О МНОГОЧЛЕНАХ БЕРНШТЕЙНА*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

17 сентября 2019 г.

Памяти В. С. Виденского

(1922–2015)

1°. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция. При каждом натуральном n сопоставим ей многочлен

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$

Эти замечательные многочлены ввёл в рассмотрение С. Н. Бернштейн в короткой заметке 1912 года [1]. Опираясь на элементарные результаты из теории вероятностей, он доказал, что последовательность многочленов $\{B_n(f;x)\}$ при $n \to \infty$ сходится к $f(x)$ равномерно на отрезке $[0,1]$.

В. С. Виденский (ученик С. Н. Бернштейна) посвятил многочленам Бернштейна и их обобщениям две небольшие книги [2, 3]. В частности, он нашёл редкое по красоте доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ удовлетворяет условию Липшица с константой M, то при всех $n \geqslant 2$ и всех $x \in [0,1]$ справедлива оценка*

$$\bigl|B_n(f;x) - f(x)\bigr| \leqslant M \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}. \tag{2}$$

Ниже приводится немного усовершенствованный вариант доказательства В. С. Виденского.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Обозначим
$$p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$
и введём для многочленов $p_{nk}(x)$, $k \in 0:n$, производящую функцию
$$G(x,y) := \big(xy + (1-x)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) y^k. \tag{3}$$
Вычислим частные производные
$$G'_y(x,y) = nx\big(xy + (1-x)\big)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k p_{nk}(x) y^{k-1},$$
$$G''_{yy}(x,y) = n(n-1)x^2\big(xy + (1-x)\big)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) p_{nk}(x) y^{k-2}.$$
При $y = 1$ получим
$$\sum_{k=0}^{n} k p_{nk}(x) = nx, \tag{4}$$
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) p_{nk}(x) = n(n-1)x^2. \tag{5}$$
Покажем, что
$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{k}{n} - x\Big)^2 p_{nk}(x) = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{6}$$
Сложив (4) и (5), придём к формуле
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 p_{nk}(x) = n(n-1)x^2 + nx.$$
Отметим также, что из (3) при $y = 1$ следует тождество
$$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \equiv 1. \tag{7}$$
Теперь имеем
$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{k}{n} - x\Big)^2 p_{nk}(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 p_{nk}(x) - \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^{n} k p_{nk}(x) + x^2 \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) =$$
$$= \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)x^2 + \frac{1}{n}x - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$
Равенство (6) установлено.

Переходим к оценке (2). В силу (7),

$$B_n(f;x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \bigl[f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\bigr] p_{nk}(x).$$

Напомним, что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[0,1]$ условию Липшица с константой M. Приняв во внимание неотрицательность многочленов $p_{nk}(x)$ на $[0,1]$, запишем

$$\bigl|B_n(f;x) - f(x)\bigr| \leqslant M \sum_{k=0}^{n} \Bigl(\bigl|\tfrac{k}{n} - x\bigr| \sqrt{p_{nk}(x)}\Bigr)\bigl(\sqrt{p_{nk}(x)}\bigr).$$

По неравенству Коши-Буняковского получаем

$$\bigl|B_n(f;x) - f(x)\bigr| \leqslant M \Bigl\{\sum_{k=0}^{n} \bigl(\tfrac{k}{n} - x\bigr)^2 p_{nk}(x)\Bigr\}^{1/2}.$$

Теперь (2) следует из (6).

Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Непосредственно проверяется, что неравенство (2) справедливо и при $n = 1$.

3°. Возьмём конкретную функцию $f_0(x) = |2x - 1|$. На отрезке $[0,1]$ она удовлетворяет условию Липшица с константой $M = 2$. По теореме 1 имеем

$$\max_{x\in[0,1]} \bigl|f_0(x) - B_n(f_0;x)\bigr| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Отображение $y = \frac{1}{2}(x+1)$ переводит отрезок $[-1,1]$ в $[0,1]$. Поэтому

$$\max_{x\in[-1,1]} \bigl|f_0(y) - B_n(f_0;y)\bigr| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{8}$$

Отметим, что $f_0(y) = |x|$. Обозначим $Q_n(x) = B_n\bigl(f_0; \frac{1}{2}(x+1)\bigr)$. Тогда неравенство (8) примет вид

$$\max_{x\in[-1,1]} \bigl||x| - Q_n(x)\bigr| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В частности, можно утверждать, что последовательность многочленов $\bigl\{Q_n(x)\bigr\}$ при $n \to \infty$ сходится к $|x|$ равномерно на отрезке $[-1,1]$.

Введём величину наилучшего приближения

$$E_n = \min \max_{x\in[-1,1]} \bigl||x| - P_n(x)\bigr|,$$

где минимум берётся по всем многочленам $P_n(x)$ степени не выше n. С помощью тонких методов анализа С. Н. Бернштейн в работе [4] доказал, что при больших n выполняется неравенство

$$E_{2n} < \frac{0.286}{2n}$$

и что последовательность $\{2nE_{2n}\}$ при $n \to \infty$ имеет конечный предел.

