БАЛОЧНЫЕ СПЛАЙНЫ*

В. Н. Малозёмов
v.malozemov@spbu.ru

5 декабря 2017 г.

Аннотация. Балочные сплайны представляют собой ближайшее обобщение натуральных кубических сплайнов. Они появились в процессе работы над книгой [1] под влиянием исследования А. Н. Крылова [2]. В данном докладе приводится усовершенствованный вариант доказательства экстремального свойства интерполяционных балочных сплайнов.

1°. Рассмотрим многоточечную вариационную задачу

$$\begin{gathered} J(f) := \int_0^\ell \bigl[(f'')^2 + 4p^4 f^2\bigr]\,dx \to \inf \\ f(x_j) = y_j, \quad j \in 1:m; \quad f \in C^2[0,\ell], \end{gathered} \tag{1}$$

где $p > 0$ — параметр и $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = \ell$. Она возникает при описании положения упругой балки, вдавленной в точках x_j на глубину y_j в упругое основание [2].

Предположим, что задача (1) имеет решение $f_* \in C^2[0,\ell]$, обладающее дополнительным свойством: на каждом промежутке $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{m-1}, x_m]$ у функции f_* существует и непрерывна четвёртая производная. Выведем необходимое условие оптимальности.

2°. Обозначим через $C_0^2[0,\ell]$ множество допустимых вариаций,

$$C_0^2[0,\ell] = \bigl\{h \in C^2[0,\ell] \mid h(x_j) = 0 \quad \forall j \in 1:m\bigr\}.$$

При $\lambda > 0$ для всех $h \in C_0^2[0,\ell]$ имеем

$$0 \leqslant J(f_* + \lambda h) - J(f_*) = 2\lambda \int_0^\ell [f_*'' h'' + 4p^4 f_* h]\,dx + \lambda^2 J(h).$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Поделим это неравенство на $\lambda > 0$ и перейдём к пределу при $\lambda \to +0$. Получим

$$\int_0^\ell [f_*'' h'' + 4p^4 f_* h]dx \geqslant 0.$$

Учитывая, что вместе с h множеству $C_0^2[0,\ell]$ принадлежит и $(-h)$, заключаем, что

$$\int_0^\ell [f_*'' h'' + 4p^4 f_* h]dx = 0 \quad \forall h \in C_0^2[0,\ell]. \tag{2}$$

Введём функцию

$$F_*(x) = f_*^{(4)}(x) + 4p^4 f_*(x).$$

Зафиксируем $x_0 \in (x_{j-1}, x_j)$ и покажем, что $F_*(x_0) = 0$.

Допустим, вопреки утверждению, что $F_*(x_0) > 0$ (случай $F_*(x_0) < 0$ рассматривается аналогично). По непрерывности найдётся $\delta > 0$, такое, что $F_*(x) > 0$ на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (x_{j-1}, x_j)$. Подставив в (2) допустимую вариацию

$$h_\delta(x) = (x - x_0 + \delta)_+^3 (x_0 + \delta - x)_+^3,$$

где $u_+ = \max\{0, u\}$, и проинтегрировав первое слагаемое два раза по частям, получим

$$0 = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [f_*^{(4)} + 4p^4 f_*] h_\delta dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} F_*(x)(x - x_0 + \delta)^3 (x + \delta - x)^3 dx.$$

Однако последний интеграл определённо положительный. Противоречие убеждает нас в справедливости равенства $F_*(x_0) = 0$. Таким образом, на всех интервалах (x_{j-1}, x_j), $j \in 2 : m$, функция f_* удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f^{(4)}(x) + 4p^4 f(x) = 0. \tag{3}$$

Теперь подставим в (2) допустимую вариацию

$$h_\delta(x) = x(\delta - x)_+^3,$$

где $\delta \in (0, x_2)$, и снова проинтегрируем первое слагаемое два раза по частям. Получим

$$0 = \int_0^\delta [f_*'' h_\delta'' + 4p^4 f_* h_\delta]dx = f_*'' h_\delta' \Big|_0^\delta + \int_0^\delta [f_*^{(4)} + 4p^4 f_*] h_\delta dx = -f_*''(0) h_\delta'(0),$$

то есть $f_*''(0) h_\delta'(0) = 0$. Учитывая, что $h_\delta'(0) = \delta^3$, заключаем, что $f_*''(0) = 0$. Аналогично, с помощью вариации

$$h_\delta(x) = (x - \ell + \delta)_+^3 (\ell - x),$$

где $\delta \in (0, \ell - t_{m-1})$, показывается, что $f_*''(\ell) = 0$. Значит, $f_*(x)$ удовлетворяет граничным условиям $f_*''(0) = f_*''(\ell) = 0$.

