Значит, x^* является решением задачи (1).

Лемма доказана. $\square$

2°. Замечательное доказательство необходимости в лемме Гиббса мы заимствовали из старой книги [1, с. 21-24]. Там же приводится и рассматриваемый ниже пример. Однако при анализе этого примера мы продвинулись существенно дальше — вплоть до быстрого алгоритма его решения.

ПРИМЕР. Рассмотрим экстремальную задачу вида (1):

$$\begin{aligned} &F(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i(1 - e^{-b_i x_i}) \longrightarrow \max \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = X; \quad x_i \geqslant 0 \ \ \forall\, i \in 1 : n. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь a_i, b_i, X — положительные параметры, функции

$$f_i(x_i) = a_i(1 - e^{-b_i x_i})$$

строго вогнуты на $\mathbb{R}$.

Запишем критерий оптимальности для плана x:

$$a_i b_i e^{-b_i x_i} = \lambda, \quad \text{если } \ x_i > 0; \tag{7}$$
$$a_i b_i \qquad \leqslant \lambda, \quad \text{если } \ x_i = 0. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$x_i > 0, \quad \text{если} \;\; a_i b_i > \lambda, \tag{9}$$

$$x_i = 0, \quad \text{если} \;\; a_i b_i \leqslant \lambda. \tag{10}$$

Действительно, при $a_i b_i \leqslant \lambda$ необходимо $x_i = 0$, ибо в противном случае в силу (7) получим $a_i b_i > \lambda$, что противоречит исходному условию. При $a_i b_i > \lambda$ будет $x_i > 0$, ибо иначе получим противоречие с (8).

На основании (7) формулу (9) можно переписать так:

$$x_i = \frac{1}{b_i} \ln \frac{a_i b_i}{\lambda}, \quad \text{если} \;\; a_i b_i > \lambda. \tag{11}$$

Равенство (7) гарантирует положительность λ, поэтому условия $a_i b_i > \lambda$ и $a_i b_i \leqslant \lambda$ равносильны тому, что $\frac{a_i b_i}{\lambda} > 1$ и $\frac{a_i b_i}{\lambda} \in (0, 1]$. Данное замечание позволяет объединить формулы (11) и (10) следующим образом:

$$x_i = \frac{1}{b_i} \ln_+ \frac{a_i b_i}{\lambda}, \tag{12}$$

где

$$\ln_+(u) = \begin{cases} \ln(u) & \text{при } u > 1, \\ 0 & \text{при } u \in (0, 1]. \end{cases}$$

График функции $y = \ln_+(u)$ представлен на рис. 1.

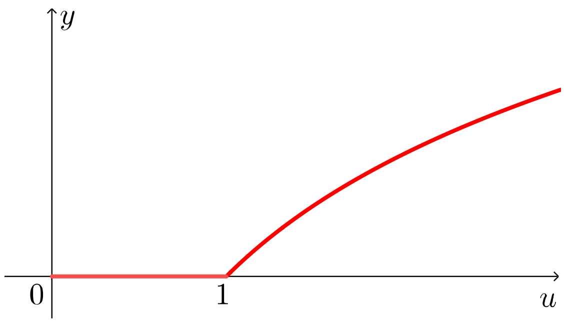

Рис. 1. График функции $y = \ln_+(u)$

Обозначим $c_i = \ln a_i b_i$, $u = \ln \lambda$ и покажем, что

$$x_i = \frac{1}{b_i}(c_i - u)_+, \; i \in 1 : n. \tag{13}$$

Условия $\frac{a_i b_i}{\lambda} > 1$ и $\frac{a_i b_i}{\lambda} \in (0, 1]$ равносильны соответственно неравенствам $c_i - u > 0$ и $c_i - u \leqslant 0$. Согласно (12) получаем

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{b_i}(c_i - u) && \text{при } c_i - u > 0, \\ x_i &= 0 && \text{при } c_i - u \leqslant 0, \end{aligned}$$

что равносильно (13). Параметр u найдём из уравнения

$$\varphi(u) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}(c_i - u)_+ = X. \qquad (14)$$

На рис. 2 изображён график функции $y = (c - u)_+$.

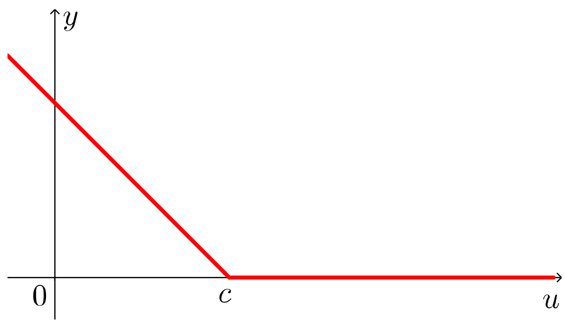

Рис. 2. График функции $y = (c - u)_+$

Таким образом, решение задачи (6) сводится к решению скалярного уравнения (14) и вычислению компонент оптимального плана по формуле (13).

