ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ КУСОЧНО-АФФИННЫХ ФУНКЦИЙ*

В. Н. Малозёмов — v.malozemov@spbu.ru

Г. Ш. Тамасян — g.tamasyan@spbu.ru

10 сентября 2019 г.

В связи с развитием кодифференциального исчисления повысился интерес к непрерывным кусочно-аффинным функциям. Они образуют важный класс кодифференциалов [1, глава 4]. В одномерном случае непрерывная кусочно-аффинная функция называется *ломаной*. В докладе исследуются различные аналитические представления ломаных: в форме Бернштейна, в формах, принятых в теории полиномиальных сплайнов, в виде разности максимумов двух семейств аффинных функций. Устанавливается связь между указанными представлениями.

1°. Рассмотрим конечный набор точек на плоскости

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n), \tag{1}$$

где $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, $n \geqslant 2$. Обозначим через $\ell_k(x)$ прямую, проходящую через точки (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}),

$$\ell_k(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k).$$

Коэффициент при x у этой прямой является разделенной разностью

$$y[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}\,.$$

Набор точек (1) однозначно определяет ломаную $F(x)$ с аналитическим представлением

$$F(x) \;=\; \begin{cases} \ell_0(x) & \text{при} \quad x \leqslant x_1, \\ \ell_k(x) & \text{при} \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k \in 1 : n-2, \\ \ell_{n-1}(x) & \text{при} \quad x \geqslant x_{n-1}. \end{cases} \tag{2}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Точки $x_1, \dots, x_{n-1}$ называются *узлами* ломаной.

На рис. 1 представлен характерный вид ломаной.

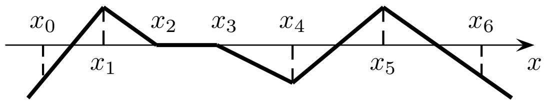

Рис. 1. Вид ломаной с пятью узлами

2°. Ломаную $F(x)$ вида (2) можно представить в форме Бернштейна.

ТЕОРЕМА 1. *Ломаная $F(x)$ вида* (2) *допускает представление*

$$F(x) = a_0 x + b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k |x - x_k|, \tag{3}$$

где

$$a_k = \tfrac{1}{2}\big(y[x_k, x_{k+1}] - y[x_{k-1}, x_k]\big),\ k \in 1 : n-1; \tag{4}$$

$$a_0 = \tfrac{1}{2}\big(y[x_0, x_1] + y[x_{n-1}, x_n]\big), \tag{5}$$

$$b_0 = \tfrac{1}{2}\big(y_0 + y_n - x_0 y[x_0, x_1] - x_n y[x_{n-1}, x_n]\big). \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим правую часть равенства (3) через $F_1(x)$. Функция $F_1(x)$ является ломаной с теми же узлами $x_1, \dots, x_{n-1}$, что и у $F(x)$. По определению ломаной $F(x)$ имеем $F(x_k) = y_k$, $k \in 0 : n$. Таким образом, за счёт выбора коэффициентов $a_0, b_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ нужно обеспечить равенства

$$F_1(x_k) = y_k, \quad k \in 0 : n. \tag{7}$$

Отметим, что базисные функции $h_i(x) = |x - x_i|$, $i \in 1 : n-1$, обладают следующим свойством:

$$h_i[x_k, x_{k+1}] - h_i[x_{k-1}, x_k] = \begin{cases} 2, & \text{при} \quad i = k, \\ 0, & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

С учётом (7) при $k \in 1 : n-1$ получаем

$$y[x_k, x_{k+1}] - y[x_{k-1}, x_k] = F_1[x_k, x_{k+1}] - F_1[x_{k-1}, x_k] = 2a_k.$$

Это равносильно (4).

