РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КУБИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

Г. А. Енгалыч — bilbo1997@mail.ru

А. В. Плоткин — avplotkin@gmail.com

14 марта 2019 г.

1°. В данной работе приводится решение одной задачи кубического программирования, представленной в сборнике [1] под номером 86. Результатом работы является не только нахождения верного решения, но и анализ применяемого метода.

Перейдем к постановке исходной задачи:

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{j=1}^{5} e_j x_j + \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{5} d_j x_j^3 \to \inf_{x \in \Omega}, \\ \Omega : \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_j - b_i \geqslant 0, \quad i \in 1:10, \\ x_j \geqslant 0, \quad j \in 1:5, \end{cases} \end{gathered} \tag{1}$$

где значения a_{ij}, b_i, c_{ij}, d_j, e_j приведены в Дополнении.

В целях упрощения записи объединим знаковые неравенства с остальными и запишем задачу в более компактной форме:

$$\begin{gathered} f(x) \to \inf, \\ Ax \geqslant b, \end{gathered} \tag{2}$$

где $A \in \mathbb{R}^{15\times 5}$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Нашей целью является нахождение стационарной точки x_* для задачи (2), то есть точки, в которой выполняются необходимые условия минимума (условия Куна–Таккера):

$$\begin{gathered} f'(x_*) = u_* A, \\ \big(A[i,N] \times x_*[N] - b[i]\big) \times u_*[i] = 0, \quad i \in 1:15, \\ u_* \geqslant \mathbf{0}, \end{gathered}$$

где $N = 1:5$.

Зафиксируем число $\lambda > 0$, являющееся параметром метода, и введем обозначение $D = \lambda E$, где E — единичная матрица размера 5×5. Выберем начальное приближение $x_0 \in \Omega$.

Шаг метода. Пусть имеется текущее приближение $x_k \in \Omega$. Рассмотрим линеаризованную задачу следующего вида:

$$\begin{gathered} Q_k(h) := \langle f'(x_k), h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Dh, h\rangle \to \inf, \\ Ah \geqslant -\eta_k, \end{gathered}$$

где $\eta_k = Ax_k - b$. Это задача квадратичного программирования, которая имеет решение (множество планов непусто, целевая функция ограничена снизу) и решение единственно. Обозначим его h_k и пусть $q_k := Q_k(h_k) \leqslant 0$. Если $h_k = \mathbf{0}$ или, что равносильно, $q_k = 0$, то x_k — стационарная точка. Вычисления заканчиваются.

В противном случае перейдем к следующему приближению

$$x_{k+1} = x_k + t_k h_k,$$

где t_k — первое число в последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$, при котором выполнится неравенство

$$f(x_k + t_k h_k) \leqslant f(x_k) - t_k \left(|q_k| + \tfrac{1}{4}\lambda \|h_k\|^2\right).$$

Полученный вектор x_{k+1} принадлежит Ω и $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Описание метода завершено.

Идея этого метода приведена в книге [2, с. 120–122].

3°. Вернемся к задаче (1). Положим $\lambda = 70$ и в качестве начального приближения возьмем

$$x_0 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Вычисления будем заканчивать, когда $|q_k|$ уменьшится до 10^{-7}.

На рис. 1 приведены результаты вычислений. За 24 итерации удалось достичь требуемой точности. Полученное решение

$$x_* \approx (0.3, 0.33347, 0.4, 0.42831, 0.22397)$$

совпадает с заявленным в сборнике [1].

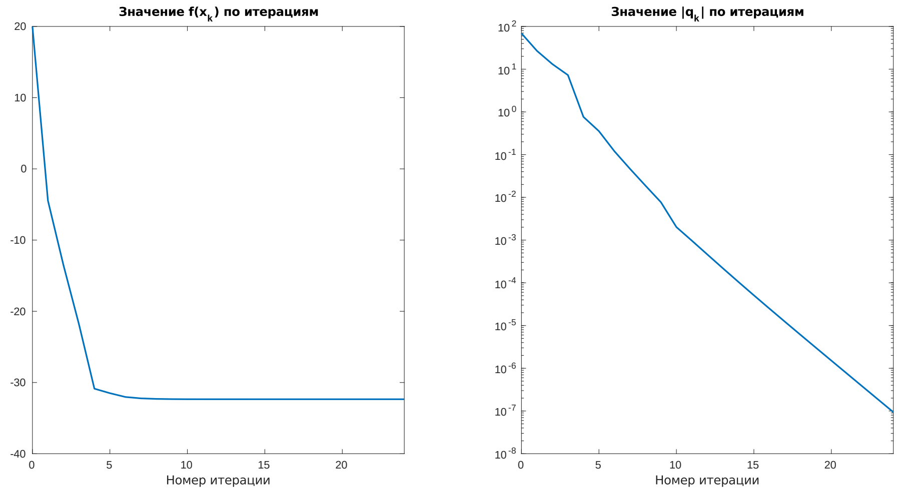

Рис. 1. Зависимость $f(x_k)$ и $|q_k|$ от номера итерации

Изучим теперь вопрос о влиянии параметра λ на количество итераций. Используя принятое начальное приближение x_0 и точность 10^{-7}, посчитаем количество итераций при различных целочисленных λ из отрезка $[50, 100]$. На рис. 2 приведен график полученной зависимости. Минимальное количество итераций — 17. Оно достигается при $\lambda = 71$ и $\lambda = 72$.

