ТЕОРЕМА СТОУНА–ВЕЙЕРШТРАССА*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

24 сентября 2019 г.

В докладе приводится подробное доказательство классической теоремы Стоуна–Вейерштрасса [1]. В идейном плане мы следуем книге [2, с. 471–476].

1°. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество и $C(K)$ — пространство непрерывных на K функций f с равномерной нормой

$$\|f\| = \max_{x \in K} \bigl|f(x)\bigr|.$$

Рассмотрим в $C(K)$ линейное подпространство A, замкнутое относительно поточечного умножения функций. Это значит, что вместе с функциями $p_1(x)$, $p_2(x)$ из A подпространству A принадлежит и их произведение $p_1(x) \cdot p_2(x)$. Подпространство A с указанным дополнительным свойством называется *алгеброй*.

Говорят, что алгебра A разделяет точки множества K, если для любой пары точек x_1, x_2 из K найдётся функция $p \in A$, такая, что $p(x_1) \neq p(x_2)$.

Говорят, что алгебра A не исчезает на множестве K, если для любой точки $x \in K$ найдётся функция $p \in A$ со свойством $p(x) \neq 0$.

Обозначим через $\bar{A}$ замыкание алгебры A в пространстве $C(K)$. По определению множество $\bar{A}$ состоит из функций $f \in C(K)$, для которых по любому $\varepsilon > 0$ найдётся функция $p \in A$, такая, что $\|f - p\| < \varepsilon$. Очевидно, что множество $\bar{A}$ также является алгеброй.

Справедлив следующий фундаментальный результат.

ТЕОРЕМА (Стоун)**.** *Если алгебра A разделяет точки компактного множества K и не исчезает на K, то $\bar{A} = C(K)$.*

То, что $\bar{A} \subset C(K)$, очевидно. Нужно доказать, что для любой функции $f \in C(K)$ по $\varepsilon > 0$ найдётся такая функция $p \in A$, что $\|f - p\| < \varepsilon$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/

2°. Предварительно рассмотрим два примера на применение теоремы Стоуна.

ПРИМЕР 1 (одномерный случай)**.** Пусть K — компакт на вещественной оси. В пространстве $C(K)$ рассмотрим алгебру A алгебраических полиномов всех степеней. Её образующими являются функции $p_0(x) \equiv 1$ и $p_1(x) = x$.

Очевидно, что алгебра A разделяет точки множества K (с помощью функции $p_1(x)$) и не исчезает на K (за счёт функции $p_0(x)$). По теореме Стоуна $\bar{A} = C(K)$. Значит, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА (Вейерштрасс)**.** *Для каждой функции $f \in C(K)$ по любому $\varepsilon > 0$ найдётся алгебраический полином*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k,$$

такой, что

$$\max_{x \in K} \bigl| f(x) - p(x) \bigr| < \varepsilon.$$

ПРИМЕР 2 (многомерный случай)**.** В пространстве $C(K)$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, рассмотрим алгебру A с образующими функциями

$$p_0(x) \equiv 1; \quad p_i(x) = x_i \quad \text{при} \quad i \in 1:n.$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Общий элемент алгебры A можно представить в виде алгебраического полинома от n переменных:

$$p(x) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \ldots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}. \tag{1}$$

Алгебра A не исчезает на K (за счёт $p_0(x)$). Покажем, что она разделяет точки множества K. Возьмём две различные точки x, y из K. Так как $x \neq y$, то найдётся индекс $i \in 1:n$, на котором $x_i \neq y_i$. Тогда $p_i(x) \neq p_i(y)$.

По теореме Стоуна для каждой функции $f \in C(K)$ по любому $\varepsilon > 0$ найдётся полином $p(x)$ вида (1), такой, что выполняется неравенство

$$\|f - p\| < \varepsilon.$$

Получили многомерный аналог теоремы Вейерштрасса.

3°. Нам понадобятся две подготовительные леммы.