Подведём предварительный итог.

ЛЕММА 1. *Решение f_* вариационной задачи* (1) *на каждом интервале $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{m-1}, x_m)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению* (3)*, а его вторая производная обращается в ноль на концах отрезка* $[0, \ell]$.

3°. Обратимся к однородному дифференциальному уравнению (3). Корни характеристического полинома $\lambda^4 + 4p^4$ этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= p\sqrt{2}\exp(i\pi/4) = p(1+i), \\ \lambda_1 &= p\sqrt{2}\exp(-i\pi/4) = p(1-i), \\ \lambda_2 &= p\sqrt{2}\exp(3\pi/4) = p(-1+i), \\ \lambda_3 &= p\sqrt{2}\exp(-3\pi/4) = p(-1-i). \end{aligned}$$

Фундаментальную систему решений образуют функции

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^{px}\cos px, \quad u_1(x) = e^{px}\sin px, \\ u_2(x) &= e^{-px}\cos px, \quad u_3(x) = e^{-px}\sin px. \end{aligned}$$

Линейные комбинации

$$K_i(x) = \sum_{j=0}^{3} c_{ij} u_j(x), \quad i \in 0:3,$$

с неособенной матрицей $\{c_{ij}\}$ также образуют фундаментальную систему решений. Выберем c_{ij} так, чтобы выполнялись условия

$$K_i^{(\nu)}(0) = \delta_{i\nu}, \quad \nu \in 0:3, \tag{4}$$

где $\delta_{i\nu}$ — символ Кронекера. В этом случае, как нетрудно проверить, получим

$$\begin{aligned} K_0(x) &= \operatorname{ch} px \cos px, \\ K_1(x) &= \frac{1}{2p}(\operatorname{ch} px \sin px + \operatorname{sh} px \cos px), \\ K_2(x) &= \frac{1}{2p^2}\operatorname{sh} px \sin px, \\ K_3(x) &= \frac{1}{4p^3}(\operatorname{ch} px \sin px - \operatorname{sh} px \cos px). \end{aligned}$$

Здесь $\operatorname{ch}(u) = (e^u + e^{-u})/2$ — гиперболический косинус, $\operatorname{sh}(u) = (e^u - e^{-u})/2$ — гиперболический синус.

Функции $K_i(x)$ были выведены А. Н. Крыловым [2].

4°. *Балочным сплайном* назовём функцию вида

$$S(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i K_i(x) + \sum_{j=2}^{m-1} d_j K_3\big((x - x_j)_+\big) \tag{5}$$

при дополнительном условии

$$S''(0) = S''(\ell) = 0. \tag{6}$$

Отметим, что

$$K_3\big((x - x_j)_+\big) = \begin{cases} K_3(x - x_j) & \text{при} \quad x \geqslant x_j; \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant x_j. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{gathered} S(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i K_i(x) \quad \text{при} \quad x \in [x_1, x_2], \\ S(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i K_i(x) + d_2 K_3(x - x_2) \quad \text{при} \quad x \in [x_2, x_3], \\ S(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i K_i(x) + d_2 K_3(x - x_2) + d_3 K_3(x - x_3) \quad \text{при} \quad x \in [x_3, x_4], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i K_i(x) + \sum_{j=2}^{m-1} d_j K_3(x - x_j) \quad \text{при} \quad x \in [x_{m-1}, x_m]. \end{gathered} \tag{7}$$

На основании (6) и (7) заключаем, что балочный сплайн $S(x)$ принадлежит классу $C^2[0, \ell]$ и на всех промежутках $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3], \ldots, [x_{m-1}, x_m]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3).

ЛЕММА 2. *Система базисных функций*

$$K_0(x),\ K_1(x),\ K_2(x),\ K_3(x),\ K_3\big((x - x_2)_+\big), \ldots, K_3\big((x - x_{m-1})_+\big)$$

линейно независима на отрезке $[0, \ell]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$S(x) := \sum_{i=0}^{3} c_i K_i(x) + \sum_{j=2}^{m-1} d_j K_3\big((x - x_j)_+\big) \equiv 0 \quad \text{на} \quad [0, \ell].$$

В частности, $S(x) \equiv 0$ на $[x_1, x_2]$. Согласно (7)

$$\sum_{i=0}^{3} c_i K_i(x) \equiv 0 \quad \text{на} \quad [x_1, x_2].$$

Отсюда в силу (4) следует, что все c_i равны нулю.

