ПРИМЕРЫ НАИЛУЧШЕГО КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ УЗЛАМИ*

В. Н. Малозёмов v.malozemov@spbu.ru

Г. Ш. Тамасян g.tamasyan@spbu.ru

19 декабря 2017 г.

1°. Возьмём функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[c,d]$. Обозначим через $E(f;[\alpha,\beta])$ величину наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]\subset[c,d]$ полиномами первой степени. Таким образом,

$$E(f;[\alpha,\beta])=\min_{(p_0,p_1)\in\mathbb{R}^2}\max_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)-(p_0x+p_1)|.$$

Зафиксируем натуральное число $m\geqslant 2$. Набор точек $\tau=\{x_k\}_{k=0}^m$, удовлетворяющих условию

$$c=x_0<x_1<\ldots<x_m=d,$$

обеспечивает разбиение отрезка $[c,d]$ на подотрезки $[x_{k-1},x_k]$, $k\in 1:m$. Разбиение τ называется *разбиением с равными уклонениями*, если

$$E(f;[x_{k-1},x_k])=E(f;[x_k,x_{k+1}]),\ k\in 1:m-1.$$

В докладе [1] показано, что разбиение с равными уклонениями существует и оптимально в том смысле, что доставляет минимум величине

$$\mu(\tau)=\max_{k\in 1:m}E(f;[x_{k-1},x_k]).$$

В данном докладе приводятся три примера на построение разбиений с равными уклонениями.

2°. Начнём с замечаний общего характера. Напомним, что полином первой степени, наименее уклоняющийся от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, характеризуется наличием трёхточечного альтернанса [2, с. 49]. Если в дополнение к непрерывности функция $f(x)$ строго выпукла или строго вогнута, то точками альтернанса необходимо являются концы отрезка $[\alpha,\beta]$ (см. рис.).

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/

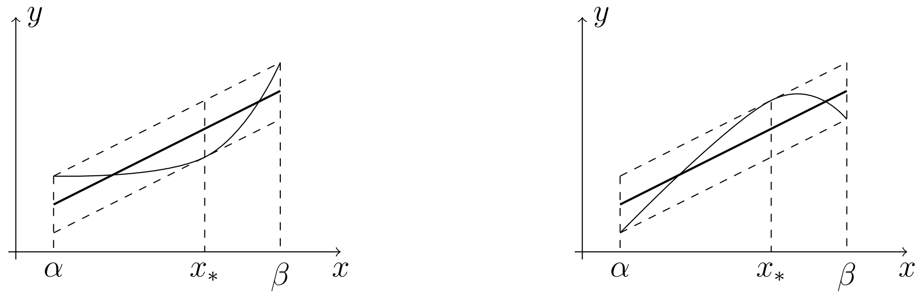

Рис. Трёхточечные альтернансы

Третья точка альтернанса x_*, в случае дифференцируемости $f(x)$, определяется из следующего условия: производная $f'(x_*)$ равна производной линейной функции $\ell(x)$, интерполирующей $f(x)$ в точках α и β. Так как

$$\ell(x) = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha),$$

то для x_* получаем уравнение

$$f'(x_*) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}. \tag{1}$$

При этом

$$E(f; [\alpha, \beta]) = \tfrac{1}{2} \left| f(x_*) - \ell(x_*) \right| . \tag{2}$$

Для полинома наилучшего приближения справедливо представление

$$p_0^* x + p_1^* = \begin{cases} \ell(x) - E(f; [\alpha, \beta]) & \text{в случае выпуклости функции } f, \\ \ell(x) + E(f; [\alpha, \beta]) & \text{в случае вогнутости функции } f. \end{cases}$$

Приняв во внимание эти факты, перейдём к построению разбиений с равными уклонениями.

3°. Возьмём строго выпуклую функцию $f_1(x) = x^2$. Уравнение (1) принимает вид

$$f_1'(x_*) = \beta + \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$x_* = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Согласно (2),

$$E(f_1; [\alpha, \beta]) = \tfrac{1}{2} \left| \left(\tfrac{\beta+\alpha}{2}\right)^2 - (\alpha^2 + (\beta + \alpha)\tfrac{\beta-\alpha}{2}) \right| = \tfrac{1}{8}(\beta - \alpha)^2.$$

Видим, что величина наилучшего приближения зависит только от длины отрезка $[\alpha, \beta]$.

