О ТЕОРЕМЕ ГЕРМЕЙЕРА*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

28 марта 2019 г.

Памяти Ю. Б. Гермейера
(1918–1975)

1°. Рассмотрим простейшую максиминную задачу с линейными ограничениями, связанную с распределением ресурсов:

$$\begin{gathered}\psi(x) := \min_{i \in 1:n} f_i(x_i) \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = A, \quad x_i \geqslant 0 \ \ \forall i \in 1:n,\end{gathered} \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $A > 0$ и $f_i(t)$ при всех $i \in 1:n$ — непрерывные строго возрастающие на отрезке $[0, A]$ функции. Дополнительно предполагаем, что

$$f_1(0) \leqslant f_2(0) \leqslant \ldots \leqslant f_n(0). \tag{2}$$

Формально положим $f_{n+1}(0) = +\infty$.

Вектор x, удовлетворяющий ограничениям задачи (1), называется *планом*. Множество планов обозначим Ω.

Очевидно, что задача (1) имеет решение. Исчерпывающую характеристику этого решения дал Ю. Б. Гермейер [1, с. 267–269].

ТЕОРЕМА ГЕРМЕЙЕРА. *Для того чтобы план $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ задачи* (1) *был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашлось целое k, $k \in 1:n$, такое, что*

$$\begin{gathered}f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = \ldots = f_k(x^*) < f_{k+1}(0), \\ x_{k+1}^* = \ldots = x_n^* = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Если $f_1(0) = f_2(0) = \ldots = f_n(0)$, то $k = n$. Во всех случаях оптимальный план x^* будет единственным.

---

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Доказательство теоремы Гермейера имеется в книге [2, с. 312–314]. Мы приведём более детальный вариант этого доказательства и дадим принципиально новое конструктивное доказательство.

2°. Начнём с простейшего случая, когда

$$f_1(0) = f_2(0) = \ldots = f_n(0). \tag{4}$$

ЛЕММА 1. *Пусть выполнено условие* (4). *Тогда критерием оптимальности плана* $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *задачи* (1) *являются равенства*

$$f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = \ldots = f_n(x_n^*). \tag{5}$$

Оптимальный план единствен.

Доказательство. Необходимость. Возьмём оптимальный план x^* и положим

$$\lambda = \psi(x^*) = \min_{i \in 1:n} f_i(x_i^*). \tag{6}$$

Общее значение всех $f_i(0)$ обозначим через c. Ясно, что $\lambda > c$. Действительно, в силу строгого возрастания функций $f_i(t)$ для любого плана $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с положительными компонентами имеем $f_i(x_i) > c$ при всех $i \in 1 : n$. Как следствие, $\psi(x) > c$. Тем более, $\psi(x^*) > c$, поскольку

$$\psi(x^*) = \max_{x \in \Omega} \psi(x).$$

Значит, $\lambda > c$. Неравенство $\psi(x^*) > c$ гарантирует также, что все компоненты вектора x^* положительны.

В силу (6), $f_i(x_i^*) \geqslant \lambda$ при всех $i \in 1 : n$. Покажем, что все эти неравенства выполняются как равенства.

Допустим, вопреки утверждению, что найдётся индекс $i_0 \in 1 : n$, на котором $f_{i_0}(x_{i_0}^*) > \lambda$. Введём вектор z^ε с компонентами

$$z_i^\varepsilon \;=\; \begin{cases} x_{i_0}^* - \varepsilon & \text{при} \quad i = i_0, \\ x_i^* + \frac{\varepsilon}{n-1} & \text{при} \quad i \neq i_0. \end{cases} \tag{7}$$

При $\varepsilon \in (0, x_{i_0}^*)$ вектор z^ε будет планом задачи (1). Более того, при малых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\min_{i \in 1:n} f_i(z_i^\varepsilon) > \lambda. \tag{8}$$

Проверим это. По непрерывности, $f_{i_0}(z_{i_0}^\varepsilon) > \lambda$ при малых $\varepsilon > 0$. В силу строгого возрастания при $i \neq i_0$ имеем

$$f_i(z_i^\varepsilon) > f_i(x_i^*) \geqslant \lambda.$$

Приходим к неравенству (8), которое противоречит определению λ.

Справедливость соотношения (5) установлена.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Возьмём произвольный план x, отличный от x^*. Покажем, что при некотором $i_1 \in 1:n$ будет $x_{i_1} < x^*_{i_1}$. В противном случае $x_i \geqslant x^*_i$ при всех $i \in 1:n$, при этом хотя бы при одном i неравенство выполняется как строгое. Как следствие,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > \sum_{i=1}^{n} x^*_i = A,$$

что противоречит определению плана. На основании (5) получаем

$$\psi(x) = \min_{i \in 1:n} f_i(x_i) \leqslant f_{i_1}(x_{i_1}) < f_{i_1}(x^*_{i_1}) = \psi(x^*).$$

Значит, x^* — решение задачи (1), причём единственное.

