ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВАРИАНТЫ НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА*

В. Г. Малинов — vgmalinov@mail.ru

Н. А. Соловьёва — vinyo@mail.ru

2 марта 2017 г.

Аннотация. В докладе приводятся параметрические варианты неравенства треугольника в евклидовом пространстве.

1°. Через E^n будем обозначать n-мерное евклидово пространство.

ЛЕММА 1. *Для любых* $u, v, w \in E^n$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *верно двойное неравенство*

$$(1-\varepsilon)\|u-v\|^2 + (1-\tfrac{1}{\varepsilon})\|v-w\|^2 \leqslant \|u-w\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\|u-v\|^2 + (1+\tfrac{1}{\varepsilon})\|v-w\|^2.$$

Доказательство. Запишем

$$\|u-w\|^2 = \|u-v\|^2 + 2\langle u-v, v-w\rangle + \|v-w\|^2. \tag{1}$$

Заметим, что для любых вещественных чисел a, b и любого положительного ε верно

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\,|a| - \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|b|\right)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$2|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \tfrac{1}{\varepsilon} b^2.$$

С учётом последнего неравенства получим

$$2\Big|\langle u-v, v-w\rangle\Big| \leqslant 2\|u-v\|\|v-w\| \leqslant \varepsilon\|u-v\|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}\|v-w\|^2. \tag{2}$$

На основании (1) и (2) приходим к требуемому результату. □

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Рассмотрим произвольные $u, v, w \in E^n$. Обозначим $\ell_1 = \|u - v\|^2$, $\ell_2 = \|u - w\|^2$, $\ell_3 = \|v - w\|^2$, $s = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$. Предположим, что ℓ_2, $\ell_3 > 0$. Рассмотрим квадратное уравнение

$$\ell_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + \ell_3 = 0. \tag{3}$$

Заметим, что уравнение (3) имеет вещественные корни, так как дискриминант этого уравнения неотрицателен. В самом деле,

$$s^2 - 4\ell_2\ell_3 = (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)^2 - 4\ell_2\ell_3 = \ell_1^2 + 2\ell_1\ell_2 + 2\ell_1\ell_3 + (\ell_2 - \ell_3)^2 \geqslant 0.$$

Корни уравнения (3) имеют вид

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{s \mp \sqrt{s^2 - 4\ell_2\ell_3}}{2\ell_2}.$$

Ясно, что $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$.

ЛЕММА 2. *Для любого ε из отрезка $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ верно неравенство*

$$\|u - v\|^2 \geqslant (\varepsilon - 1)\|u - w\|^2 - (1 - \tfrac{1}{\varepsilon})\|v - w\|^2. \tag{4}$$

Доказательство. Перепишем (4) в терминах ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3:

$$\ell_1 \geqslant (\varepsilon - 1)\ell_2 - (1 - \tfrac{1}{\varepsilon})\ell_3.$$

Приведя подобные, получим неравенство

$$s \geqslant \varepsilon\ell_2 + \tfrac{1}{\varepsilon}\ell_3.$$

Умножим обе его части на ε (любое ε из отрезка $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ положительно). Имеем

$$\ell_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + \ell_3 \leqslant 0. \tag{5}$$

Неравенство (5) выполняется, так как ε расположено между корнями ε_1 и ε_2 квадратного уравнения (3) и $\ell_2 > 0$. Значит, выполняется и неравенство (4). $\square$

Замечание 1. Если $\ell_3 = 0$, а $\ell_2 > 0$, то $\varepsilon_1 = 0$. Тогда неравенство (4) выполняется при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$, где $\varepsilon_2 = \frac{s}{\ell_2}$.

Замечание 2. Если $\ell_1 = 0$, а $\ell_2 = \ell_3$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. В этом случае неравенство (4) становится тривиальным.

3°. Посмотрим, как зависят границы ε_1, ε_2 «допустимого» отрезка в лемме 2 от взаимного отношения величин $\|u-v\|$, $\|u-w\|$, $\|v-w\|$. Будем предполагать, что для точек u, v, w выполняется неравенство треугольника.