Разбиение отрезка $[c,d]$ на m частей с равными уклонениями получается при равномерном расположении узлов

$$x_k = c + k\frac{d-c}{m}, \quad k \in 0:m.$$

В этом случае

$$E(f_1;[x_{k-1},x_k]) = \frac{(d-c)^2}{8m^2}, \quad k \in 1:m.$$

4°. Рассмотрим строго вогнутую функцию $f_2(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[c,d] = [0.25, 1]$. Уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{2\sqrt{x_*}} = \frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$x_* = \left(\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{2}\right)^2.$$

Согласно (2),

$$E(f_2;[\alpha,\beta]) = \tfrac{1}{2}\left|\tfrac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{2} - \left(\sqrt{\alpha} + \tfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}\left(\left(\tfrac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{2}\right)^2 - \alpha\right)\right)\right| = \\ = \tfrac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{8(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})}. \tag{3}$$

Величина наилучшего приближения для функции f_2 зависит от концов промежутка аппроксимации $[\alpha,\beta]$, но более сложным образом, чем для функции f_1.

Для построения разбиения с равным уклонениями воспользуемся вариантом численного метода, предложенного в докладе [1]. Предварительно упростим обозначение

$$E(\alpha,\beta) = E(f_2;[\alpha,\beta])$$

и покажем, что существует такое $x \in (\alpha,\beta)$, что

$$E(\alpha,x) = E(x,\beta). \tag{4}$$

В силу (3) уравнение (4) принимает вид

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha})^2}{8(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} = \frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{x})^2}{8(\sqrt{\beta}+\sqrt{x})}$$

или, что равносильно,

$$3x - \sqrt{x}\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}\right) - \sqrt{\alpha\beta} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{x} = \tfrac{1}{6}\left(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2 + 12\sqrt{\alpha\beta}}\right). \tag{5}$$

Построение разбиения с равными уклонениями состоит из двух этапов.

Первый этап: построение начального разбиения $\tau_0 = \{x_k^0\}_{k=0}^m$.

Положим $x_0^0 = c$, $x_m^0 = d$. Узлы x_{m-1}^0, $x_{m-2}^0, \ldots, x_1^0$ будем находить последовательно как решения уравнений вида (4):

$$\begin{array}{l} E(x_0^0, x_{m-1}^0) = E(x_{m-1}^0, x_m^0), \\ E(x_0^0, x_{m-2}^0) = E(x_{m-2}^0, x_{m-1}^0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E(x_0^0, x_1^0) = E(x_1^0, x_2^0). \end{array}$$

В этом случае

$$x_0^0 < x_1^0 < \ldots < x_m^0$$

и

$$E(x_0^0, x_1^0) = E(x_1^0, x_2^0) < E(x_2^0, x_3^0) < \ldots < E(x_{m-1}^0, x_m^0).$$

Второй этап: построение последовательности разбиений, стремящейся к разбиению с равными уклонениями.

Пусть уже имеется s-е разбиение $\tau_s = \{x_k^s\}_{k=0}^m$. Положим $x_0^{s+1} = c$, $x_m^{s+1} = d$. Узлы $x_{m-1}^{s+1}, x_{m-2}^{s+1}, \ldots, x_1^{s+1}$ будем находить последовательно как решения уравнений вида (4):

$$\begin{array}{l} E(x_{m-2}^s, x_{m-1}^{s+1}) = E(x_{m-1}^{s+1}, x_m^{s+1}), \\ E(x_{m-3}^s, x_{m-2}^{s+1}) = E(x_{m-2}^{s+1}, x_{m-1}^{s+1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E(x_0^s, x_1^{s+1}) = E(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}). \end{array}$$

В результате получим разбиение $\tau_{s+1} = \{x_k^{s+1}\}_{k=0}^m$ со свойством

$$E(x_0^{s+1}, x_1^{s+1}) = E(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}) < E(x_2^{s+1}, x_3^{s+1}) < \ldots < E(x_{m-1}^{s+1}, x_m^{s+1}).$$

При этом при каждом $k \in 1 : m-1$ последовательность x_k^s, $s = 0, 1, 2, \ldots$, будет возрастать.