ЛЕММА 1. *В условиях теоремы Стоуна для двух различных точек x, y из K и любых вещественных чисел c, d найдётся функция $p \in A$, удовлетворяющая интерполяционным условиям*

$$p(x) = c, \quad p(y) = d.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть два случая: $c = 1$, $d = 0$ и $c = 0$, $d = 1$. В первом случае нужно найти функцию $p \in A$, такую, что

$$p(x) = 1, \quad p(y) = 0. \tag{2}$$

Этим мы сейчас и займёмся. Случай $c = 0$, $d = 1$ исследуется аналогично.

Так как алгебра A разделяет точки множества K и не исчезает на нём, то существуют функции g, h из A со свойствами

$$g(x) \neq g(y), \quad h(x) \neq 0.$$

Построим функцию $s \in A$, у которой

$$s(x) \neq s(y), \quad s(x) \neq 0. \tag{3}$$

Если $g(x) \neq 0$, то можно взять $s = g$. При $g(x) = 0$ (и $g(y) \neq 0$) функцию s будем искать в виде $s = g + \lambda h$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Условия (3) примут вид

$$\lambda h(x) \neq g(y) + \lambda h(y), \quad \lambda h(x) \neq 0.$$

Второе условие выполняется при любом $\lambda \neq 0$. Первое условие равносильно следующему:

$$-g(y) + \lambda\big[h(x) - h(y)\big] \neq 0.$$

Так как $g(y) \neq 0$, то это условие выполняется при малых λ. Значит, при малых $\lambda \neq 0$ функция s удовлетворяет условиям (3).

Возьмём линейную комбинацию функций s^2 и s,

$$p = us^2 + vs.$$

Коэффициенты u, v подберём так, чтобы выполнялись условия (2).

Приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} us^2(x) + vs(x) &= 1, \\ us^2(y) + vs(y) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Найдём её решение. Первое уравнение умножим на $s(y)$, второе — на $s(x)$, после чего из первого уравнения вычтем второе. Получим

$$us(x)s(y)\big[s(x)-s(y)\big]=s(y).$$

В согласии с условиями (3) этому уравнению удовлетворяет число

$$u=\frac{1}{s(x)\big[s(x)-s(y)\big]}\,.$$

Второму уравнению системы (4) можно удовлетворить, положив

$$v=-us(y)=-\frac{s(y)}{s(x)\big[s(x)-s(y)\big]}\,.$$

Нетрудно проверить, что функция

$$p(t)=\frac{s^2(t)-s(y)s(t)}{s^2(x)-s(y)s(x)}$$

является требуемой — она принадлежит алгебре A и удовлетворяет условиям (2).

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 2. *Если $f\in\bar{A}$, то и $|f|\in\bar{A}$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Положим $M=\|f\|$.

Как известно [3], для функции $|x|$ найдётся алгебраический полином $B(x)$, такой, что

$$\max_{x\in[-1,1]}\big||x|-B(x)\big|<\tfrac{\varepsilon}{2M}.$$

Введём полином

$$Q(x)=MB(\tfrac{x}{M})=\sum_{k=0}^{m}b_kx^k.$$

Имеем

$$\max_{x\in[-M,M]}\big||x|-Q(x)\big|=\max_{x\in[-M,M]}\Big|M\big|\tfrac{x}{M}\big|-MB\big(\tfrac{x}{M}\big)\Big|=$$
$$=M\max_{x\in[-1,1]}\big||x|-B(x)\big|<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Как следствие,

$$\max_{x\in K}\Big|\big|f(x)\big|-\sum_{k=0}^{m}b_kf^k(x)\Big|<\tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Функция
$$F=\sum_{k=0}^{m} b_k f^k$$
принадлежит алгебре $\bar{A}$. По определению замыкания найдётся функция $p\in A$ со свойством $\|F-p\|<\frac{\varepsilon}{2}$. В силу (5) получим
$$\big\||f|-p\big\|\leqslant\big\||f|-F\big\|+\|F-p\|<\varepsilon.$$
Значит, $|f|\in\bar{A}$. Лемма доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. *Если f, g принадлежат $\bar{A}$, то функции* $\max\big\{f(x),g(x)\big\}$ *и* $\min\big\{f(x),g(x)\big\}$ *также принадлежат $\bar{A}$.*