3°. Опишем быстрый алгоритм решения уравнения (14).

Начнём с того, что упорядочим пары (b_i, c_i), $i \in 1 : n$, по невозрастанию второй компоненты. Получим последовательность

$$(\widehat{b}_1, \widehat{c}_1), (\widehat{b}_2, \widehat{c}_2), \ldots, (\widehat{b}_n, \widehat{c}_n),$$

где $\widehat{c}_1 \geqslant \widehat{c}_2 \geqslant \ldots \geqslant \widehat{c}_n$. Очевидно, что

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\widehat{b}_i}(\widehat{c}_i - u)_+. \qquad (15)$$

В частности,

$$\varphi(u) = 0 \quad \text{при } u \geqslant \widehat{c}_1; \qquad (16)$$

при $u \in [\widehat{c}_{k+1}, \widehat{c}_k]$, $k \in 1 : n-1$,

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\widehat{b}_i}(\widehat{c}_i - u) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\widehat{c}_i}{\widehat{b}_i} - \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\widehat{b}_i} \right) u; \qquad (17)$$

наконец,

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\widehat{c}_i}{\widehat{b}_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\widehat{b}_i} \right) u \quad \text{при } u \leqslant \widehat{c}_n. \qquad (18)$$

В силу (17)

$$\varphi(u) - \varphi(\widehat{c}_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\widehat{b}_i}\right)(\widehat{c}_k - u).$$

Обозначив

$$p_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\widehat{b}_i},$$

придём к формуле

$$\varphi(u) = \varphi(\widehat{c}_k) + p_k(\widehat{c}_k - u),\ u \in [\widehat{c}_{k+1}, \widehat{c}_k],\ k \in 1 : n-1. \tag{19}$$

Аналогично из (18) следует, что

$$\varphi(u) = \varphi(\widehat{c}_n) + p_n(\widehat{c}_n - u), \quad u \leqslant \widehat{c}_n. \tag{20}$$

На основании (15), (16), (19) и (20) заключаем, что функция $\varphi(u)$ является непрерывной ломаной, выпуклой и строго убывающей от $+\infty$ до 0 на полуоси $(-\infty, \widehat{c}_1)$ (см. рис. 3).

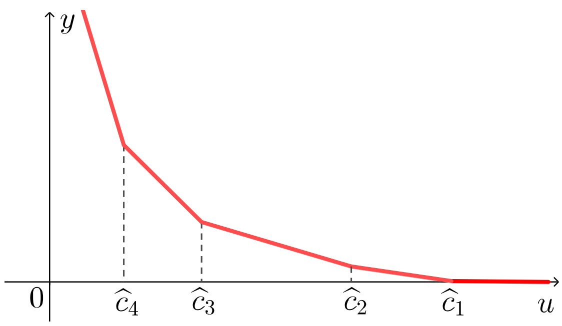

Рис. 3. График ломаной $y = \varphi(u)$

Отметим, что ломаная $\varphi(u)$ на отрезке $[\widehat{c}_n, \widehat{c}_1]$ полностью определяется своими значениями $\varphi(\widehat{c}_k)$ в узлах $\widehat{c}_k$, $k \in 1 : n$. В силу (19) эти значения связаны формулой

$$\varphi(\widehat{c}_{k+1}) = \varphi(\widehat{c}_k) + p_k(\widehat{c}_k - \widehat{c}_{k+1}), \quad k \in 1 : n-1.$$

Обозначив $\varphi_k = \varphi(\widehat{c}_k)$, получим для последовательности $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ рекуррентное соотношение

$$\begin{gathered} \varphi_1 = 0, \quad p_0 = 0; \\ p_k = p_{k-1} + \frac{1}{\widehat{b}_k}, \\ \varphi_{k+1} = \varphi_k + p_k(\widehat{c}_k - \widehat{c}_{k+1}), \\ k \in 1 : n-1. \end{gathered} \tag{21}$$

4°. Нас интересует решение u^* уравнения $\varphi(u) = X$. Из свойств функции $\varphi(u)$ следует, что такое решение существует и единственно. Для его нахождения будем последовательно вычислять значения φ_1, $\varphi_2, \ldots$ по формулам (21), пока не встретим индекс k_0, на котором

$$\varphi_{k_0} < X \leqslant \varphi_{k_0+1}.$$

В этом случае $u^* \in [\widehat{c}_{k_0+1}, \widehat{c}_{k_0}]$ (см. рис. 4).

