ТЕОРЕМА Г. Ш. РУБИНШТЕЙНА О РАЗМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕБЫШЁВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

7 ноября 2017 г.

1°. Рассмотрим линейную задачу чебышёвского приближения без ограничений:

$$\varphi(x) := \max_{t\in Q}\Big|\sum_{i=1}^{n} x[i]u_i(t) - f(t)\Big| \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}. \tag{1}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}$ — компактное множество, содержащее не менее $n+1$ точек, $u_1, \ldots, u_n$, f — непрерывные на Q функции.

Известно, что задача (1) имеет решение [1]. Обозначим через $X(f)$ множество всех решений. Нетрудно проверить, что $X(f)$ — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Нас интересует вопрос о размерности $X(f)$.

Напомним, что размерностью выпуклого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется максимальное число линейно независимых векторов вида $z = x_2 - x_1$, где x_1 и x_2 принадлежат Ω.

2°. Обозначим $U = (u_1, \ldots, u_n)^T$ и введём важное для дальнейшего

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Чебышёвским рангом* системы непрерывных на множестве Q функций $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ называется максимальное число r, такое, что для любых попарно различных точек $t_1, \ldots, t_r$ из Q векторы $U(t_1), \ldots, U(t_r)$ линейно независимы.

Ясно, что $r \in 0 : n$. Чебышёвский ранг равен нулю, если все функции системы $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ обращаются в ноль в некоторой точке $t_0 \in Q$. При максимальном r, $r = n$, система функций $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ называется *чебышёвской* на Q. Примером чебышёвской системы на любом отрезке $[a, b]$ является

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

система степенны́х функций $1, t, \ldots, t^{n-1}$. Это следует из свойств определителя Вандермонда.

Приведём нетривиальный пример вычисления чебышёвского ранга. Рассмотрим систему, состоящую из $n+m$ функций

$$1, t, \ldots, t^{n-1}, (t-c_1)_+^{n-1}, \ldots, (t-c_m)_+^{n-1},$$

где $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < b$ и $t_+ = \max\{0, t\}$. Покажем, что чебышёвский ранг этой системы на отрезке $[a,b]$ равен n.

Для любых попарно различных точек $t_1, \ldots, t_n$ из $[a,b]$ векторы $U(t_1), \ldots, U(t_n)$ линейно независимы за счёт первых n компонент. Вместе с тем, при $a < t_1 < \cdots < t_{n+1} < c_1$ последние m компонент векторов $U(t_j)$ равны нулю, а первые n компонент образуют линейно зависимые подвекторы. Значит, векторы $U(t_1), \ldots, U(t_{n+1})$ линейно зависимы. По определению чебышёвского ранга имеем $r = n$.

3°. Вернёмся к задаче (1) и предположим, что

$$\mu := \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) > 0. \tag{2}$$

ТЕОРЕМА Г. Ш. РУБИНШТЕЙНА. *Для размерности* $\dim X(f)$ *множества решений* $X(f)$ *задачи* (1) *справедливо неравенство*

$$\dim X(f) \leqslant n - r,$$

где r *— чебышёвский ранг системы базисных функций* $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ *на множестве* Q. *Более того, существует непрерывная на* Q *функция* $f_*(t)$, *у которой* $\dim X(f_*) = n - r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введём обозначения

$$P(x,t) = \sum_{i=1}^{n} x[i] u_i(t), \qquad F(x,t) = P(x,t) - f(t),$$

$$Q(x) = \Big\{ t \in Q \mid \big|F(x,t)\big| = \varphi(x) \Big\}, \qquad \xi(x,t) = \operatorname{sign} F(x,t).$$

В силу (2), $\xi(x,t) = \pm 1$ при $t \in Q(x)$. В этих обозначениях задача (1) принимает вид

$$\varphi(x) := \max_{t \in Q} \Big| F(x,t) \Big| \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}. \tag{3}$$

Напомним формулировку критерия оптимальности. Для того чтобы вектор $x^* \in \mathbb{R}^n$ был решением задачи (3), необходимо и достаточно, чтобы нашлись точки $t_0, t_1, \ldots, t_p$ из $Q(x^*)$ и положительные числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$, в сумме равные единице, такие, что

$$\sum_{j=0}^{p} \alpha_j \xi_j^* U(t_j) = \mathbb{O}, \tag{4}$$

где $\xi_j^* = \xi(x^*, t_j)$ и векторы $\xi_0^* U(t_0), \xi_1^* U(t_1), \ldots, \xi_p^* U(t_p)$ аффинно независимы.