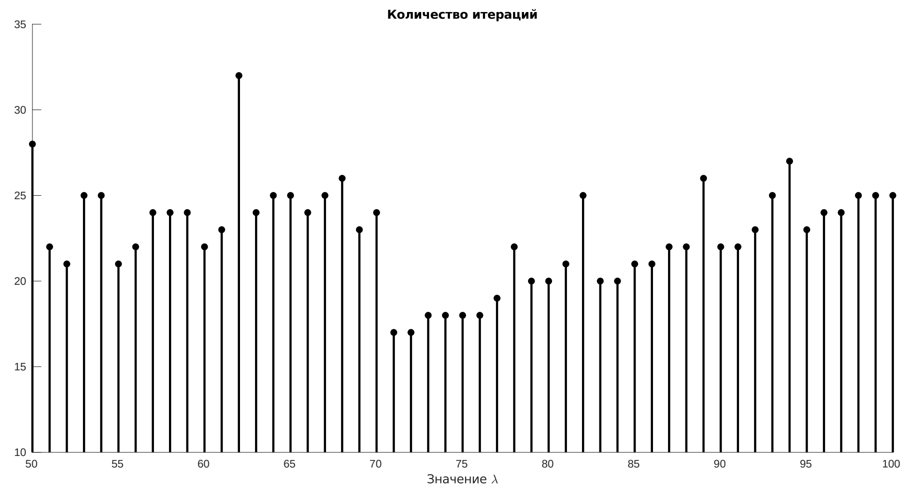

Рис. 2. Количество итераций при различных $\lambda \in [50, 100]$

Указанные значения параметра λ являются устойчивыми. Это проверялось так. Случайным образом были выбраны 1000 начальных приближений из шара с центром в точке x_0 и радиусом, равным единице. Для каждого λ из отрезка $[50, 100]$ было подсчитано количество начальных приближений, для которых это λ было оптимальным по числу итераций метода. На рис. 3 приведены полученные результаты. Выяснилось, что для большинства начальных приближений оптимальным по количеству итераций является значение $\lambda = 69$.

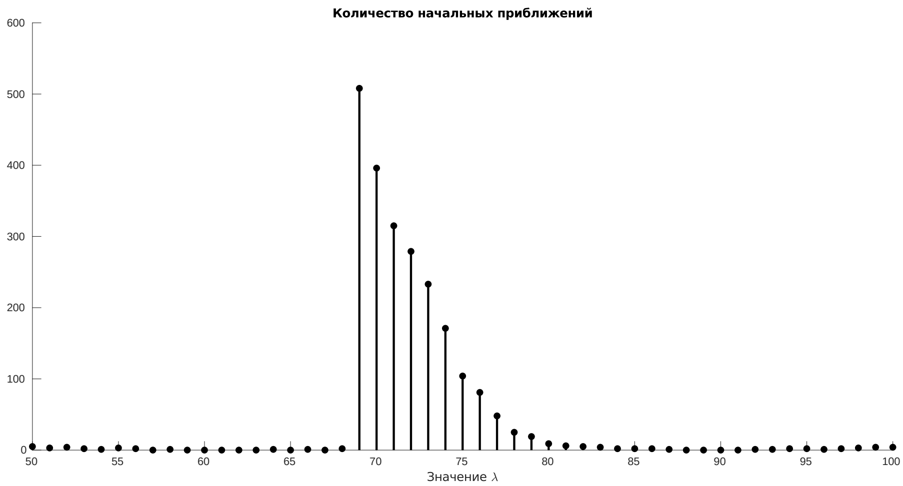

Рис. 3. Количество начальных приближений, при которых указанное λ оптимально по числу итераций

4°. Дополнение. Ниже приведены данные для задачи (1).

$$d = (4, 8, 10, 6, 2),$$
$$e = (-15, -27, -36, -18, -12),$$
$$b = (-40, -2, -0.25, -4, -4, -1, -40, -60, 5, 1),$$
$$\{c_{ij}\} = \begin{pmatrix} 30 & -20 & -10 & 32 & -10 \\ -20 & 39 & -6 & -31 & 32 \\ -10 & -6 & 10 & -6 & -10 \\ 32 & -31 & -6 & 39 & -20 \\ -10 & 32 & -10 & -20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$\{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0.4 & 2 \\ -3.5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -9 & -2 & 1 & -2.8 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Hock and K. Schittkowski, *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 187, Springer-Verlag, Berlin, 1981. 177 p.

2. Гаврилин М. К., Малоземов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.