КОМПАКТНЫЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И МЕТРИКА ХАУСДОРФА*

И. В. ОРЛОВ

igor_v_orlov@mail.ru

30 ноября 2017 г.

1°. Введение. Мы исходим из понимания сильного субдифференциала как ограниченного сублинейного многозначного оператора с компактными выпуклыми значениями (суб-оператор, compact-valued fan). Это определяет тесную связь построенного исчисления с подходящей топологией конуса выпуклых компактов и конуса сублинейных компактнозначных операторов. Целью доклада является описание такой связи и соответствующего субдифференциального формализма. Отметим основные моменты.

1) Классическая топология Помпейю–Хаусдорфа в конусе выпуклых компактов может рассматриваться как неинвариантная сублинейная топология, порождаемая супремум–нормой. Это позволяет строить теорию суб–операторов во многом по аналогии с классической теорией линейных операторов, вводя понятие субнормы.

2) Для суб–операторов в банаховых пространствах ограниченность и непрерывность равносильны. Однако в случае конусов ограниченность суб–оператора связана с более слабым и существенно многозначным понятием субнепрерывности.

3) В случае пространств Фреше описано равносильное определение субдифференциала, без прямого применения метрики Хаусдорфа, как выпуклого замыкания множества производных чисел Дини. Это существенно упрощает их вычисление и применение.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Классический анализ Фреше. Прежде чем переходить к субдифференциалам, напомним базовые понятия анализа Фреше в банаховых пространствах:

1. Основные объекты анализа Фреше связаны с линейностью:

– Линейное пространство (нормированное, обычно полное (банахово));

– Линейная топология (топология, согласованная с линейными операциями);

– Линейные операторы (обычно ограниченные по норме).

2. Основные определения: (X, Y – банаховы пространства; $f : X \supset U(x) \to Y;\ h \in X$).

– Дифференциал по направлению:

$$\partial f(x, h) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}; \tag{1}$$

– Сильный дифференциал: $\partial f(x) \in L(X; Y)$, сходимость в (1) равномерна по $\|h\| \leq 1$.

– Критерий дифференцируемости:

$$f(x + h) - f(x) = A \cdot h + o(\|h\|) \ \ (A \in L(X, Y)).$$

3°. Негладкий анализ — замена основных объектов. Отметим, что переход к негладкому анализу требует отказа либо существенного изменения всех базовых понятий, отмеченных в п. 2°:

- Отказ от линейности пространства — переход к выпуклым конусам;
- Отказ от инвариантной топологии — переход к позитивно линейной неинвариантной топологии;
- Отказ от линейных однозначных операторов — переход к сублинейным компактнозначным операторам.

Напомним новые базовые понятия более подробно.

4°. **Выпуклые конусы.** Напомним общее определение выпуклых конусов и их простейшую классификацию.

Выпуклый конус есть множество точек (векторов), в котором определены операции сложения векторов $(x + y)$ и умножения неотрицательного скаляра на вектор $(\lambda \cdot x)$. Операции удовлетворяют условиям:

$(X, +)$ — коммутативная полугруппа с нулем; $(X, \cdot)$ — модуль над $\mathbb{R}_+$.

Таким образом, выпуклый конус есть обобщение понятия вещественного линейного пространства. Напомним простейшую классификацию выпуклых конусов (ВК):

Классические конусы — ВК, содержащиеся в некотором линейном пространстве (ЛП).

Вложимые (канцеллятивные) конусы — ВК, допускающие изоморфное вложение в ЛП. Согласно известному критерию (cancellation law) конус вложим тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\forall\, x, y, z \in X : \quad (x + y = x + z) \Rightarrow (y = z). \qquad (CL)$$

Заметим, что каноническое вложение канцеллятивного конуса в ЛП может (при задании топологий) оказаться разрывным.

Абстрактные (неканцеллятивные) конусы — не допускают изоморфного вложения ни в какое линейное пространство.

Важным классом конусов являются конусы подмножеств ЛП. Приведем некоторые примеры.

Конус выпуклых компактов: Y – банахово пространство;

$$Y_K = \{C \subset Y\},\ C \neq \varnothing; \quad \text{(CL) выполнен.}$$

$C_1 + C_2 = \{y_1 + y_2\},\ \lambda \cdot C = \{\lambda \cdot y\}$.