В силу аффинной независимости $p \leqslant n$. В то же время из (4) следует, что векторы $U(t_j)$ линейно зависимы. По определению чебышёвского ранга системы функций $u_1, \ldots, u_n$ получаем $p \geqslant r$.

Возьмём два решения x^* и $\hat{x}$ задачи (3). Имеем $\varphi(x^*) = \varphi(\hat{x}) = \mu$ и

$$\xi_j^* F(\hat{x}, t_j) \leqslant \bigl|F(\hat{x}, t_j)\bigr| \leqslant \mu = \bigl|F(x^*, t_j)\bigr| = \xi_j^* F(x^*, t_j).$$

Значит,

$$\xi_j^* \bigl[P(x^*, t_j) - P(\hat{x}, t_j)\bigr] \geqslant 0, \quad j \in 0 : p.$$

Отметим, что

$$P(x, t) = \bigl\langle x, U(t) \bigr\rangle.$$

Это позволяет переписать последнее неравенство в виде

$$\xi_j^* \bigl\langle x^* - \hat{x}, U(t_j) \bigr\rangle \geqslant 0, \quad j \in 0 : p. \tag{5}$$

Теперь умножим равенство (4) скалярно на $x^* - \hat{x}$. Получим

$$\sum_{j=0}^{p} \alpha_j \xi_j^* \bigl\langle U(t_j), x^* - \hat{x} \bigr\rangle = 0. \tag{6}$$

На основании (5) и (6) заключаем, что

$$\alpha_j \xi_j^* \bigl\langle U(t_j), x^* - \hat{x} \bigr\rangle = 0, \quad j \in 0 : p.$$

Так как $\alpha_j \xi_j^* \neq 0$, то

$$\bigl\langle U(t_j), x^* - \hat{x} \bigr\rangle = 0, \quad j \in 0 : p. \tag{7}$$

Обозначим через A матрицу со столбцами $U(t_0), U(t_1), \ldots, U(t_p)$. Как отмечалось выше, $r \leqslant p \leqslant n$, поэтому ранг матрицы A не меньше r, $\operatorname{rank} A \geqslant r$. Следовательно, и $\operatorname{rank} A^T \geqslant r$.

Условие (7) означает, что разность z двух произвольных решений задачи (3) удовлетворяет однородной системе уравнений

$$A^T z = \mathbb{O}. \tag{8}$$

Система (8) определяет подпространство L пространства $\mathbb{R}^n$. Из линейной алгебры известно, что размерность этого подпространства вычисляется по формуле

$$\dim L = n - \operatorname{rank} A^T.$$

Вместе с тем, по определению размерности множества $X(f)$ имеем $\dim X(f) = \dim L$. Объединив отмеченные факты, придём к неравенству

$$\dim X(f) \leqslant n - r.$$

Первая часть теоремы Г. Ш. Рубинштейна доказана.

Построим функцию f_*, у которой $\dim X(f_*) = n - r$. По определению чебышёвского ранга, на множестве Q найдутся точки $t_0, t_1, \ldots, t_r$, такие, что векторы $U(t_0), U(t_1), \ldots, U(t_r)$ линейно зависимы. Это значит, что при некоторых $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r$, не равных нулю одновременно, выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{r} \beta_j U(t_j) = \mathbb{O}. \tag{9}$$

На самом деле, здесь все β_j отличны от нуля (иначе получим противоречие с тем, что чебышёвский ранг системы функций $u_1, \ldots, u_n$ равен r). Обозначим

$$\xi_j = \operatorname{sign} \beta_j, \quad \alpha_j = |\beta_j| / \sum_{k=0}^{r} |\beta_k|$$