Для вычисления a_0 запишем

$$y_1 = a_0x_1 + b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x_k - x_1),$$
$$y_0 = a_0x_0 + b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x_k - x_0).$$

Вычтем второе равенство из первого и результат поделим на $x_1 - x_0$. Придём к формуле

$$y[x_0, x_1] = a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \tag{8}$$

Далее запишем

$$y_n = a_0x_n + b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x_n - x_k),$$
$$y_{n-1} = a_0x_{n-1} + b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x_{n-1} - x_k).$$

Вычтем второе равенство из первого и результат поделим на $x_n - x_{n-1}$. Придём к формуле

$$y[x_{n-1}, x_n] = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \tag{9}$$

Сложив (8) и (9) и поделив результат на два, получим формулу (5).

Осталось вычислить b_0. В силу (8) и (9) имеем

$$\begin{gathered} y_0 + y_n = a_0(x_0 + x_n) + 2b_0 + (x_n - x_0)\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \\ = 2b_0 + (x_0 + x_n)y[x_{n-1}, x_n] - x_0\big(y[x_{n-1}, x_n] - y[x_0, x_1]\big) = \\ = 2b_0 + x_ny[x_{n-1}, x_n] + x_0y[x_0, x_1]. \end{gathered}$$

Значит,

$$b_0 = \tfrac{1}{2}\big(y_0 + y_n - x_0y[x_0, x_1] - x_ny[x_{n-1}, x_n]\big).$$

Формула (6), а вместе с ней и теорема, доказаны. □

Замечание. В работе [2], опубликованной в 1905 году, С. Н. Бернштейн рассмотрел интерполяционную задачу $F(\frac{k}{n}) = y_k$, $k \in 0 : n$, на ломаных вида

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k|x - \tfrac{k}{n}|.$$

Он доказал, что эта задача имеет единственное решение:

$$A_k = \tfrac{n}{2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}), \quad k \in 1 : n-1;$$
$$A_0 = \tfrac{1}{2}(y_n + ny_1 - (n-1)y_0),$$
$$A_n = \tfrac{1}{2}(y_0 + ny_{n-1} - (n-1)y_1).$$

Теорема 1 является естественным обобщением данного результата.

3°. Ломаную можно рассматривать как полиномиальный сплайн первого порядка [3]. С этой точки зрения в её представлении простейшую ломаную $|x|$ следует заменить ломаной $x_+ = \max\{0, x\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Ломаная $F(x)$ вида* (2) *допускает представление*

$$F(x) = \ell_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(y[x_k, x_{k+1}] - y[x_{k-1}, x_k]\big)(x - x_k)_+, \tag{10}$$

где $\ell_0(x)$ — аффинная функция, определённая в п. 1°.

Доказательство. В силу теоремы 1 и тождества $|x| = 2x_+ - x$ достаточно проверить равенство

$$a_0 x + b_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k (x - x_k) = \ell_0(x). \tag{11}$$

Напомним, что

$$y_0 = a_0 x_0 + b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (x_k - x_0).$$

Отсюда следует, что

$$b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k = y_0 - x_0 \Big(a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\Big).$$

Значит,

$$a_0 x + b_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k (x - x_k) = y_0 + (x - x_0)\Big(a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\Big).$$

С учётом формулы (8) приходим к (11).

Теорема доказана. □

Замечание. Коэффициент $y[x_k, x_{k+1}] - y[x_{k-1}, x_k]$ в представлении (10) есть разность коэффициентов при x у аффинных функций $\ell_k(x)$ и $\ell_{k-1}(x)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим ломаную с двумя узлами, график которой изображён на рис. 2.

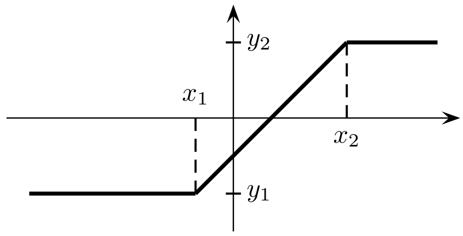

Рис. 2. График ломаной с двумя узлами

По теореме 2 эта ломаная допускает следующее представление:

$$F(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)_+ - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)_+.$$

4°. Пусть будет $n \geqslant 4$. Зафиксируем абсциссы $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ точек из набора (1) и построим систему базисных ломаных

$$B_0(x), B_1(x), \ldots, B_n(x) \tag{12}$$

с узлами $x_1, \ldots, x_{n-1}$, исходя из условий

$$B_k(x_i) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при остальных} \quad i \in 0 : n. \end{cases} \tag{13}$$

Базисные ломаные $B_k(x)$ разделятся на три группы: внутренние базисные ломаные, левые граничные и правые граничные.