4°. Вернёмся к теореме 1 и с её помощью докажем теорему Бернштейна.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой непрерывной на отрезке* $[0,1]$ *функции* $f(x)$ *последовательность* $\big\{B_n(f;x)\big\}$ *при* $n \to \infty$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно по* $x \in [0,1]$.

Доказательство. Воспользуемся промежуточной аппроксимацией функции $f(x)$ непрерывными ломаными $L_m(x)$, интерполирующими $f(x)$ в узлах $x_k = \frac{k}{m}$, $k \in 0:m$. Известно, что последовательность $\big\{L_m(x)\big\}$ при $m \to \infty$ сходится к $f(x)$ равномерно по $x \in [0,1]$. Зафиксируем m, такое, что

$$\max_{x\in[0,1]}\big|f(x) - L_m(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Ломаная $L_m(x)$ удовлетворяет на отрезке $[0,1]$ условию Липшица с константой M, равной следующей величине

$$M = \max_{k\in 0:m-1}\left|\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}\right|.$$

По теореме 1,

$$\max_{x\in[0,1]}\big|L_m(x) - B_n(L_m;x)\big| \leqslant \frac{M}{2\sqrt{n}}.$$

Ясно, что найдётся такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ будет выполняться неравенство

$$\max_{x\in[0,1]}\big|L_m(x) - B_n(L_m;x)\big| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

При этом, согласно (9) и (7),

$$\big|B_n(L_m;x) - B_n(f;x)\big| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\big|L_m(\tfrac{k}{n}) - f(\tfrac{k}{n})\big|p_{nk}(x) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

Объединив неравенства (9), (10) и (11), при $n \geqslant n_0$ и всех $x \in [0,1]$ получим

$$\begin{gathered}\big|f(x) - B_n(f;x)\big| \leqslant \big|f(x) - L_m(x)\big| + \big|L_m(x) - B_n(L_m;x)\big| + \\ + \big|B_n(L_m;x) - B_n(f;x)\big| < \varepsilon.\end{gathered}$$

Теорема доказана. $\square$

5°. В. И. Зубов в работе [5] нашёл неожиданное приложение теоремы Бернштейна к анализу структуры множества непрерывных функций распределения.

Напомним, что функцией распределения называется неубывающая функция $F(x)$, определённая на вещественной оси $(-\infty, \infty)$ и обладающая следующими свойствами:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1. \tag{12}$$

Множество *непрерывных* функций распределения обозначим $\mathscr{P}$.

Зафиксируем *строго возрастающую* функцию $F_0 \in \mathscr{P}$. Положим

$$\varphi_k(x) := p_{nk}\big(F_0(x)\big) = C_n^k F_0^k(x)\big(1 - F_0(x)\big)^{n-k}, \quad k \in 0 : n.$$

Обозначим через $\mathscr{P}_0$ множество функций вида

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k(x), \tag{13}$$

где n — произвольное натуральное число и

$$0 = b_0 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n = 1. \tag{14}$$

ТЕОРЕМА 3 (В. И. Зубов)**.** *Справедливо вложение $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}$. Более того, множество $\mathscr{P}_0$ всюду плотно в $\mathscr{P}$ в равномерной метрике. Последнее означает, что для произвольной функции $F \in \mathscr{P}$ по любому $\varepsilon > 0$ найдётся функция $\Phi \in \mathscr{P}_0$, такая, что*

$$\big|F(x) - \Phi(x)\big| < \varepsilon \quad \forall x \in (-\infty, \infty). \tag{15}$$

6°. Для доказательства вложения $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}$ нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

Рассмотрим полином в форме Бернштейна

$$B(y) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_{nk}(y),$$

где b_k — произвольные коэффициенты.

ЛЕММА. *Справедлива формула для производной*

$$B'(y) = n \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) p_{n-1,k}(y). \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что

$$p_{n,k}(y) = C_n^k\, y^k (1-y)^{n-k}, \quad k \in 0:n.$$

Имеем

$$p'_{n,0}(y) = -np_{n-1,0}(y), \quad p'_{n,n}(y) = np_{n-1,n-1}(y)$$

и при $k \in 1:n-1$

$$p'_{n,k}(y) = kC_n^k\, y^{k-1}(1-y)^{n-k} - (n-k)C_n^k\, y^k(1-y)^{n-1-k}.$$

Так как $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, $(n-k)C_n^{n-k} = nC_{n-1}^k$, то

$$p'_{n,k}(y) = n\big(p_{n-1,k-1}(y) - p_{n-1,k}(y)\big).$$

Получаем

$$B'(y) = \sum_{k=0}^{n} b_k p'_{n,k}(y) = -nb_0 p_{n-1,0}(y) + nb_n p_{n-1,n-1}(y) +$$

$$+ n\sum_{k=1}^{n-1} b_k\big(p_{n-1,k-1}(y) - p_{n-1,k}(y)\big) = n\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} p_{n-1,k}(y) -$$

$$-n\sum_{k=0}^{n-1} b_k p_{n-1,k}(y) = n\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) p_{n-1,k}(y).$$

Лемма доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. *В случае выполнения условия* (14) *справедливо неравенство*

$$B(y_0) \leqslant B(y_1) \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant y_0 \leqslant y_1 \leqslant 1.$$

Нужно учесть формулу (16) и то, что $p_{n-1,k}(y) \geqslant 0$ при $y \in [0,1]$.

