УНИВЕРСАЛЬНЫЙ B-СПЛАЙН ПЕРВОГО ПОРЯДКА*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

17 сентября 2019 г.

1°. Функция $B(x)$, определяемая формулой

$$B(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1, \\ 1+x & \text{при} \quad x \in [-1,0], \\ 1-x & \text{при} \quad x \in [0,1], \\ 0 & \text{при} \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

называется *универсальным* B-*сплайном первого порядка*. Для него справедливо калибровочное соотношение

$$B(x) = B(2x) + \frac{1}{2}\Big[B(2x+1) + B(2x-1)\Big]. \tag{1}$$

Рисунок поясняет этот факт.

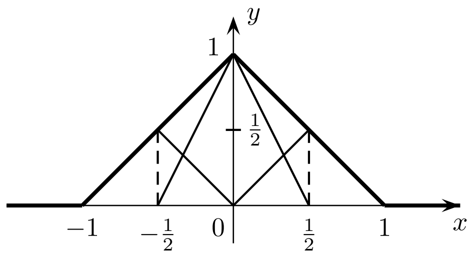

Рис. Иллюстрация к калибровочному соотношению

Приведём аналитическое доказательство формулы (1).

---

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Функция $B(x)$ допускает представление

$$B(x) = (x+1)_+ - 2x_+ + (x-1)_+, \tag{2}$$

где $x_+ = \max\{0, x\}$. Воспользуемся им. Запишем

$$\begin{aligned} B(2x) &= (2x+1)_+ - 4x_+ + (2x-1)_+, \\ \tfrac{1}{2}B(2x+1) &= (x+1)_+ - (2x+1)_+ + x_+, \\ \tfrac{1}{2}B(2x-1) &= x_+ - (2x-1)_+ + (x-1)_+. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства, придём к (1).

Следующее утверждение является обобщением калибровочного соотношения (1).

ТЕОРЕМА 1. *При всех натуральных s справедлива формула*

$$B(x) = B(2^s x) + \sum_{k=1}^{2^s-1} \bigl(1 - \tfrac{k}{2^s}\bigr)\bigl[B(2^s x + k) + B(2^s x - k)\bigr]. \tag{3}$$

Доказательство. При $s = 1$ формула (3) совпадает с (1). Сделаем индукционный переход от s к $s+1$.

Согласно (2) имеем

$$B(2^s x) = B(2^{s+1}x) + \tfrac{1}{2}\bigl[B(2^{s+1}x + 1) + B(2^{s+1}x - 1)\bigr], \tag{4}$$

$$B(2^s x + k) = B(2^{s+1}x + 2k) + \tfrac{1}{2}\bigl[B(2^{s+1}x + 2k + 1) + B(2^{s+1}x + 2k - 1)\bigr], \tag{5}$$

$$B(2^s x - k) = B(2^{s+1}x - 2k) + \tfrac{1}{2}\bigl[B(2^{s+1}x - 2k + 1) + B(2^{s+1}x - 2k - 1)\bigr]. \tag{6}$$

Правые части равенств (5) и (6) умножим на $\bigl(1 - \frac{k}{2^s}\bigr)$, после чего сложим их в столбик при всех $k \in 1 : 2^s - 1$. Получим две суммы

$$\sum_{k=1}^{2^s-1} \bigl(1 - \tfrac{2k}{2^{s+1}}\bigr)\bigl[B(2^{s+1}x + 2k) + B(2^{s+1}x - 2k)\bigr] \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^s-1} \tfrac{1}{2}\bigl(1 - \tfrac{2k}{2^s}\bigr)\Bigl\{ &\bigl[B(2^{s+1}x + 2k + 1) + B(2^{s+1}x - 2k - 1)\bigr] + \\ &+ \bigl[B(2^{s+1}x + 2k - 1) + B(2^{s+1}x - 2k + 1)\bigr]\Bigr\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Обозначим $c_k = \frac{1}{2}\bigl(1 - \frac{k}{2^s}\bigr)$, $a_k = B(2^{s+1}x + k) + B(2^{s+1}x - k)$ и перепишем сумму (8) в виде

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^s-1} c_k(a_{2k+1} + a_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{2^s-1} c_k a_{2k+1} + \sum_{k=0}^{2^s-2} c_{k+1} a_{2k+1} = \\
= c_1 a_1 + c_{2^s-1} a_{2^{s+1}-1} + \sum_{k=1}^{2^s-2} (c_k + c_{k+1}) a_{2k+1} = \\
= \tfrac{1}{2}\bigl(1 - \tfrac{1}{2^s}\bigr)\bigl[B(2^{s+1}x + 1) + B(2^{s+1}x - 1)\bigr] + \\
+ \tfrac{1}{2^{s+1}}\bigl[B(2^{s+1}x + 2^{s+1} - 1) + B(2^{s+1}x - 2^{s+1} + 1)\bigr] + \\
+ \sum_{k=1}^{2^s-2} \bigl(1 - \tfrac{2k+1}{2^{s+1}}\bigr)\bigl[B(2^{s+1}x + 2k + 1) + B(2^{s+1}x - 2k - 1)\bigr].
\end{aligned} \tag{9}$$

Объединив первое слагаемое из (9) с правой частью формулы (4), получим

$$B(2^{s+1}x) + \bigl(1 - \tfrac{1}{2^{s+1}}\bigr)\bigl[B(2^{s+1}x + 1) + B(2^{s+1}x - 1)\bigr]. \tag{10}$$