К внутренним относятся базисные ломаные $B_k(x)$ при $k \in 2 : n-2$. Их вид представлен на рис. 3.

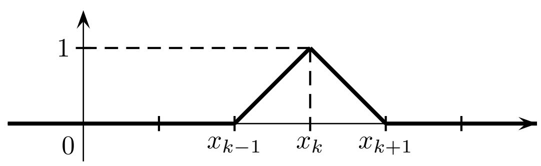

Рис. 3. Внутренняя базисная ломаная $B_k(x)$

По теореме 2 имеем

$$B_k(x) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1})_+ - \left(\frac{1}{x_{k+1} - x_k} + \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\right)(x - x_k)_+ +$$
$$+ \frac{1}{x_{k+1} - x_k}(x - x_{k+1})_+.$$

Левые граничные базисные ломаные — это $B_0(x)$ и $B_1(x)$. Их вид представлен на рис. 4.

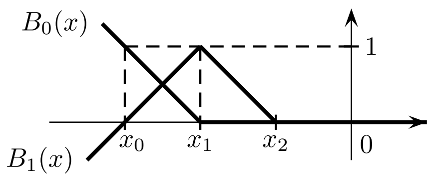

Рис. 4. Ломаные $B_0(x)$ и $B_1(x)$

По теореме 2 имеем

$$
\begin{aligned}
B_0(x) &= \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_1 - x_0}(x - x_1)_+\,, \\
B_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} - \Big(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_0}\Big)(x - x_1)_+ + \frac{1}{x_2 - x_1}(x - x_2)_+\,.
\end{aligned}
$$

Правые граничные базисные ломаные — это $B_{n-1}(x)$ и $B_n(x)$. Их вид представлен на рис. 5.

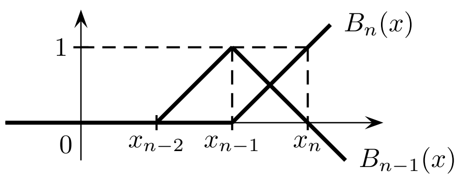

Рис. 5. Ломаные $B_{n-1}(x)$ и $B_n(x)$

По теореме 2 имеем

$$
\begin{aligned}
B_{n-1}(x) &= \frac{1}{x_{n-1} - x_{n-2}}(x - x_{n-2})_+ - \Big(\frac{1}{x_n - x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-1} - x_{n-2}}\Big)(x - x_{n-1})_+, \\
B_n(x) &= \frac{1}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1})_+\,.
\end{aligned}
$$

На основании свойства (13) базисных ломаных (12) заключаем, что произвольная ломаная, определяемая формулой (2), допускает представление

$$
F(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k B_k(x).
$$

5°. Вернёмся к представлению (10) ломаной $F(x)$. Обозначим

$$c_k = y[x_k, x_{k+1}] - y[x_{k-1}, x_k].$$

Введём индексные множества

$$I = \{k \in 0:n \mid c_k > 0\}, \quad J = \{k \in 0:n \mid c_k < 0\}$$

и перепишем формулу (10) в виде

$$F(x) = \ell_0(x) + \sum_{k \in I} c_k (x - x_k)_+ - \sum_{k \in J} |c_k| (x - x_k)_+ \,.$$

Выделим ломаные с положительными коэффициентами

$$F_1(x) = \sum_{k \in I} c_k (x - x_k)_+ \,, \quad F_2(x) = \sum_{k \in J} |c_k| (x - x_k)_+ \,.$$

Тогда получим, что

$$F(x) = \ell_0(x) + F_1(x) - F_2(x). \tag{14}$$

Ломаные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имеют одинаковые свойства, поэтому достаточно разобраться с $F_1(x)$.