Теперь возьмём функцию $\Phi \in \mathscr{P}_0$ и покажем, что $\Phi \in \mathscr{P}$.

Обозначим $y = F_0(x)$ и перепишем формулу (13) в виде

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_{nk}(y) = B(y).$$

По определению

$$p_{nk}(0) = \delta_{k0}, \quad p_{nk}(1) = \delta_{nn},$$

где δ_{ks} — символ Кронекера. Учитывая этот факт и предельные соотношения (12), получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=\lim_{y\to 0}\sum_{k=0}^{n}b_k p_{nk}(y)=b_0=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim_{y\to 1}\sum_{k=0}^{n}b_k p_{nk}(y)=b_n=1.$$

Кроме того, функция $\Phi(x)$ не убывает. Действительно, пусть $x_0\leqslant x_1$. Положим $y_0=F_0(x_0)$, $y_1=F(x_1)$. В силу строгого возрастания функции F_0 имеем $y_0\leqslant y_1$. Следствие из леммы и условие (14) приводят к требуемому неравенству

$$\Phi(x_0)=B(y_0)\leqslant B(y_1)=\Phi(x_1).$$

Указанные свойства функции Φ обеспечивают включение $\Phi\in\mathscr{P}$. Вложение $\mathscr{P}_0\subset\mathscr{P}$ установлено.

7°. Осталось проверить плотность $\mathscr{P}_0$ в $\mathscr{P}$.

Зафиксируем функцию $F\in\mathscr{P}$. По условию теоремы у функции F_0 существует обратная функция F_0^{-1}. Положим

$$g(y)=F\bigl(F_0^{-1}(y)\bigr),\quad y\in(0,1).$$

Функция $g(y)$ непрерывна на интервале $(0,1)$ и имеет предельные значения

$$\lim_{y\to 0}g(y)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,$$
$$\lim_{y\to 1}g(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

Следовательно, она определена и непрерывна на отрезке $[0,1]$, не убывает на этом отрезке и на его концах принимает значения $g(0)=0$, $g(1)=1$.

Сопоставим функции g её полином Бернштейна

$$B_n(y)=\sum_{k=0}^{n}g\bigl(\tfrac{k}{n}\bigr)p_{nk}(y).$$

Согласно теореме Бернштейна по $\varepsilon>0$ найдётся натуральное n, при котором

$$\max_{y\in[0,1]}\bigl|g(y)-B_n(y)\bigr|<\varepsilon. \tag{17}$$

Обозначим $b_k=g\bigl(\frac{k}{n}\bigr)$. Свойства функции g гарантируют выполнение условия (14).

Теперь возьмём $y = F_0(x)$. Имеем

$$g(y) = F\Big(F_0^{-1}\big(F_0(x)\big)\Big) = F(x),$$

$$B_n(y) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_{nk}\big(F_0(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k(x) =: \Phi_n(x).$$

Функция Φ_n принадлежит множеству $\mathscr{P}_0$. Кроме того, в силу (17)

$$\big|F(x) - \Phi_n(x)\big| < \varepsilon \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

Неравенство (15) доказано с $\Phi(x) = \Phi_n(x)$. □

8°. И. П. Натансон использовал полиномы Бернштейна при доказательстве теоремы Рисса об общей форме линейного функционала в пространстве непрерывных на конечном отрезке функций [6, глава VIII, § 8].

Полиномы в форме Бернштейна с векторными коэффициентами нашли применение в геометрическом моделировании. На основе их свойств строится теория кривых Безье (см., например, [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. *Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей* / Собрание сочинений. Том. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 105–106.

2. Виденский В. С. *Многочлены Бернштейна.* Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

3. Виденский В. С. *Линейные положительные операторы конечного ранга.* Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1985. 68 с.

4. Бернштейн С. Н. *О наилучшем приближении $|x|$ посредством многочленов данной степени* / Собрание сочинений. Том. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 157–206.

5. Зубов В. И. *Интерполяционные многочлены Бернштейна* // Доклады РАН. 1995. Т. 343. № 5. С. 593–595.

6. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной.* Изд. третье. СПб.: Изд-во «Лань», 1999. 560 с.

7. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С 1962–1971.