Лемма доказана. □

3°. Переходим к доказательству теоремы Гермейера в предположении, что $f_1(0) < f_n(0)$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть x^* — решение задачи (1). Как и раньше, обозначим

$$\lambda = \psi(x^*) = \min_{i \in 1:n} f_i(x^*_i).$$

Согласно (2), $f_1(0) \leqslant f_i(0) \leqslant f_i(x^*_i)$ при всех $i \in 1:n$. Значит, $f_1(0) \leqslant \lambda$.

Числа $f_1(0) \leqslant f_2(0) \leqslant \ldots \leqslant f_n(0) < f_{n+1}(0)$, где $f_{n+1}(0) = +\infty$, образуют разбиение полуоси $[f_1(0), +\infty)$. Неравенство $f_1(0) \leqslant \lambda$ гарантирует, что существует единственное $k \in 1:n$, такое, что

$$f_k(0) \leqslant \lambda < f_{k+1}(0). \tag{9}$$

Предположим, что $k < n$. Покажем, что $x^*_i = 0$ при $i \in k+1:n$. В противном случае найдётся индекс $i_1 \geqslant k+1$, на котором $x^*_{i_1} > 0$. Введём вектор z^ε с компонентами

$$z^\varepsilon_i = \begin{cases} x^*_{i_1} - \varepsilon & \text{при} \quad i = i_1, \\ x^*_i + \frac{\varepsilon}{n-1} & \text{при} \quad i \neq i_1. \end{cases}$$

При $\varepsilon \in (0, x^*_{i_1})$ вектор z^ε будет планом задачи (1). Покажем, что при указанных ε выполняется неравенство

$$\min_{i \in 1:n} f_i(z^\varepsilon_i) > \lambda. \tag{10}$$

При $i \neq i_1$ имеем

$$f_i(z^\varepsilon_i) > f_i(x^*_i) \geqslant \lambda.$$

При $i = i_1$ из (9) следует, что

$$f_{i_1}(z_{i_1}^{\varepsilon}) \geqslant f_{i_1}(0) \geqslant f_{k+1}(0) > \lambda.$$

На основании двух последних неравенств приходим к (10). Но это противоречит определению λ. Таким образом, установлено, что $x_i^* = 0$ при $i \in k+1 : n$.

Покажем, что $f_i(x_i^*) = \lambda$ при всех $i \in 1 : k$. Допустим, вопреки утверждению, что существует индекс $i_2 \in 1 : k$, на котором $f_{i_2}(x_{i_2}^*) > \lambda$. В этом случае $x_{i_2}^* > 0$. Действительно, иначе (при $x_{i_2}^* = 0$)

$$\lambda < f_{i_2}(x_{i_2}^*) = f_{i_2}(0) \leqslant f_k(0),$$

что противоречит (9).

Имея положительную компоненту $x_{i_2}^*$, как и раньше, введём вектор z^{ε}, заменив в определении i_1 на i_2. Тогда при $i \neq i_2$ получим

$$f_i(z_i^{\varepsilon}) > f_i(x_i^*) \geqslant \lambda.$$

Неравенство $f_{i_2}(z_{i_2}^{\varepsilon}) > \lambda$ при малых $\varepsilon > 0$ следует из неравенства $f_{i_2}(x_{i_2}^*) > \lambda$ и непрерывности функции $f_{i_2}(t)$. В результате приходим к неравенству вида (10). Оно противоречит определению λ.

В случае $k = n$ формула (3) принимает вид

$$f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = \ldots = f_n(x_n^*).$$

Справедливость этих равенств проверяется так же, как во второй части приведённого доказательства (для $i \in 1 : k$).
Д о с т а т о ч н о с т ь. Из (2) и (3) следует, что

$$f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = \ldots = f_k(x_k^*) < f_{k+1}(x_{k+1}^*) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x_n^*).$$

В частности, $\psi(x^*) = \min\limits_{i \in 1:k} f_i(x_i^*)$.

Возьмём план x, отличный от x^*. Поскольку сумма компонент плана равна A, то необходимо найдётся индекс $j \in 1 : n$, такой, что $0 \leqslant x_j < x_j^*$. По условию теоремы $x_j^* = 0$ при $j \in k+1 : n$. Значит, $j \in 1 : k$. Теперь имеем

$$\psi(x) \leqslant \min_{i \in 1:k} f_i(x_i) \leqslant f_j(x_j) < f_j(x_j^*) = \psi(x^*).$$

Это гарантирует и оптимальность x^*, и его единственность.