Конус выпуклых ограниченных замкнутых подмножеств:

$$Y_B \supset Y_K.$$

$$(B_1 \oplus B_2 = \overline{B_1 + B_2}).$$

Здесь закон сокращения (CL), вообще говоря, не выполняется. Отметим, что в конусах из рассмотренных здесь примеров обычно применяется специальная метрика — метрика Помпейю–Хаусдорфа, играющая важную роль во многих задачах негладкого анализа.

5°. **Метрика Помпейю–Хаусдорфа.** Далее Y — банахово пространство, Y_K — конус непустых выпуклых компактов из Y. Введем метрику Хаусдорфа в Y_K следующим образом $B_1, B_2 \in Y_K$;

$$h(B_1, B_2) = \max\left(h^1(B_1, B_2),\ h^2(B_1, B_2)\right);$$

$h^1(B_1, B_2) = \sup\limits_{y_2 \in B_2} d(y_2, B_1)$; $h^2(B_1, B_2) = \sup\limits_{y_1 \in B_1} d(y_1, B_2)$. Отметим, что полнота Y влечет полноту Y_K.

$$(Y - \text{полное пространство}) \;\Rightarrow\; (Y_K - \text{полный метрический конус}).$$

Приведем некоторые литературные источники, где подробно исследуется свойства метрики Хаусдорфа.

1. R. T.Rockafellar, R. J.-B. Wets, Variational Analysis, Springer, 1997.

2. Е. С. Половинкин, Многозначный анализ и дифференциальные включения, 2015.

6°. Метрика Хаусдорфа и субнорма. Отметим вначале следующее важное отличие топологий в ЛП и в выпуклом конусе: топология ЛП всегда инвариантна относительно переноса: если $U(x)$ — фильтр окрестностей точки $x \in X$, то

$$U(x) = x + U(0).$$

Однако топология ВК — полугрупповая, и здесь выполнены лишь оценка:

$$U(x) \preccurlyeq x + U(0).$$

При этом сохраняется непрерывность сложения и умножения на скаляры:

$$U(x+y) \preccurlyeq U(x) + U(y), \quad U(\lambda \cdot x) \preccurlyeq V(\lambda) \cdot U(x).$$

Метрика Хаусдорфа в нуле однородна: $h(0, \lambda c) = \lambda \cdot h(0, c)$; поэтому мы свяжем с ней удобное в дальнейшем понятие *субнормы*:

$$\|C\| = \sup_{y \in C} \|y\| = h(C, \{0\}).$$

$$(C \xrightarrow{h} \{0\}) \Leftrightarrow (\|C\| \to 0);$$

однако

$$(C \xrightarrow{h} \{C_0\}) \Leftrightarrow (h(C, C_0) \to 0) \not\Rightarrow (C = C_0 + D,\ \|D\| \to 0));$$

$\|C\|$ может порождать и другие сублинейные топологии.

7°. Метрика Хаусдорфа и субпределы. Отметим, что метрику Хаусдорфа можно рассматривать и в более обширном конусе Y_B, где Y — метрическое пространство. Используя это обстоятельство, мы введем понятие многозначного *субпредела* для отображения из банахова пространства в метрическое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть T – метрическое пространство, Y – банахово пространство, $\varphi : T \supset U(t_0) \to Y$ локально ограничено. Положим:

$$\begin{cases} \operatorname*{sublim}_{t\to t_0}\varphi(t) := \lim_{\delta\to 0}(\overline{co}\varphi(\dot{U}_\delta(t_0)) = C_0 \qquad (\text{в } (Y_B, h)); \\ \text{если } C_0 \in Y_K. \end{cases}$$

Здесь $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества; $\lim\limits_{\delta\to 0}$ — предел в метрике Хаусдорфа в Y_B, однако при дополнительном условии компактности предельного множества: $C_0 \in Y_K$. Особенно просто субпредел выражается для функционалов.

ПРИМЕР 1. Пусть $\varphi : T \to \mathbb{R}$, тогда

$$\operatorname*{sublim}_{t\to t_0}\varphi(t) = \left[\varliminf_{t\to t_0}\varphi(t);\ \varlimsup_{t\to t_0}\varphi(t)\right]$$

(если пределы конечны).

8°. Метрика Хаусдорфа и суб–операторы. Сублинейные многозначные операторы с компактными выпуклыми значениями широко используются в задачах современного негладкого анализа и негладкой оптимизации. В качестве субдифференциалов такие операторы впервые были введены в работе А. Д. Иоффе:

A. D. Ioffe, Nonsmooth Analysis: Differential Calculus of Noundifferential Mappings, Trans. AMS, 266(1), 1981,1-56.(Compact-valued fan).