Далее, $S(x) \equiv 0$ на $[x_2, x_3]$. Согласно (7), $d_2 = 0$. Продолжив последовательно перебирать формулы (7), получим $d_3 = 0, \ldots, d_{m-1} = 0$.

Лемма доказана. □

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Для любого балочного сплайна S и произвольной функции $f \in C^2[0, \ell]$ справедливо равенство*

$$\int_0^\ell [S''f'' + 4p^4 Sf]dx = S^{(3)}(x_1+0)f(x_1) - S^{(3)}(x_m-0)f(x_m) + \\ + \sum_{j=2}^{m-1} \big[S^{(3)}(x_j+0) - S^{(3)}(x_j-0)\big] f(x_j). \tag{8}$$

Доказательство. Левую часть формулы (8) обозначим L. Проинтегрируем первое слагаемое в L два раза по частям. Учитывая (6), получаем

$$\int_0^\ell S''f''dx = \sum_{j=2}^{m} \int_{x_{j-1}}^{x_j} S''f''dx = \sum_{j=2}^{m} \Big[S''f'\big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} S^{(3)}f'dx\Big] = \\ = -\sum_{j=2}^{m} \Big[S^{(3)}f\big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} S^{(4)}f dx\Big].$$

Значит

$$L = -\sum_{j=2}^{m} \Big\{S^{(3)}f\big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big[S^{(4)} + 4p^4 S\big] f dx\Big\} =$$

$$= S^{(3)}(x_1+0)f(x_1) - S^{(3)}(x_m-0)f(x_m) + \sum_{j=2}^{m-1} \big[S^{(3)}(x_j+0) - S^{(3)}(x_j-0)\big] f(x_j).$$

Лемма доказана. □

5°. Рассмотрим интерполяционную задачу на балочных сплайнах.

$$S(x_j) = y_j, \quad j \in 1 : m. \tag{9}$$

ТЕОРЕМА 1. *При любых правых частях решение задачи* (9) *существует и единственно.*

Доказательство. Формально к (9) нужно добавить условия (6). Тогда получится система линейных уравнений порядка $m+2$ с таким же числом неизвестных $c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ d_2,\dots,d_{m-1}$. Покажем, что однородная система

$$\begin{gathered} S(x_j)=0, \quad j\in 1:m; \\ S''(0)=S''(\ell)=0 \end{gathered}$$

имеет только тривиальное решение.

Возьмём любое решение этой системы. Соответствующий балочный сплайн обозначим S_0. Функция S_0 принадлежит классу $C^2[0,\ell]$. Подставив в (8) S_0 вместо f и S, получим

$$\int_0^\ell \big[(S_0'')^2+4p^4S_0^2\big]\,dx=0.$$

Значит, $S_0(x)\equiv 0$ на $[0,\ell]$. Из этого тождества и леммы 2 следует, что все коэффициенты сплайна S_0 равны нулю.

Теорема доказана. □

6°. Теперь можно сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА 2. *Единственным решением задачи* (1) *является интерполяционный балочный сплайн* S_*.

Доказательство. Возьмём произвольную функцию f, удовлетворяющую ограничениям задачи (1), и подставим в (8) $f-S_*$ вместо f, и S_* вместо S. Учитывая, что $f(x_j)-S_*(x_j)=0$ при всех $j\in 1:m$, получаем

$$\int_0^\ell \big[S_*''(f''-S_*'')+4p^4S_*(f-S_*)\big]\,dx=0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} J(f)&=\int_0^\ell \Big\{\big[(f''-S_*'')+S_*''\big]^2+4p^4\big[(f-S_*)+S_*\big]^2\Big\}dx= \\ &=J(S_*)+\int_0^\ell \big[(f''-S_*'')^2+4p^4(f-S_*)^2\big]\,dx. \end{aligned}$$

В частности, $J(f)\geqslant J(S_*)$. Оптимальность S_* установлена.

Поскольку равенство $J(f)=J(S_*)$ выполняется лишь тогда, когда $f(x)\equiv S_*(x)$ на $[0,\ell]$, то S_* — единственное решение задачи (1).

Теорема доказана. □

7°. Нетрудно проверить, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняются предельные соотношения

$$\lim_{p \to +0} K_\nu(x) = \frac{1}{\nu!} x^\nu, \quad \nu \in 0 : 3.$$

Этот факт поясняет, почему балочные сплайны можно считать параметрическим расширением натуральных кубических сплайнов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Полиномиальные сплайны.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 120 с.

2. Крылов А. Н. *О расчёте балок, лежащих на упругом основании. Издание второе.* Л.: Изд-во АН СССР, 1931. 154 с.