Пользуясь свойством монотонности, в [1] доказывается, что последовательность разбиений $\{\tau_s\}$ сходится к разбиению с равными уклонениями.

Можно задать точность $\varepsilon > 0$ и прекратить вычисления, как только выполнится неравенство

$$E(x_{m-1}^s, x_m^s) - E(x_0^s, x_1^s) < \varepsilon.$$

5°. Вернёмся к аппроксимации функции $f_2(x)$ на отрезке $[c, d] = [0.25, 1]$. Для построения разбиения с равными уклонениями воспользуемся описанным выше методом. В данном случае решение уравнения (4) допускает аналитическое представление (5).

В табл. 1 приведены результаты вычислений при $m = 3$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$. Идентификатор it указывает на номер итерации, $E_k = E(x_{k-1}, x_k)$.

Таблица 1

it	x_0	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3
0	0.25	0.3709	0.5310	1	0.0013	0.0013	0.0053
1	0.25	0.4069	0.6280	1	0.0021	0.0021	0.0030
2	0.25	0.4163	0.6542	1	0.0023	0.0023	0.0025
3	0.25	0.4187	0.6609	1	0.0024	0.0024	0.0024
4	0.25	0.4193	0.6626	1	0.0024	0.0024	0.0024

Получено оптимальное разбиение $\tau = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, где

$$x_0 = 0.25, \quad x_1 = 0.4193, \quad x_2 = 0.6626, \quad x_3 = 1.$$

Наилучшее кусочно-линейное приближение имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 0.8714x + 0.2845, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0.6842x + 0.3630, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0.5513x + 0.4511, & x \in [x_2, x_3]. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации равна 0.0024.

В табл. 2 приведены результаты вычислений при $m = 4$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 2

it	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	E_1	E_2	E_3	E_4
0	0.25	0.3060	0.3709	0.5310	1	0.0003	0.0003	0.0013	0.0053
1	0.25	0.3372	0.4455	0.6280	1	0.0008	0.0008	0.0013	0.0030
2	0.25	0.3537	0.4868	0.6813	1	0.0010	0.0010	0.0013	0.0021
3	0.25	0.3622	0.5085	0.7091	1	0.0012	0.0012	0.0013	0.0017
4	0.25	0.3665	0.5196	0.7233	1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0015
5	0.25	0.3686	0.5252	0.7305	1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0014
6	0.25	0.3697	0.5280	0.7342	1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0014
7	0.25	0.3703	0.5294	0.7360	1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0014

Получено оптимальное разбиение $\tau = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, где

$$x_0 = 0.25, \quad x_1 = 0.3703, \quad x_2 = 0.5294, \quad x_3 = 0.7360, \quad x_4 = 1.$$

Наилучшее кусочно-линейное приближение имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 0.9021x + 0.2758, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0.7484x + 0.3327, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0.6307x + 0.3950, & x \in [x_2, x_3]; \\ 0.5382x + 0.4631, & x \in [x_3, x_4]. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации равна 0.0013.

З а м е ч а н и е. Функция $f_2(x) = \sqrt{x}$ имеет особенность при $x = 0$ — в этой точке её производная обращается в $+\infty$. Следовало отступить от нуля, взять c>0. Выбор $c = 0.25$ неслучаен. Он обеспечивает лёгкое вычисление $\sqrt{x}$ при $x \in (0.25, 1)$. Для этого нужно найти натуральное k, такое, что $4^k x \in [0.25, 1]$, и вычислить $\alpha = \sqrt{4^k x}$. Так как

$$\sqrt{x} = \sqrt{4^{-k}(4^k x)} = 2^{-k}\alpha,$$

то $\sqrt{x}$ получим с помощью сдвига двоичного представления числа α на k разрядов вправо.