Упростим обозначения. Пусть $I = \{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$. Положим

$$\hat{x}_i = x_{k_i}, \quad \hat{c}_i = c_{k_i}$$

и запишем

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{s} \hat{c}_i (x - \hat{x}_i)_+ \,.$$

Здесь

$$\hat{c}_i > 0 \quad \text{и} \quad \hat{x}_1 < \hat{x}_2 < \ldots < \hat{x}_s. \tag{15}$$

По определению функций $(x - \hat{x}_i)_+$ имеем

$$\begin{aligned}
&F_1(x) = 0 && \text{при} \quad x \leqslant \hat{x}_1; \\
&F_1(x) = \sum_{i=1}^{k} \hat{c}_i (x - \hat{x}_i) && \text{при} \quad x \in [\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}], \ \ k \in 1:s-1; \\
&F_1(x) = \sum_{i=1}^{s} \hat{c}_i (x - \hat{x}_i) && \text{при} \quad x \geqslant \hat{x}_s.
\end{aligned}$$

Обозначим $p_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \hat{c}_i(x - \hat{x}_i)$. Получим

$$
\begin{aligned}
&F_1(x) = p_k(x) \quad \text{при} \quad x \in [\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}], \quad k \in 1 : s-1;\\
&F_1(x) = p_s(x) \quad \text{при} \quad x \geqslant \hat{x}_s.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Отметим, что аффинные функции $p_k(x)$ связаны рекуррентным соотношением

$$
\begin{aligned}
&p_k(x) = p_{k-1}(x) + \hat{c}_k(x - \hat{x}_k), \quad k = 1, \ldots, s;\\
&p_0(x) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{17}
$$

На основании (15)–(17) заключаем, что функция $F_1(x)$ является выпуклой ломаной (см. рис. 6).

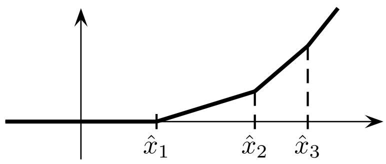

Рис. 6. Выпуклая ломаная $F_1(x)$

Более того, ломаная $F_1(x)$ допускает представление

$$
F_1(x) = \max\bigl\{0, p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)\bigr\}. \tag{18}
$$

Аналогичный результат справедлив и для ломаной $F_2(x)$. Обозначим $J = \{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$,

$$
\hat{x}_j = x_{k_j}, \quad \hat{c}_j = |c_{k_j}|,
$$

$$
q_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \hat{c}_j(x - \hat{x}_j), \quad k \in 1 : r.
$$

Тогда

$$
F_2(x) = \max\bigl\{0, q_1(x), q_2(x), \ldots, q_r(x)\bigr\}. \tag{19}
$$

Аффинные функции $q_r(x)$ связаны рекуррентным соотношением

$$
\begin{aligned}
&q_k(x) = q_{k-1}(x) + \hat{c}_k(x - \hat{x}_k), \quad k = 1, \ldots, r;\\
&q_0(x) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Подведём итог.

ТЕОРЕМА 3. *Ломаная $F(x)$ вида* (2) *допускает представление* (14)*, в котором выпуклые ломаные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ определяются формулами* (18) *и* (19)*.*

Отметим, что $s + r = n - 1 - d$, где d — количество нулевых c_k. Другими словами, d — это количество тех $k \in 1 : n-1$, при которых три соседние точки (x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) из набора (1) лежат на одной прямой.

6°. Рассмотрим пример на применение теоремы 3.