Нужно принять во внимание, что
$$\max\{f,g\}=f+\max\{0,g-f\}=f+\tfrac{1}{2}\big(g-f+|g-f|\big)=\tfrac{1}{2}\big(f+g+|f-g|\big),$$
$$\min\{f,g\}=f+\tfrac{1}{2}\big(g-f-|g-f|\big)=\tfrac{1}{2}\big(f+g-|f-g|\big).$$

4°. Переходим к доказательству теоремы Стоуна. Зафиксируем $f\in C(K)$. Нужно по $\varepsilon>0$ найти функцию $g\in\bar{A}$, такую, что $\|f-g\|<\varepsilon$.

Возьмём произвольную точку $x\in K$ и построим функцию $g_x\in\bar{A}$ со свойствами
$$g_x(x)=f(x),\quad g_x(t)>f(t)-\varepsilon\quad\forall\, t\in K. \tag{6}$$
Построение основано на лемме 1, согласно которой для любой точки $y\in K$, $y\neq x$, найдётся функция $h_y\in A$, удовлетворяющая интерполяционным условиям
$$h_y(x)=f(x),\quad h_y(y)=f(y).$$
Данные равенства вместе с непрерывностью функций f и h_y позволяют выделить открытые окрестности U_x, U_y точек x, y, в которых
$$h_y(t)>f(t)-\varepsilon\quad\forall\, t\in(U_x\cup U_y)\cap K.$$
Система открытых множеств $\{U_x\cup U_y\}$, $y\in K$, $y\neq x$, образует покрытие компактного множества K. По лемме Бореля из него можно выделить конечное покрытие $\{U_x\cup U_{y_i}\}$, $i\in 1:r$. Очевидно, что функция
$$g_x(t)=\max\{h_{y_1}(t),\dots,h_{y_r}(t)\}$$
удовлетворяет условиям (6). Кроме того, по следствию из леммы 2 она принадлежит алгебре $\bar{A}$.

Так как $g_x(x) = f(x)$, то существует открытая окрестность $\widetilde{U}_x$ точки x, в которой

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \quad \forall\, t \in \widetilde{U}_x \cap K.$$

Из покрытия $\{\widetilde{U}_x\}$, $x \in K$, компактного множества K можно выделить конечное покрытие $\{\widetilde{U}_{x_1}, \ldots, \widetilde{U}_{x_s}\}$. Функция

$$g(t) = \min\{g_{x_1}(t), \ldots, g_{x_s}(t)\}$$

удовлетворяет условию

$$g(t) < f(t) + \varepsilon \quad \forall\, t \in K. \tag{7}$$

По следствию из леммы 2 она принадлежит алгебре $\bar{A}$. Отметим также, что в силу (6) при всех $i \in 1 : s$ выполняются неравенства

$$g_{x_i}(t) > f(t) - \varepsilon \quad \forall\, t \in K.$$

Поэтому

$$g(t) > f(t) - \varepsilon \quad \forall\, t \in K. \tag{8}$$

Объединив неравенства (7) и (8), получим $\|f - g\| < \varepsilon$. Это означает, что функция f является предельной точкой множества $\bar{A}$. Так как $\bar{A}$ замкнутое множество, то $f \in \bar{A}$.

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Stone M. H. *The generalized Weierstrass approximation theorem* // Math. Magazine. 1948. Vol. 21. P. 167–184, 237–254.

2. Зорич В. А. *Математический анализ. Часть вторая.* М.: МЦНМО, 2002. XIV + 787 с.

3. Малозёмов В. Н. *О многочленах Бернштейна* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 17 сентября 2019 г. (`http://apmath.spbu.ru/cnsa/reps19.shtml#0917`)