Вначале ограничимся случаем, когда

$$\|u-w\| = \|u-v\| = \alpha\|v-w\|. \tag{6}$$

Для выполнения неравенства треугольника потребуем, чтобы $2\alpha \geqslant 1$, то есть $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. Имеем

$$\ell_1 = \ell_2 = \alpha^2\ell_3, \quad s = (2\alpha^2+1)\ell_3.$$

Вычислим границы ε_1, ε_2 отрезка, на котором выполняется неравенство (4):

$$\varepsilon_{1,2}(\alpha) = \frac{(2\alpha^2+1) \mp \sqrt{4\alpha^4+1}}{2\alpha^2}. \tag{7}$$

Обозначим через $L(\alpha)$ длину отрезка $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$:

$$L(\alpha) = \sqrt{4 + \tfrac{1}{\alpha^4}}\,. \tag{8}$$

Запишем производную функции $L(\alpha)$:

$$L'(\alpha) = \frac{-2}{\alpha^3\sqrt{4\alpha^4+1}}.$$

Ясно, что функция $L(\alpha)$ убывает на полуоси $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

Приведём несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим вырожденный случай, когда точки u, v, w расположены на одной прямой:

$$\|u-w\| = \|u-v\| = \tfrac{1}{2}\|v-w\|.$$

Вычислим границы «допустимого» отрезка (см. (7)):

$$\varepsilon_{1,2}(\tfrac{1}{2}) = 3 \mp \sqrt{5}.$$

Получим $\varepsilon_1 \approx 0.76$, $\varepsilon_2 \approx 5.24$. Неравенство (4) будет выполняться, например, при любом ε из отрезка $[0.8, 5.2]$. По формуле (8) найдём длину $L(\frac{1}{2})$ отрезка $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$:

$$L(\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{5} \approx 4.47.$$

ПРИМЕР 2. Пусть

$$\|u-w\| = \|u-v\| = \tfrac{3}{5}\|v-w\|,$$

то есть $\alpha = \frac{3}{5}$. Запишем выражения (7) для границ «допустимого» отрезка:

$$\varepsilon_{1,2}(\tfrac{3}{5}) = \frac{43 \mp \sqrt{949}}{18}.$$

Вычислим $\varepsilon_1 \approx 0.68$, $\varepsilon_2 \approx 4.10$. Найдём (см. (8)) длину отрезка $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$:

$$L(\tfrac{3}{5}) = \frac{\sqrt{949}}{9} \approx 3.42.$$

ПРИМЕР 3. Пусть

$$\|u-w\| = \|u-v\| = \tfrac{2}{3}\|v-w\|,$$

то есть $\alpha = \frac{2}{3}$. Выражения (7) для границ «допустимого» отрезка будут выглядеть так:

$$\varepsilon_{1,2}(\tfrac{2}{3}) = \frac{17 \mp \sqrt{145}}{8}.$$

Вычислим $\varepsilon_1 \approx 0.62$, $\varepsilon_2 \approx 3.63$. По формуле (8) найдём длину отрезка $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$:

$$L(\tfrac{2}{3}) = \frac{\sqrt{145}}{4} \approx 3.01.$$

Примеры 1, 2, 3 иллюстрируют случай, когда для сторон треугольника с вершинами u, v, w выполняется соотношение (6). Приведём примеры с другим соотношением сторон треугольника.

ПРИМЕР 4. Пусть

$$\|u-v\| = \tfrac{2}{5}\|v-w\|, \quad \|u-w\| = \tfrac{4}{5}\|v-w\|.$$

В этом случае $\ell_1 = \frac{16}{25}\ell_3$, $\ell_2 = \frac{4}{25}\ell_3$, $s = \frac{45}{25}\ell_3$. Границы «допустимого» отрезка будут иметь вид

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{45 \mp \sqrt{1625}}{8}.$$

Вычислим $\varepsilon_1 \approx 0.59$, $\varepsilon_2 \approx 10.66$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \approx 10.08$.

ПРИМЕР 5. Если принять

$$\|u-v\| = \tfrac{3}{5}\|v-w\|, \quad \|u-w\| = \|v-w\|,$$

то $\ell_1 = \frac{16}{25}\ell_3$, $\ell_2 = \ell_3$, $s = \frac{66}{25}\ell_3$. Запишем выражения для границ «допустимого» отрезка:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{66 \mp \sqrt{1856}}{50}.$$

Вычислим $\varepsilon_1 \approx 0.46$, $\varepsilon_2 \approx 2.18$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \approx 1.72$.