6°. В заключение рассмотрим задачу наилучшего кусочно-линейного приближения строго вогнутой функции $f_3(x) = \ln(1+x)$ на отрезке $[0, 1]$. В данном случае уравнение (1) для средней точки альтернанса x_* принимает вид

$$\frac{1}{1 + x_*} = \frac{1}{\beta - \alpha} \ln\left(1 + \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha}\right).$$

Обозначив

$$u = \frac{1 + \alpha}{\beta - \alpha} \ln\left(1 + \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha}\right),$$

получим

$$x_* = \frac{1 + \alpha}{u} - 1.$$

Согласно (2)

$$E(f_3; [\alpha, \beta]) = \tfrac{1}{2}\left|\ln\frac{1+\alpha}{u} - \left(\ln(1+\alpha) + \frac{u}{1+\alpha}\left(\frac{1+\alpha}{u} - (1+\alpha)\right)\right)\right| = \\ = \tfrac{1}{2}\left(u - \ln u - 1\right).$$

Для построения разбиения с равными уклонениями воспользуемся методом, описанным в п. 4°. Уравнение (4) будем решать численным методом с помощью процедуры solve из пакета MATLAB.

В табл. 3 приведены результаты вычислений при $m = 3$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 3

it	x_0	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3
0	0	0.1892	0.4142	1	0.0019	0.0019	0.0075
1	0	0.2419	0.5422	1	0.0029	0.0029	0.0042
2	0	0.2554	0.5760	1	0.0032	0.0032	0.0035
3	0	0.2588	0.5845	1	0.0033	0.0033	0.0034
4	0	0.2596	0.5867	1	0.0033	0.0033	0.0033

Получено оптимальное разбиение $\tau = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, где

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.2596, \quad x_2 = 0.5867, \quad x_3 = 1.$$

Наилучшее кусочно-линейное приближение имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 0.8890x + 0.0033, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0.7058x + 0.0509, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0.5601x + 0.1364, & x \in [x_2, x_3]. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации равна 0.0033.

В табл. 4 приведены результаты вычислений при $m = 4$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 4

it	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	E_1	E_2	E_3	E_4
0	0	0.0905	0.1892	0.4142	1	0.0005	0.0005	0.0019	0.0075
1	0	0.1388	0.2968	0.5422	1	0.0011	0.0011	0.0019	0.0042
2	0	0.1637	0.3543	0.6105	1	0.0014	0.0014	0.0019	0.0029
3	0	0.1764	0.3839	0.6458	1	0.0016	0.0016	0.0019	0.0024
4	0	0.1828	0.3990	0.6637	1	0.0018	0.0018	0.0019	0.0021
5	0	0.1860	0.4066	0.6727	1	0.0018	0.0018	0.0019	0.0020
6	0	0.1876	0.4104	0.6772	1	0.0018	0.0018	0.0019	0.0019
7	0	0.1884	0.4123	0.6795	1	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019

Получено оптимальное разбиение $\tau = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, где

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.1884, \quad x_2 = 0.4123, \quad x_3 = 0.6795, \quad x_4 = 1.$$

Наилучшее кусочно-линейное приближение имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 0.9162x + 0.0019, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0.7709x + 0.0292, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0.6485x + 0.0797, & x \in [x_2, x_3]; \\ 0.5449x + 0.1501, & x \in [x_3, x_4]. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации равна 0.0019.

7°. При кусочно-линейном приближении с переменными узлами строго выпуклой или строго вогнутой функции $f(x)$ оптимальная кусочно-линейная функция $y(x)$ будет непрерывной. Это следует из того, что $y(x)$ строится по разбиению с равными уклонениями $\tau_* = \{x_k^*\}_{k=0}^m$, и того, что разность

$$\Delta(x) = f(x) - y(x)$$

принимает одинаковые значения во всех узлах x_k^*, $k \in 0 : m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация* // В кн.: Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 316–325. (`http://apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#0424a`)

2. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. *Введение в минимакс.* М.: Наука, 1972. 368 с.