ПРИМЕР 2. Построим ломаную по следующему набору точек (см. рис. 7):

$$(-3,-1),\quad (-2,1),\quad (-1,-1),\quad (0,-1),$$
$$(2,1),\quad (3,0),\quad (4,1).$$

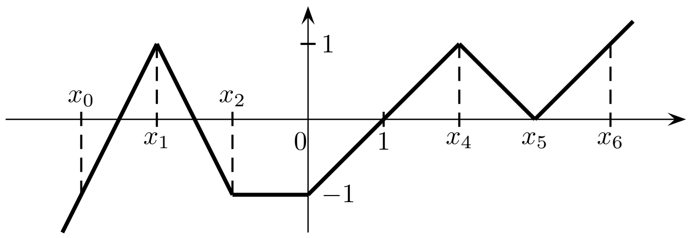

Рис. 7. Ломаная с пятью узлами

Вычислим

$$\ell_0(x) = 2x+5,$$
$$c_1 = -4,\quad c_2 = 2,\quad c_3 = 1,\quad c_4 = -2,\quad c_5 = 2.$$

Получаем

$$F_1(x) = 2(x+1)_+ + x_+ + 2(x-3)_+,$$
$$F_2(x) = 4(x+2)_+ + 2(x-2)_+.$$

Далее, согласно (17),

$$p_1(x) = 2x+2,\quad p_2(x) = 3x+2,\quad p_3(x) = 5x-4.$$

Значит,

$$F_1(x) = \max\{0,\, 2x+2,\, 3x+2,\, 5x-4\}.$$

Согласно (20),

$$q_1(x) = 4x+8,\quad q_2(x) = 6x+4.$$

Значит

$$F_2(x) = \max\{0,\, 4x+8,\, 6x+4\}.$$

Все атрибуты представления (14) найдены.

7°. Представим аффинную функцию $\ell_0(x)$ в виде разности двух аффинных функций

$$\ell_0(x) = p_0(x) - q_0(x). \tag{21}$$

Достаточно выбрать, например, $p_0(x)$. Тогда $q_0(x) = p_0(x) - \ell_0(x)$. На основании (14), (18), (19) и (21) получаем

$$F(x) = \max\bigl\{p_0(x);\ p_0(x) + p_k(x),\ k \in 1:s\bigr\} - \\ - \max\bigl\{q_0(x);\ q_0(x) + q_k(x),\ k \in 1:r\bigr\}.$$

Таким образом, любую ломаную можно представить в виде разности максимумов двух конечных семейств аффинных функций.

Справедливо и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть*

$$F(x) = \max\bigl\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_s(x)\bigr\} - \max\bigl\{q_0(x), q_1(x), \dots, q_r(x)\bigr\},$$

где $p_k(x) = a_k x + b_k$ *и* $q_k(x) = c_k x + d_k$ *— произвольные аффинные функции. Утверждается, что* $F(x)$ *можно привести к виду* (14).

Доказательство. Достаточно рассмотреть один максимум. Обозначим

$$P(x) = \max\bigl\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_s(x)\bigr\}. \tag{22}$$

Требуется преобразовать максимум в сумму.

Предварительный шаг. В множестве $M = \Bigl\{k \in 1:s \ \Big|\ a_k = \min\limits_{i \in 1:s} a_i\Bigr\}$ выделяем один индекс k_0, соответствующий наибольшему b_{k_0}. Функции $p_k(x)$ с индексами k из M, отличными от k_0, из представления (22) удаляем. В результате получим

$$P(x) = p_{k_0}(x) + \max\bigl\{0;\ p_k(x) - p_{k_0}(x),\ k \in I_0\bigr\},$$

причём при всех $k \in I_0$ коэффициент при x у аффинной функции

$$p_k^{(0)}(x) = p_k(x) - p_{k_0}(x)$$

положителен.

Основной шаг. Рассмотрим функцию

$$P_0(x) := \max\bigl\{0;\ p_k^{(0)}(x),\ k \in I_0\bigr\} = \\ = \max\bigl\{\max\bigl\{0,\ p_k^{(0)}(x)\bigr\},\ k \in I_0\bigr\}. \tag{23}$$

Здесь $p_k^{(0)}(x) = a_k^{(0)} x + b_k^{(0)}$, $a_k^{(0)} > 0$. Обозначим $x_k^{(0)} = -b_k^{(0)}/a_k^{(0)}$. Тогда $p_k^{(0)}(x) = a_k^{(0)}\bigl(x - x_k^{(0)}\bigr)$.