Приведем основное определение, распространив его на выпуклые конусы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X, Y – субнормированные конусы; $A : X \to Y_K$ – сублинейный оператор:

$$A(x_1 + x_2) \subset Ax_1 + Ax_2; \quad A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot Ax \ (\lambda \geq 0).$$

В конусе суб–операторов можно ввести *субнорму*:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|.$$

$$(A \text{ ограничен }) :\Leftrightarrow (\|A\| < \infty).$$

$L_{sub}(X; Y_K)$ — конус ограниченных сублинейных операторов $A : X \to Y_K$.

Мы распространим теперь понятие метрики Хаусдорфа на конус суб–операторов.

$$h(A_1, A_2) = \sup_{\|x\|\leq 1} h(A_1x, A_2x);\ \|A\| = h(A, 0).$$

Отметим, что введенная выше субнорма суб–оператора в точности порождается данной версией метрики Хаусдорфа, аналогично субнорме выпуклого компакта (см. п. 6°).

Теорема о полноте конуса суб–операторов также вполне аналогична классической теореме о полноте конуса L_K (п. 6°).

9°. Суб-операторы и суб–непрерывность. Как известно, для классических линейных операторов в банаховых пространствах свойства ограниченности по норме и непрерывности равносильны. Однако для суб–операторов это не так: из ограниченности по субнорме следует лишь непрерывность в нуле.

Для глобального описания топологической структуры суб–оператора мы используем широко применяемое в негладком анализе понятие «внешней полунепрерывности», или «субнепрерывности», см. следующий источник.

A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar: Implicit Functions and Solution Mappings, Ch. 3B, Springer, 2009.

По-видимому, с полугрупповыми структурами субнепрерывность многозначных отображений согласуется лучше, чем классическая непрерывность.

1. Субнепрерывность

$$(A \in C_{sub}(x_0)) :\Leftrightarrow [(x \to x_0) \Rightarrow (h^1(Ax, Ax_0) \to 0)] \Leftrightarrow$$

$$[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (x \in U_\delta(x_0)) \Rightarrow (Ax \subset V_\varepsilon(Ax_0))] .$$

2. Случай суб–функционалов: $F : X \to \mathbb{R}_K$:

$$f(x) = [\underline{f}(x); \ \overline{f}(x)];$$

$\overline{f}$ – сублинейный, $\underline{f}$ – надлинейный; $(f \in C_{sub}) \Leftrightarrow (\overline{f}$ полунепрерывен сверху, $\underline{f}$ полунепрерывен снизу).

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X, Y – банаховы конусы, $A : X \to Y_K$ – суб-оператор. Следующие условия равносильны:*

(i) $\|A\| < \infty$;
(ii) *A непрерывен в нуле;*
(iii) *A равномерно субнепрерывен на X.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y_K$ – суб-оператор. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *A равномерно субнепрерывен в X;*
(ii) *A равномерно непрерывен в X.*

Приведем, наконец, класс примеров субнепрерывных, но разрывных операторов.

ПРИМЕР 2. Пусть $(X,\ \|\cdot\|_0)$ — произвольное банахово пространство, $dimX = \infty$;

$$(X,\ \|\cdot\|_0) \overset{\approx}{\hookrightarrow} (X,\ \|\cdot\|_1);$$

$$Ax = [0;1]\cdot\|x\|_1\ ;\ A:\ X \to \mathbb{R}_K.$$

10°. Компактные субдифференциалы: определение, критерий. Напомним, что понятие субдифференциала от выпуклого функционала, как множества всех субградиентов в данной точке, возникло в работах Рокафеллара и Моро в районе 1960 г. Примерно около 1980 г. возникло данное Кларком простое и эффективное обобщение — субдифференциал Кларка, который сразу нашел обширные применения в задачах негладкой оптимизации. Не останавливаясь на потоке работ с различными обобщениями, мы отметим здесь известную работу А. Д. Иоффе от 1981 и введенное им понятие «внешней предпроизводной» (onter prederivative). Иоффе, как уже отмечалось выше, первым включил в инструментарий негладкой оптимизации суб–операторы (Ioffe fun), однако в определении предпроизводной он, из соображений расширения класса базовых объектов, убрал требование субаддитивности (оставив только однородной), что не позволило развить субдифференциальное исчисление высших порядков.