Второе слагаемое включим в следующую за ним сумму с индексом $k = 2^s - 1$, так что сумма примет вид

$$\sum_{k=1}^{2^s-1} \bigl(1 - \tfrac{2k+1}{2^{s+1}}\bigr)\bigl[B(2^{s+1}x + 2k + 1) + B(2^{s+1}x - 2k - 1)\bigr]. \tag{11}$$

Сложив выражения (10), (11) и (7), придём к новому представлению для правой части формулы (3):

$$\begin{aligned}
B(2^{s+1}x) + \sum_{k=0}^{2^s-1} \bigl(1 - \tfrac{2k+1}{2^{s+1}}\bigr)\bigl[B(2^{s+1}x + 2k + 1) + B(2^{s+1}x - 2k - 1)\bigr] + \\
+ \sum_{k=1}^{2^s-1} \bigl(1 - \tfrac{2k}{2^{s+1}}\bigr)\bigl[B(2^{s+1}x + 2k) + B(2^{s+1}x - 2k)\bigr] = \\
= B(2^{s+1}x) + \sum_{k=1}^{2^{s+1}-1} \bigl(1 - \tfrac{k}{2^{s+1}}\bigr)\bigl[B(2^{s+1}x + k) + B(2^{s+1}x - k)\bigr].
\end{aligned}$$

Таким образом, правая часть формулы (3) совпадает с таким же выражением, в котором число s заменено на $s + 1$.

Теорема доказана. $\square$

2°. Обозначим через $\mathscr{L}_n$ линейное пространство ломаных с узлами

$$x_k^{(n)} = \tfrac{k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что система ломаных

$$B\big(n(x - x_k^{(n)})\big) = B(nx - k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

образует базис в пространстве $\mathscr{L}_n$. Базисные функции обладают следующими свойствами:

$$B(nx_i^{(n)} - k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k, \end{cases}$$

$$B(nx - k) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{supp} B(nx - k) = \left[\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k+1}{n}\right],$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} B(nx - k) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Согласно калибровочному соотношению справедливы вложения

$$\mathscr{L}_n \subset \mathscr{L}_{2n} \subset \ldots \subset \mathscr{L}_{2^s n} \subset \ldots$$

3°. Возьмём непрерывную на отрезке $[0,1]$ функцию $f(x)$. При $\delta > 0$ положим

$$w(f;\delta) = \max_{\substack{|x_1 - x_2| \leqslant \delta \\ x_1 \in [0,1],\, x_2 \in [0,1]}} \big|f(x_1) - f(x_2)\big|.$$

Функция $w(f,\delta)$ называется *модулем непрерывности* функции $f(x)$. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ на $[0,1]$ имеем

$$w(f;\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

При $n \geqslant 2$ введём интерполяционную ломаную

$$P_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n)}) B(nx - k). \tag{12}$$

Она совпадает с $f(x)$ в узлах $x = x_k^{(n)}$, $k \in 0:n$.

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива оценка*

$$\big|f(x) - P_n(f;x)\big| \leqslant w(f;\tfrac{1}{n}) \qquad \forall\, x \in [0,1]. \tag{13}$$

Доказательство. Предположим, что $x \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$ при некотором $i \in 0 : n-1$. Имеем

$$\begin{aligned} \bigl|f(x) - P_n(f;x)\bigr| &= \bigl|f(x) - n(x_{i+1}^{(n)} - x)f(x_i^{(n)}) - n(x - x_i^{(n)})f(x_{i+1}^{(n)})\bigr| \leqslant \\ &\leqslant n(x_{i+1}^{(n)} - x)\bigl|f(x) - f(x_i^{(n)})\bigr| + n(x - x_i^{(n)})\bigl|f(x) - f(x_{i+1}^{(n)})\bigr| \leqslant \\ &\leqslant n(x_{i+1}^{(n)} - x)w(f; x - x_i^{(n)}) + n(x - x_i^{(n)})w(f; x_{i+1}^{(n)} - x). \end{aligned} \tag{14}$$

Модуль непрерывности неубывающая функция, поэтому

$$w(f; x - x_i^{(n)}) \leqslant w(f; \tfrac{1}{n}) \qquad w(f; x_{i+1}^{(n)} - x) \leqslant w(f; \tfrac{1}{n}).$$

Отсюда и из (14) следует (13).

Теорема доказана. □

В работе [1] отмечено, что на множестве всех непрерывных функций оценка (13) неулучшаема в следующем смысле: при любом $n \geqslant 2$ и любом $\varepsilon \in (0, \frac{1}{n})$ можно построить непрерывную функцию $f_\varepsilon(x)$, на которой выполняется неравенство

$$\max_{x \in [0,1]} \bigl|f_\varepsilon(x) - P_n(f_\varepsilon; x)\bigr| > w(f_\varepsilon; \tfrac{1}{n} - \varepsilon).$$

Теорема 2 показывает, что за счёт выбора количества узлов можно обеспечить приближение с любой точностью непрерывной на отрезке функции ломаными.

Что касается интерполяционной ломаной $P_n(f;x)$, то в её представлении (12) присутствует только один нелинейный элемент — универсальный B-сплайн $B(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Об отклонении ломаных* // Вестник ЛГУ. 1966. № 7. Вып. 2. С. 150–153.