В множестве $M_0 = \left\{k \in I_0 \mid x_k^{(0)} = \min\limits_{i \in I_0} x_i^{(0)}\right\}$ выделим один индекс k_1, соответствующий наибольшему $a_{k_1}^{(0)}$. Функции $p_k^{(0)}(x)$ с индексами k из M_0, отличными от k_1, из представления (23) удаляем. Удаляем также функции $p_k^{(0)}(x)$ с индексами $k \in I_0 \backslash M_0$, на которых $a_k^{(0)} \leqslant a_{k_1}^{(0)}$. Приходим к представлению

$$P_0(x) = \max\left\{0,\, p_{k_1}^{(0)}(x);\; p_k^{(0)}(x),\, k \in I_1\right\}.$$

Здесь $x_{k_1}^{(0)} < x_k^{(0)}$ и $0 < a_{k_1}^{(0)} < a_k^{(0)}$ при всех $k \in I_1$. Покажем, что при этих условиях

$$P_0(x) = \max\left\{0,\, p_{k_1}^{(0)}(x)\right\} + \max\left\{0;\, p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x),\, k \in I_1\right\}. \qquad (24)$$

Равенство (24) будем проверять справа налево. Правую часть можно записать в виде

$$\max\left\{\max\left\{0,\, p_{k_1}^{(0)}(x)\right\} + \max\left\{0;\, p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x)\right\},\, k \in I_1\right\}.$$

Отметим, что при всех $k \in I_1$ справедлива формула

$$\max\{0,\ p_{k_1}^{(0)}(x)\} + \max\{0,\ p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x)\} = \max\{0,\ p_{k_1}^{(0)}(x),\ p_k^{(0)}(x)\}. \qquad (25)$$

Рис. 8 поясняет данную ситуацию.

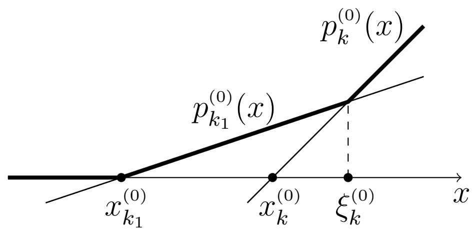

Рис. 8. Пояснение к формуле (25)

Если $\xi_k^{(0)}$ — точка, в которой $p_k^{(0)}(\xi_k^{(0)}) = p_{k_1}^{(0)}(\xi_k^{(0)})$, то равенство (25) легко проверяется при $x \leqslant x_{k_1}^{(0)}$, при $x \in \left[x_{k_1}^{(0)}, \xi_k^{(0)}\right]$ и при $x \geqslant \xi_k^{(0)}$.

В силу (25) для правой части равенства (24) получим представление

$$\max\left\{\max\left\{0,\, p_{k_1}^{(0)}(x),\, p_k^{(0)}(x)\right\},\, k \in I_1\right\} = \max\left\{0,\, p_{k_1}^{(0)}(x);\, p_k^{(0)}(x),\, k \in I_1\right\} = P_0(x).$$

Равенство (24) установлено.

Подведём предварительный итог. Для функции $P(x)$ вида (22) имеем

$$P(x) = p_{k_0}(x) + P_0(x) = p_{k_0}(x) + \max\left\{0,\, p_{k_1}^{(0)}(x)\right\} + P_1(x), \qquad (26)$$

где

$$P_1(x) = \max\bigl\{0;\, p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x),\, k \in I_1\bigr\},$$

причём при всех $k \in I_1$ коэффициент при x у аффинной функции

$$p_k^{(1)}(x) = p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x)$$

положителен. Приняв во внимание, что

$$\max\bigl\{0,\, p_{k_1}^{(0)}(x)\bigr\} = \max\bigl\{0,\, a_{k_1}^{(0)}(x - x_{k_1}^{(0)})\bigr\} = a_{k_1}^{(0)}(x - x_{k_1}^{(0)})_+,$$