В работе 2007 г. мы, фактически развивая идею Иоффе, ввели компактный субдифференциал именно как субаддитивный и однородный компактнозначный оператор, что и создало необходимую базу для построения развитого субдифференциального исчисления как первого, так и высших порядков, в последующие годы.

Приведем необходимые формулировки в случае первого порядка, как для отображения в банаховых пространствах, так и в банаховых конусах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Компактный субдифференциал
$(f: X \supset U(x) \to\ Y,\ h \in\ X)$:

$$\partial_{sub} f(x,h) = \underset{t\to+0}{\text{sublim}} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \quad \text{(по направлению)}$$

$$\|\partial_{sub} f(x)\| < +\infty;\ (\rightrightarrows\ \text{по}\ \|h\| \le 1);\ \text{(сильный)}$$

Критерий:

$$f(x+h) - f(x) \in A\cdot h + o(\|h\|)\ (A \in L_{sub}(X;Y_K)).$$

Переход в конусы:

$$\partial_{sub} f(x,h) = \underset{t\to+0}{\text{sublim}}\ \overline{co}\{y \in Y | f(x+th) = f(x) + t\cdot y\};$$

$$f(x+h) \in f(x) + A\cdot h + o(\|h\|).$$

11°. Компактные субдифференциалы: вычисление. Прямое вычисление компактного субдифференциала через многозначный субпредел, за пределами функционалов и отображений конечного ранга, представляет непростую задачу. Здесь мы рассмотрим подход, сводящий задачу к вычислению обычных частичных пределов разностных отношений, т. е. к производным числам Дини.

1. Производные числа Дини по направлению:

$$\partial_{part} f(x,h) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x + t_k \cdot h) - f(x)}{t_k} \ (t_k \to +0).$$

2. Основная формула: (распространяется на пространства Фреше)

$$\partial_{sub} f(x,h) = \overline{co}\{\partial_{part} f(x,h)\}.$$

3. Случай функционалов $(f : X \to \mathbb{R})$:

$$\partial_{sub} f(x,h) = [\underline{\partial f}(x,h);\ \overline{\partial f}(x,h)].$$

В конечномерных случаях вычисление либо оценка (точная по проекциям) компактных субдифференциалов не представляет особого затруднения.

$$(i) \qquad (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \qquad \partial_{sub} f(x,h) = \left[\underline{\frac{df}{dx}}(x); \overline{\frac{df}{dx}}(x)\right];$$

$$(ii) \qquad (f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \qquad \partial_{sub} f(x) \cdot h \subset \sum_{j=1}^{n} \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(x);\ \overline{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(x)\right] \cdot h_j;$$

$$(iii) \qquad (f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m) \qquad \partial_{sub} f(x) \cdot h \subset \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left[\underline{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}}(x); \overline{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}}(x)\right] \cdot h_j \right) :=$$

$$\text{(субматрица Якоби)} =: \left(\left[\underline{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}}(x);\ \overline{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}}(x)\right] \right)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}} \cdot h\ .$$

Последние результаты, в применении к интегранту вариационного функционала, позволяют получить и оценку первого субдифференциала (первой субвариации) основного вариационного функционала.

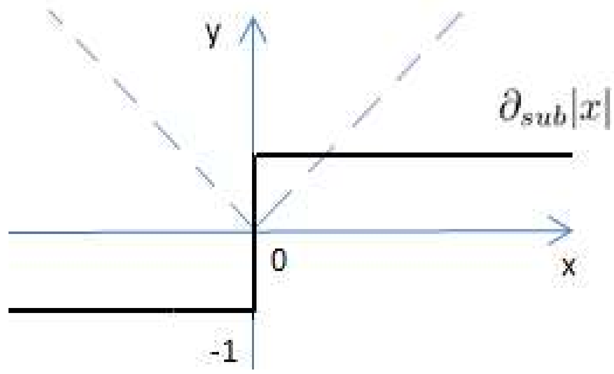
Пусть $\Phi(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y,y')dx$. Тогда

$$\partial_{sub} \Phi(y,h) \subset \left[\int_a^b (\underline{\frac{\partial f}{\partial y}} h + \underline{\frac{\partial f}{\partial y'}} h')dx;\ \int_a^b (\overline{\frac{\partial f}{\partial y}} h + \overline{\frac{\partial f}{\partial y'}} h')dx \right].$$

12°. Компактные субдифференциалы: простейшие примеры.