Теорема доказана. $\square$

4°. На теореме Гермейера основан следующий алгоритм решения задачи (1). Берём последовательно $k = n, n-1, \dots, 1$ и при каждом k решаем систему уравнений

$$f_i(x_i) = \lambda, \ i \in 1 : k;$$
$$\sum_{i=1}^{k} x_i = A$$

относительно неизвестных $x_1, \dots, x_k$ и λ. Если при некотором k полученное решение $x_1^*, \dots, x_k^*$, λ^* имеет неотрицательные x_i^* и в случае $k < n$ выполняется неравенство $\lambda^* < f_{k+1}(0)$, то вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*, 0, \dots, 0)$ является единственным решением задачи (1).

5°. В работе [3], опубликованной в 1973 г., был предложен другой подход к решению задачи (1). Этот подход связан с использованием обратных функций.

Обозначим
$$c = f_1(0), \quad d = \min_{i \in 1:n} f_i(A). \tag{11}$$

Если выполнено условие (4), то при всех $i \in 1 : n$ на отрезке $[c, d]$ определены обратные функции $f_i^{-1}(y)$. Они непрерывны и строго возрастают.

ЛЕММА 2. *Пусть выполнено условие* (4). *Тогда задача* (1) *имеет единственное решение* $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ *с компонентами*

$$x_i^* = f_i^{-1}(y^*), \quad i \in 1 : n, \tag{12}$$

где y^* *единственный на интервале* (c, d) *корень уравнения*

$$h(y) := \sum_{i=1}^{n} f_i^{-1}(y) = A.$$

При этом справедливо равенство $\psi(x^*) = y^*$.

На рис. 1 поясняется содержание леммы 2

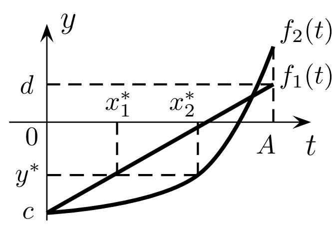

Рис. 1. Пояснение к лемме 2

Доказательство. Очевидно, что функция $h(y)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[c,d]$, причём $h(c)=0$, $h(d)>A$. Значит, найдётся единственная точка $y^*\in(c,d)$, в которой $h(y^*)=A$. Покажем, что вектор x^* с компонентами (12) является единственным решением задачи (1).

По построению, x^* — план задачи (1), на котором

$$f_1(x_1^*)=f_2(x_2^*)=\ldots=f_n(x_n^*)=y^*=\psi(x^*).$$

Возьмём любой план x, отличный от x^*. Тогда найдётся индекс $j\in 1:n$, такой, что $x_j<x_j^*$. Имеем $f_j(x_j)<f_j(x_j^*)$. Как следствие,

$$\psi(x)=\min_{i\in 1:n} f_i(x_i)\leqslant f_j(x_j)<f_j(x_j^*)=y^*=\psi(x^*).$$

Это гарантирует как оптимальность x^*, так и его единственность.

Лемма доказана. □

6°. Перейдём к общему случаю (2), рассмотренному Гермейером. Считаем, что $f_1(0)<f_n(0)$. Обозначения (11) сохраним.

Положим

$$s=\max\big\{i\in 1:n \mid f_i(0)<d\big\}, \tag{13}$$

так что

$$f_i(0)\geqslant d \quad \text{при } \ i\in s+1:n. \tag{14}$$

ЛЕММА 3. *При* $s=1$ *единственным решением задачи* (1) *является вектор* $x^*=(A,0,\ldots,0)$.

Рис. 2 иллюстрирует данную ситуацию.

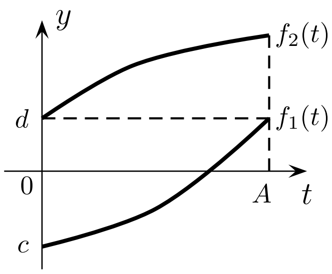

Рис. 2. Случай $s=1$

Доказательство. Согласно (14), $f_i(0)\geqslant d$ при $i\in 2:n$. В силу строгого возрастания $f_i(A)>d$ при $i\in 2:n$. Принимая во внимание определение d (см. (11)), заключаем, что $f_1(A)=d$.