перепишем формулу (26) в виде

$$P(x) = p_{k_0}(x) + a_{k_1}^{(0)}(x - x_{k_1}^{(0)})_+ + P_1(x).$$

К функции $P_1(x) = \max\bigl\{0;\, p_k^{(1)}(x),\, k \in I_1\bigr\}$ с положительными коэффициентами при x у аффинных функций $p_k^{(1)}(x)$ при всех $k \in I_1$ можно применить то же преобразование, что и к $P_0(x)$ (сделать основной шаг). Получим формулу, аналогичную (24). За конечное число таких преобразований придём к требуемому представлению функции $P(x)$.

Теорема доказана. $\square$

8°. Приведём сначала простой пример на применение теоремы 4.

ПРИМЕР 3. Пусть

$$P(x) = \max\{1, x, -x\}.$$

Покажем, что $P(x)$ приводится к виду

$$P(x) = -x + (x+1)_+ + (x-1)_+. \tag{27}$$

Предварительный шаг:

$$P(x) = -x + \max\{x+1, 2x, 0\}.$$

Основной шаг:

$$\max\{0, x+1, 2x\} = (x+1)_+ + (x-1)_+.$$

В результате приходим к формуле (27).

Рассмотрим более сложный пример.

ПРИМЕР 4. Пусть

$$P(x) = \max\big\{0,\ x+2,\ 2x+1,\ 3x,\ x-1,\ 4x-8,\ 5x-10,\ 3x-7,\ 6x-15\big\}. \quad (28)$$

Покажем, что $P(x)$ приводится к виду

$$P(x) = (x+2)_+ + 2(x-1)_+ + 3(x-5)_+. \quad (29)$$

В данном случае у аффинной функции $p_0(x) \equiv 0$ наименьший при x коэффициент, поэтому предварительный шаг ничего не меняет. Выполним основные шаги.

1) Имеем

$$x_1^{(0)} = -2,\ \ x_2^{(0)} = -\frac{1}{2},\ \ x_3^{(0)} = 0,\ \ x_4^{(0)} = 1,\ \ x_5^{(0)} = 2,\ \ x_6^{(0)} = 2,\ \ x_7^{(0)} = \frac{7}{3},\ \ x_8^{(0)} = \frac{5}{2};$$
$$a_1^{(0)} = 1,\ \ a_2^{(0)} = 2,\ \ a_3^{(0)} = 3,\ \ a_4^{(0)} = 1,\ \ a_5^{(0)} = 4,\ \ a_6^{(0)} = 5,\ \ a_7^{(0)} = 3,\ \ a_8^{(0)} = 6.$$

Единственный наименьший корень $x_1^{(0)} = -2$. Так как $a_1^{(0)} = a_4^{(0)}$, то функцию $p_4^{(0)}(x) = x - 1$ из правой части представления (28) удаляем. Получаем

$$P(x) = (x+2)_+ + \max\big\{0,\ x-1,\ 2x-2,\ 3x-10,\ 4x-12,\ 2x-9,\ 5x-17\big\}. \quad (30)$$

2) Выделяем функцию

$$P_1(x) = \max\big\{0,\ x-1,\ 2x-2,\ 3x-10,\ 4x-12,\ 2x-9,\ 5x-17\big\}. \quad (31)$$

Её атрибуты

$$x_1^{(1)} = 1,\ \ x_2^{(1)} = 1,\ \ x_3^{(1)} = \frac{10}{3},\ \ x_4^{(1)} = 3,\ \ x_5^{(1)} = \frac{9}{2},\ \ x_6^{(1)} = \frac{17}{5};$$
$$a_1^{(1)} = 1,\ \ a_2^{(1)} = 2,\ \ a_3^{(1)} = 3,\ \ a_4^{(1)} = 4,\ \ a_5^{(1)} = 2,\ \ a_6^{(1)} = 5.$$