и перепишем равенство (5) в эквивалентном виде

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j \xi_j U(t_j) = \mathbb{O}. \tag{10}$$

В таком представлении нуля все α_j положительны и в сумме равны единице, а векторы $\xi_j U(t_j)$ аффинно независимы. Аффинная независимость проверяется «от противного». Допустив, что векторы $\xi_j U(t_j)$ аффинно зависимы, с помощью стандартного приёма придём к новому представлению нуля с меньшим числом слагаемых в левой части. А это снова противоречит определению числа r.

Отметим, что система линейных однородных уравнений

$$\big\langle U(t_j), z \big\rangle = 0, \quad j \in 0 : r,$$

имеет $s = n - r$ линейно независимых решений. Обозначим их $x_1, \ldots, x_s$. Решением этой системы является также вектор $x_0 = \mathbb{O}$. В других обозначениях получаем

$$P(x_k, t_j) = 0, \quad j \in 0 : r,\ k \in 0 : s. \tag{11}$$

Введём функцию (см. рис.)

$$\sigma(t) = \begin{cases} \xi_0 \quad \text{при} \quad t \leqslant t_0; \\ \xi_{j-1} + \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(t - t_{j-1}) \quad \text{при} \quad t \in [t_{j-1}, t_j],\ j \in 1 : r; \\ \xi_r \quad \text{при} \quad t \geqslant t_r. \end{cases}$$

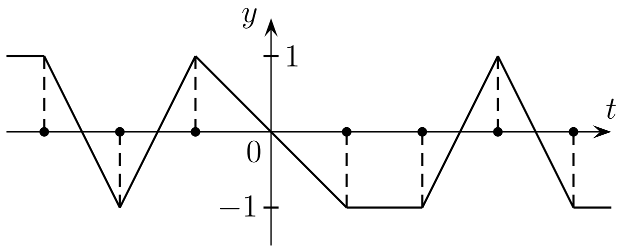

Рис. График функции $y = \sigma(t)$

Ясно, что $\sigma(t_j) = \xi_j$ при $j \in 0 : r$ и $\big|\sigma(t)\big| \leqslant 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Наконец, положим

$$f_*(t) = -\sigma(t)\Big(\gamma - \sum_{k=1}^{s}\big|P(x_k, t)\big|\Big),$$

где $\gamma > \max\limits_{t\in Q} \sum_{k=1}^{s}\big|P(x_k, t)\big|$. Покажем, что $\dim X(f_*) = s = n - r$.

Для любого вектора z вида

$$z = \sum_{k=1}^{s} \varepsilon_k x_k \tag{12}$$

с $|\varepsilon_k| \leqslant 1$ при всех $k \in 1 : s$ в силу (11) имеем

$$P(z, t_j) = \sum_{k=1}^{s} \varepsilon_k P(x_k, t_j) = 0,$$
$$P(z, t_j) - f_*(t_j) = \xi_j\gamma, \quad j \in 0 : r. \tag{13}$$

Далее

$$\big|P(z, t)\big| \leqslant \sum_{k=1}^{s}\big|P(x_k, t)\big|,$$

поэтому при всех $t \in Q$

$$\big|P(z, t) - f_*(t)\big| \leqslant \big|P(z, t)\big| + \big|f_*(t)\big| \leqslant \gamma. \tag{14}$$

На основании (13) и (14) заключаем, что

$$\max_{t\in Q}\big|P(z, t) - f_*(t)\big| = \gamma;$$
$$\big|P(z, t_j) - f_*(t_j)\big| = \gamma, \quad j \in 0 : r;$$
$$\operatorname{sign}\big[P(z, t_j) - f_*(t_j)\big] = \xi_j, \quad j \in 0 : r.$$

Вернёмся к равенству (10). Теперь оно соответствует критерию оптимальности (4) вектора z вида (12) в задаче наилучшего приближения

$$\max_{t\in Q}\bigl|P(x,t)-f_*(t)\bigr|\to\min_{x\in\mathbb{R}^n}.$$

Значит, все векторы z вида (12) являются решениями этой задачи. В частности, решениями будут векторы $x_0,x_1,\ldots,x_s$. Отметим, что разности x_k-x_0, $k\in 1:s$, линейно независимы. По определению размерности выпуклого множества, $\dim X(f_*)\geqslant s=n-r$. Обраное неравенство $\dim X(f_*)\leqslant n-r$ справедливо в общем случае. Объединив эти неравенства, получим $\dim X(f_*)=n-r$.