На плане $x^* = (A, 0, \ldots, 0)$ имеем

$$\psi(x^*) = \min\bigl\{f_1(A), f_2(0), \ldots, f_n(0)\bigr\} = d.$$

Возьмём любой план x, отличный от x^*. Тогда необходимо $x_1 < A$. Запишем

$$\psi(x) = \min_{i \in 1:n} f_i(x_i) \leqslant f_1(x_1) < f_1(A) = d = \psi(x^*).$$

Отсюда следует и оптимальность x^* и его единственность. $\square$

7°. В дальнейшем считаем, что $s \geqslant 2$. При $i \in 1:s$ введём функции

$$g_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \in [c, f_i(0)], \\ f_i^{-1}(y), & \text{если} \quad y \in (f_i(0), d]. \end{cases}$$

ЛЕММА 4. *Уравнение*

$$h(y) := \sum_{i=1}^{s} g_i(y) = A \tag{15}$$

имеет единственное решение y^* *на интервале* (c, d).

Рис. 3 поясняет данный факт.

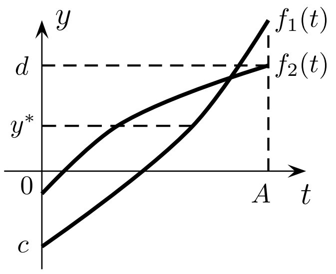

Рис. 3. Пояснение к лемме 4

Д о к а з а т е л ь с т в о элементарно. Последовательно анализируя поведение суммы $h(y)$ на отрезках

$$[c, f_2(0)], [f_2(0), f_3(0)], \ldots, [f_{s-1}(0), f_s(0)], [f_s(0), d],$$

заключаем, что функция $h(y)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[c, d]$. При этом $h(c) = 0$ и $h(d) > A$ (в силу условия $s \geqslant 2$). Отсюда очевидным образом следует заключение леммы. $\square$

8°. Обозначим
$$k = \max\bigl\{i \in 1:s \mid f_i(0) < y^*\bigr\}.$$

ТЕОРЕМА. *При $s \geqslant 2$ единственным решением задачи* (1) *является вектор $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ с компонентами*
$$\begin{aligned} &x_i^* = f_i^{-1}(y^*), \quad i \in 1:k; \\ &x_i^* = 0, \quad i \in k+1:n, \end{aligned} \tag{16}$$
где y^* — единственный на интервале (c,d) корень уравнения (15)*. При этом $x_i^* > 0$, когда $i \in 1:k$, и $\psi(x^*) = y^*$.*

Доказательство. Из определения $g_i(y)$, y^* и k следует, что
$$g_i(y^*) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \in k+1:s; \\ f_i^{-1}(y^*), & \text{если} \quad i \in 1:k. \end{cases}$$
Равенство $h(y^*) = A$ принимает вид
$$\sum_{i=1}^{k} f_i^{-1}(y^*) = A.$$
Для компонент вектора x^*, определяемых формулами (16), получаем
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = A.$$
К этому нужно добавить, что в силу определения k и строгого возрастания обратных функций f_i^{-1}, при $i \in 1:k$ справедливо неравенство
$$x_i^* = f_i^{-1}(y^*) > f_i^{-1}\bigl(f_i(0)\bigr) = 0,$$
то есть $x_i^* > 0$ при $i \in 1:k$. Значит, x^* — план задачи (1).

Вычислим $\psi(x^*)$. Имеем
$$f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = \ldots = f_k(x_k^*) = y^* \leqslant f_{k+1}(x_{k+1}^*) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x_n^*).$$
Отсюда следует, что $\psi(x^*) = y^*$. Проверим оптимальность x^*.

Возьмём произвольный план x, отличный от x^*. Тогда найдётся индекс $j \in 1:n$, такой, что $0 \leqslant x_j < x_j^*$. Поскольку $x_i^* = 0$ при $i \in k+1:n$, то необходимо $j \in 1:k$. Теперь имеем
$$\psi(x) \leqslant \min_{i \in 1:k} f_i(x_i) \leqslant f_j(x_j) < f_j(x_j^*) = y^* = \psi(x^*).$$
Это гарантирует и оптимальность x^*, и его единственность.

Теорема доказана. $\square$

9°. Согласно теореме, решение задачи (1) сводится к нахождению корня y^* скалярного уравнения (15) и вычислению компонент x_i^* оптимального плана x^* по формулам (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гермейер Ю. Б. *Введение в теорию исследования операций.* М.: Наука, 1971. 384 с.

2. Васин А. А., Краснощеков П. С., Морозов В. В. *Исследование операций.* М.: «Академия», 2008. 464 с.

3. Малозёмов В. Н. *Минимаксиминная задача с вырожденной целевой функцией* / В сб.: Оптимизация. Новосибирск, 1973. с. 47–53.