Имеем два наименьших корня $x_1^{(1)} = 1$ и $x_2^{(1)} = 1$. Так как $a_1^{(1)} < a_2^{(1)}$, то функцию $p_1^{(1)}(x) = x - 1$ из представления (31) удаляем. Удаляем также и $p_5^{(1)}(x) = 2x - 9$ в силу того, что $a_5^{(1)} = a_2^{(1)}$. Получаем

$$P_1(x) = 2(x-1)_+ + \max\big\{0,\ x-8,\ 2x-10,\ 3x-15\big\}. \quad (32)$$

3) Выделяем функцию

$$P_2(x) = \max\big\{0,\ x-8,\ 2x-10,\ 3x-15\big\}. \quad (33)$$

Её атрибуты

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(2)} = 8, \;\; x_2^{(2)} = 5, \;\; x_3^{(2)} = 5;\\
&a_1^{(2)} = 1, \;\; a_2^{(2)} = 2, \;\; a_3^{(2)} = 3.
\end{aligned}
$$

Имеем два наименьших корня $x_2^{(2)} = 5$, $x_3^{(2)} = 5$. Так как $a_2^{(2)} < a_3^{(2)}$, то функцию $p_2^{(2)}(x) = 2x - 10$ из представления (33) удаляем. Удаляем и $p_1^{(2)}(x) = x - 8$ в силу того, что $x_3^{(2)} < x_1^{(2)}$, но $a_3^{(2)} > a_1^{(2)}$. Получаем

$$
P_2(x) = 3(x-5)_+. \tag{34}
$$

Объединив формулы (30)–(34), придём к представлению (29) функции $P(x)$ вида (28).

На рис. 9 изображён график функции $P(x)$.

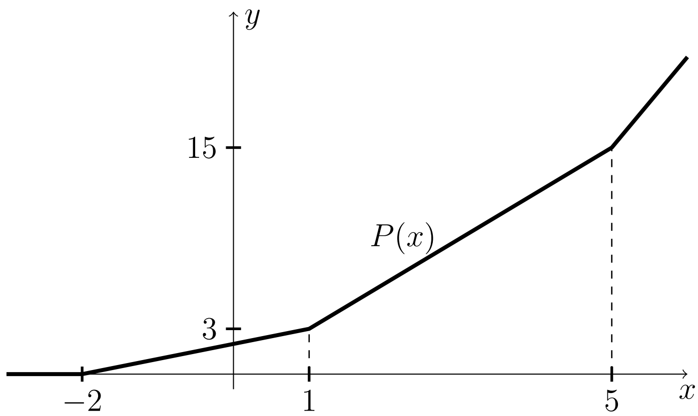

Рис. 9. График ломаной $P(x)$

9°. Приведённый анализ показывает, что функция одной переменной является ломаной (непрерывной кусочно-аффинной функцией) тогда и только тогда, когда её можно представить в виде разности максимумов двух конечных семейств аффинных функций. Этот факт делает естественным следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция n переменных

$$
F(x) = \max_{i \in 1:s} \bigl\{ \langle a_i, x \rangle + b_i \bigr\} - \max_{j \in 1:r} \bigl\{ \langle c_j, x \rangle + d_j \bigr\}
$$

называется кусочно-аффинной функцией.

Исследованию свойств многомерных кусочно-аффинных функций посвящены работы [4–6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1990. 432 с.

2. Бернштейн С. Н. *Собрание сочинений.* Том. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 5–7.

3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Полиномиальные сплайны.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 120 с.

4. Melzer D. *On the expressibility of piecewise-linear continuous functions as the difference of two piecewise-linear convex functions.* In: Demyanov V. F., Dixon L. C. W. (eds.) Quasidifferential Calculus, Springer: Berlin, Heidelberg. 1986. P. 118–134.

5. Kripfganz A., Schulze R. *Piecewise affine functions as a difference of two convex functions* // Optimization. 1987. Vol. 18. No. 1. P. 23–29.

6. Gorokhovik V. V., Zorko O. I. *Piecewise affine functions and polyhedral sets* // Optimization. 1994. Vol. 31. No. 3. P. 209–221.