Теорема доказана. □

4°. Если система базисных функций $u_1,\ldots,u_n$ является чебышёвской на Q, то есть $r=n$, то по теореме Г. Ш. Рубинштейна $\dim X(f)=0$. Это значит, что задача наилучшего приближения (1) имеет единственное решение для любой непрерывной на Q функции f. На самом деле, справедлив более сильный результат.

ТЕОРЕМА О СИЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ. *Пусть система базисных функций $u_1,\ldots,u_n$ является чебышёвской на Q и x_* — решение задачи* (1). *Тогда существует число $\eta>0$, такое, что*

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(x_*)+\eta\|x-x_*\|\quad\forall x\in\mathbb{R}^n, \tag{15}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Доказательство. В условиях теоремы критерий оптимальности (4) для решения x_* задачи (1) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\xi_j^*U(t_j)=\mathbb{O}.$$

Умножим это равенство скалярно на произвольный единичный вектор $g\in\mathbb{R}^n$. Получим

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\xi_j^*\bigl\langle U(t_j),g\bigr\rangle=0. \tag{16}$$

Покажем, что

$$\psi(g):=\max_{j\in 0:n}\xi_j^*\bigl\langle U(t_j),g\bigr\rangle>0. \tag{17}$$

В противном случае согласно (16) и положительности всех α_j

$$\xi_j^*\bigl\langle U(t_j),g\bigr\rangle=0,\quad j\in 0:n,$$

и как следствие

$$\big\langle U(t_j), g \big\rangle = 0, \quad j \in 0:n. \tag{18}$$

Рассмотрим (18) как систему линейных однородных уравнений относительно g. У неё n переменных и ранг её матрицы тоже равен n. Значит, система (18) имеет единственное (нулевое) решение. Это противоречит условию $\|g\| = 1$. Справедливость неравенства (17) установлена.

Функция $\psi(g)$ непрерывна на единичной сфере S. По теореме Вейерштрасса она достигает минимального на S значения, поэтому

$$\eta := \min_{\|g\|=1} \max_{j\in 0:n} \big\langle \xi^* U(t_j), g \big\rangle > 0.$$

Проверим, что константа η — требуемая.

При $x = x_*$ неравенство (15) тривиально. Возьмём $x \neq x_*$. В силу свойств точек t_j имеем

$$\varphi(x) - \varphi(x_*) \geqslant \max_{j\in 0:n} \big[\xi_j^* F(x, t_j) - \varphi(x_*)\big] =$$
$$= \max_{j\in 0:n} \xi_j^* \big[F(x, t_j) - F(x_*, t_j)\big] = \max_{j\in 0:n} \xi_j^* \big\langle U(t_j), x - x_* \big\rangle =$$
$$= \|x - x_*\| \max_{j\in 0:n} \Big\langle \xi_j^* U(t_j), \frac{x - x_*}{\|x - x_*\|} \Big\rangle \geqslant \eta \|x - x_*\|.$$

Теорема доказана. □

Число η называется *константой сильной единственности.*

5°. Доказательства, приведённые в данном докладе, представляют собой усовершенствованный вариант доказательств из книги [1, с. 104–108]. В статье [2] получено обобщение теоремы Г. Ш. Рубинштейна на случай наилучшего дробно-рационального приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

2. Белых В. М., Малозёмов В. Н. *О размерности множества решений задачи наилучшей дробно-рациональной аппроксимации* // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1979. Вып. 1 (№ 1). С. 21–27.