ПРИМЕР 3.

$$f(x) = |x| : \quad \partial_{sub} f(0) = [-1; 1].$$



ПРИМЕР 4. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\partial_{sub} f(x) = \begin{cases} f'(x), & x \neq 0; \\ [-1; 1], & x = 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 5. Пусть

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Тогда

$$\partial_{sub} f(x) h \subset \sum_{j=1}^{n} [-1; 1] \cdot h_j.$$

ПРИМЕР 6. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x, y, y')| dx \quad (f \in C^1).$$

Тогда

$$\partial_{sub} \Phi(y) h \subset \int\limits_{(f(x,y,y') \neq 0)} sign(f(x, y, y')) \cdot (\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h') dx +$$

$$+[-1; 1] \cdot \int\limits_{(f(x,y,y')=0)} (\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h') dx.$$

Рассмотрим частный случай примера 6.

ПРИМЕР 7. Пусть $mes(f(x,y,y'))=0$. Тогда

$$\partial_{sub}\Phi(y)h=\partial\Phi(y,h)=\int_a^b sign(f(x,y,y'))\cdot(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial y'}h')dx.$$

ПРИМЕР 8. Пусть $\Phi(y)=\displaystyle\int_a^b |y'-y|dx$. Тогда

$$\partial_{sub}\Phi(y)h\subset\int\limits_{(y'-y\neq 0)} sign(y'-y)\cdot(h'-h)dx+[-1;1]\cdot\int\limits_{(y'-y=0)}(h'-h)dx.$$

В случае $mes(y'-y=0)=0$:

$$\partial_{sub}\Phi(y,h)=\partial\Phi(y,h)=\int_a^b sign(y'-y)\cdot(h'-h)dx.$$

13°. Субдифференциалы второго и высших порядков (индуктивный подход). Классическое определение дифференциалов Фреше второго и высших порядков основано на канонической изометрии пространства линейных операторов «тензорного» типа и пространства билинейных операторов «обычного» типа. Это позволяет рассматривать дифференциалы высших порядков как полилинейные операторы «обычного» типа и строить развитое дифференциальное исчисление высшего порядка.

Следуя этому образцу, мы устанавливаем каноническую изометрию конуса сублинейных операторов «тензорного» типа и конуса бисублинейных операторов «обычного» типа, что позволяет построить развитое субдифференциальное исчисление высшего порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $B_{sub}(X_1,X_2;Y_K)$ – конус бисублинейных ограниченных операторов; тогда

$$L_{sub}(X_1;L_{sub}(X_2;Y_K)_K)\cong B_{sub}(X_1,X_2;Y_K).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $f:X\supset U(x)\to Y$ сильно субдифференцируем в $U(x)$; рассмотрим $\partial_{sub}f:X\supset U(x)\to L_{sub}(X;Y_K)$ и положим:

$$\partial^2_{sub}f(x)(h,k):=(\partial_{sub}(\partial_{sub}f)(x)h)k.$$

Аналогично,

$$\partial^n_{sub}f(x)(h_1,\ldots,h_n):=(\partial_{sub}(\partial^{n-1}_{sub}f)(x)(h_1,\ldots,h_{n-1})h_n.$$

$$\left(f\in C^{n-k}(x)\right)\Rightarrow\left(\partial^n_{sub}f(x)(h)^n=\partial^k_{sub}\left(f^{(n-k)}(x)(h)^{n-k}\right)(h)^k\right).$$

14°. Субдифференциалы второго порядка — случай функционалов. Случай функционалов особенно важен для применений к экстремальным задачам, и в то же время, сравнительно прост с вычислительной точки зрения. Приведем некоторые полезные оценки.

ПРИМЕР 9. Пусть $f : X \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\partial^2_{sub} f(x)(h)^2 \subset \left[\underline{\partial^2 f}(x)(h)^2;\ \overline{\partial^2 f}(x)(h)^2\right].$$

ПРИМЕР 10. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\partial^2_{sub} f(x)(h)^2 \subset H_{sub} \cdot (h)^2,$$

где

$$H_{sub} = \left(\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x);\ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x)\right]\right)^n_{i,j=1} \text{ – "субматрица Гессе".}$$

ПРИМЕР 11. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx.$$

Тогда:

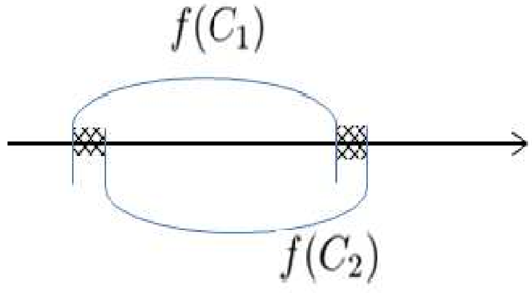
$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \left[\int_a^b (\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} h^2 + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}} hh')dx;\ \int_a^b (\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} h^2 + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}} hh')dx\right] +$$

$$+ \left[\int_a^b (\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}} h'h + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}} h'^2)dx;\ \int_a^b (\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}} h'h + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}} h'^2)dx\right].$$

15°. Обобщение метрики Хаусдорфа-Помпейю: H–равномерность. Здесь мы хотим обобщить идею метрики Хаусдорфа, переходя от классического случая выпуклых компактов в банаховом пространстве к значительно более общему случаю выпуклых компактов в выпуклом конусе, снабженном некоторой равномерной топологией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть X – выпуклый конус с равномерной сублинейной топологией, порожденной базой окружений диагонали $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, X_K – конус выпуклых компактов в X. Определим в X_K базу равномерности Хаусдорфа через окружения ΔX_K:

$$V_i = \{(C_1, C_2) |\ C_1 \subset U_i(C_2);\ C_2 \subset U_i(C_1)\}_{i \in I}.$$



ПРИМЕР 12. Пусть X – банахово пространство, $\sigma(X)$ — слабая топология в X, X_K — конус слабо компактных выпуклых подмножеств в X. Тогда предбаза H–равномерности в X_K^σ:

$$V_{f,\varepsilon} = \{(C_1, C_2) | h(f(C_1), f(C_2)) < \varepsilon\} \ (f \in X^*, \ \varepsilon > 0).$$

Покажем теперь, что в случае слабой топологии компактный субдифференциал уже не вычисляется, вообще говоря, через выпуклое замыкание множества производных числе Дини:

$$\partial^\sigma_{sub} f(x,h) \neq \overline{co}\{\partial^\sigma_{part} f(x,h)\}.$$

1. Построение: $X = \mathbb{R}$; Y — несепарабельное гильбертово пространство, порожденное ОСФ

$$\varphi_x(t) = e^{ixt} \ (0 \leq t \leq 2\pi), \ x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = x \cdot \varphi_x(\cdot); \ f : \mathbb{R} \to Y.$$

2. Вычисление $\partial_{sub} f(0)$:

$$(\forall \delta > 0) \ (\overline{co}\{\frac{f(x) - f(0)}{x} | 0 < |x| < \delta\} =$$

$$= \overline{co}\{\varphi_x(\cdot) \big| |x| < \delta\} = B_\delta \subset B_1(0) \subset Y.)$$

Отсюда:

$$(\forall \lambda \in Y^* \exists \operatorname*{sublim}_{\delta \to 0} \lambda[B_\delta]) \Rightarrow (\exists \partial^\sigma_{sub} f(0)).$$

В заключение, отметим простую связь между слабой формой условия Липшица и слабой субдифференцируемостью по направлениям.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть X, Y – банаховы пространства, $f : X \supset U(x) \to Y$. Если $f \in Lip^\sigma(x)$, то f слабо субдифференцируемо в точке x по любому направлению. В частности, если $f : \mathbb{R} \to Y$ и $f \in Lip^\sigma(x)$, то f слабо субдифференцируемо в точке x.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов И. В., Стонякин Ф.С. *Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации.* — Симферополь: ДИАЙПИ, 2016. — 320 с.

2. Орлов И. В. *Введение в сублинейный анализ.*// Соврем. мат. Фундам. направл. – 2014. – Т. 53. – С. 64–132; Journal of Mathematical Sciences, 218:4 (2016), 430 -– 502.

3. Половинкин Е. С. *Многозначный анализ и дифференциальные включения.* — М.: Физматлит, 2015. – 524 с.

4. Dontchev A. L., Rockafellar R. T. *Implicit Functions and Solution Mappings.* Ch. 3B, Springer, 2009. – 496 p.

5. Ioffe A. D. *Nonsmooth Analysis: Differential Calculus of Noundifferential Mappings.* Trans. AMS, 266(1), 1981. 1–56.

6. Rockafellar R. T., Wets R. J. B. *Variational Analysis.* — Springer, Berlin, 1997. – 736 p.