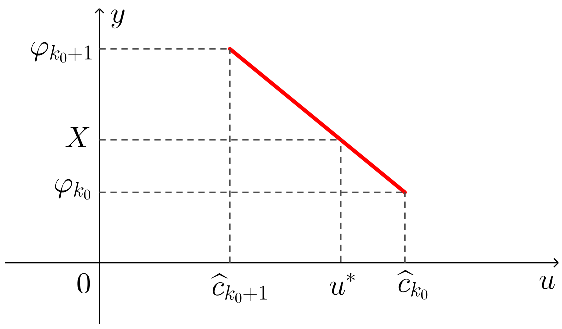

Рис. 4. Локализация решения u^* уравнения $\varphi(u) = X$

Согласно (19) имеем

$$u^* = \widehat{c}_{k_0} - \frac{1}{p_{k_0}}(X - \varphi_{k_0}). \tag{22}$$

Если $\varphi_n < X$, то $u^* < \widehat{c}_n$. В силу (20), u^* вычисляется по той же формуле (22) при $k_0 = n$.

На основании (13) для компонент решения $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ задачи (6) получаем представление

$$x_i^* = \frac{1}{b_i}(c_i - u^*)_+, \quad i \in 1 : n.$$

5°. Задачу (6) можно считать формализацией следующей задачи поиска. Пусть в нашем распоряжении имеется X единиц времени, чтобы обнаружить некоторый объект. Этот объект может находится в одном из n мест. Если объект находится в i-м месте, то, потратив x_i единиц времени, мы можем обнаружить его с вероятностью $1 - e^{-b_i x_i}$. Вероятность того, что объект находится в i-м месте, равна a_i. Как разбить общее время X на сумму x_i так, чтобы максимизировать вероятность обнаружения интересующего нас объекта?

Параметр b_i можно интерпретировать как уровень условий, благоприятствующих поиску объекта в i-м месте. Представляет интерес проанализировать влияние параметров b_i на оптимальное распределение $\{x_i^*\}$.

Возьмём конкретные данные. Пусть $n = 4$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.2$, $a_4 = 0.1$, $X = 3$. При $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$ оптимальное распределение $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ имеет вид

$$x^* = (1.327,\ 1.039,\ 0.634,\ 0).$$

Теперь при каждом фиксированном $i \in 1 : 4$ будем изменять значения b_i, сохраняя остальные b_k равными единице. На рис. 5 изображены четыре графика, которые показывают, как изменяются x_i^* в зависимости от b_i.

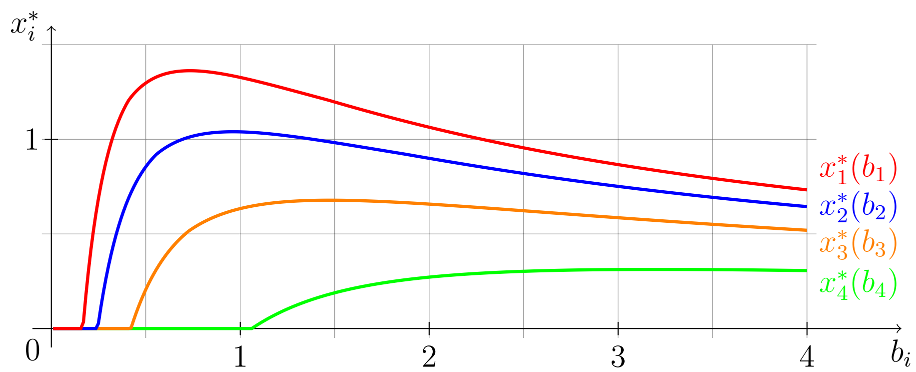

Рис. 5. Графики зависимости x_i^* от b_i

На каждом графике выделяются два значения b_i:

b_i^0 — значение, до которого $x_i^* = 0$;

b_i^1 — значение, после которого x_i^* начинает убывать.

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} &b_1^0 = 0.167, \quad b_2^0 = 0.245, \quad b_3^0 = 0.421, \quad b_4^0 = 1.061;\\ &b_1^1 = 0.734, \quad b_2^1 = 0.962, \quad b_3^1 = 1.475, \quad b_4^1 = 3.201. \end{aligned}$$

В таблице представлена более полная информация об изменении всего оптимального распределения x^* при изменении b_2.

Таблица

b_2	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
0.245	1.693	0	1	0.307
0.484	1.416	0.832	0.723	0.029
0.723	1.342	1.009	0.649	0
0.962	1.327	1.039	0.634	0
1.5	1.356	0.982	0.662	0
2.5	1.420	0.819	0.727	0.034
4	1.479	0.644	0.785	0.092

6°. Другие примеры на применение леммы Гиббса при решении сепарабельных экстремальных задач можно найти в обзорной статье [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Данскин Дж. М. *Теория максимина и её приложение к задачам распределения вооружения.* М.: Изд-во «Советское радио», 1970. 200 с.

2. Patriksson M. *A survey on the continuous nonlinear resource allocation problem* // European J. Operational Research. **185** (2008), 1-46.