ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КЛАССОВ КВАЗИ- И КОДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ*

Г. Ш. Тамасян

g.tamasyan@spbu.ru

11 апреля 2019 г.

1°. Пусть на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана конечная функция $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(x)$ называется *квазидифференцируемой* в точке $x_0 \in X$, если существуют выпуклые компакты $\underline{\partial} f(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ и $\overline{\partial} f(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ такие, что приращение функции f допускает представление

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \max_{v \in \underline{\partial} f(x_0)} \langle v, h\rangle + \min_{w \in \overline{\partial} f(x_0)} \langle w, h\rangle + o(\|h\|), \tag{1}$$

где $o(\|h\|)/\|h\| \longrightarrow 0$ при $h \longrightarrow \mathbf{0}$.

Положительно однородный по h функционал

$$\ell(x_0, h) = \max_{v \in \underline{\partial} f(x_0)} \langle v, h\rangle + \min_{w \in \overline{\partial} f(x_0)} \langle w, h\rangle$$

называется *квазидифференциалом* функции f в точке x_0. Очевидно, что он непрерывен по h. Множества $\underline{\partial} f(x_0)$ и $\overline{\partial} f(x_0)$, определяющие $\ell(x_0, h)$, называются *субдифференциальным и супердифференциальным* множествами функции f в точке x_0. Пару выпуклых компактов $\left[\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)\right]$ будем называть *квазидифференциальным* множеством функции f в точке x_0 и обозначать символом $\mathfrak{D} f(x_0)$.

Из (1) следует, что у квазидифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ существуют производные по всем направлениям и что

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial g} := \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x+\alpha g) - f(x)}{\alpha} = \ell(x_0, g) \qquad \forall g: \ \|g\| = 1. \tag{2}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Понятие квазидифференцируемой функции ввели В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов, опираясь на представлении производной по направлению в виде (2) (см. [1, с. 129], [2, с. 186]).

Отметим, что пара выпуклых компактов $\left[\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)\right]$, участвующая в представлении (1), определяется неоднозначно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пары выпуклых компактов $[V_1, W_1]$ и $[V_2, W_2]$ называются эквивалентными, если

$$V_1 - W_2 = V_2 - W_1.$$

Здесь и далее используется вычитание по Минковскому, т. е.

$$A - B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Приведём характерный пример эквивалентных пар выпуклых компактов:

$$[V, W] \quad \text{и} \quad [V - C, W + C].$$

ЛЕММА 1. *Пусть V, W и C — произвольные выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$. Справедливо равенство*

$$\max_{v \in V - C} \langle v, h\rangle + \min_{w \in W + C} \langle w, h\rangle = \max_{v \in V} \langle v, h\rangle + \min_{w \in W} \langle w, h\rangle. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим первое слагаемое в левой части равенства (3). В силу того, что максимум берётся от линейной функции на выпуклом компакте, имеем

$$\begin{aligned}\max_{u \in V - C} \langle u, h\rangle &= \max_{\substack{v \in V\\ c \in C}} \langle v - c, h\rangle = \max_{\substack{v \in V\\ c \in C}} \left[\langle v, h\rangle + \langle -c, h\rangle\right] = \\ &= \max_{\substack{v \in V\\ c \in C}} \langle v, h\rangle + \max_{\substack{v \in V\\ c \in C}} \langle -c, h\rangle = \max_{v \in V} \langle v, h\rangle - \min_{c \in C} \langle c, h\rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично рассматривается второе слагаемое в левой части равенства (3) и показывается, что

$$\min_{u \in W + C} \langle u, h\rangle = \min_{w \in W} \langle w, h\rangle + \min_{c \in C} \langle c, h\rangle. \tag{5}$$

Сложив (4) и (5), получим (3). □

СЛЕДСТВИЕ. *Квазидифференциальное множество $\mathfrak{D} f(x_0)$ функции f в точке x_0 является элементом некоторого класса эквивалентных пар выпуклых компактов.*

2°. Рассмотрим введённое В. Ф. Демьяновым понятие кодифференцируемой функции (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $f(x)$ называется *кодифференцируемой* в точке $x \in X$, если существуют выпуклые компакты $\underline{d}f(x) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $\overline{d}f(x) \subset \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такие, что приращение функции f допускает представление

$$f(x+h) - f(x) = \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} [a + \langle v, h \rangle] + \min_{(b,w) \in \overline{d}f(x)} [b + \langle w, h \rangle] + o(\|h\|), \qquad (6)$$

где $o(\|h\|)/\|h\| \longrightarrow 0$ при $h \longrightarrow \mathbf{0}$.

Пара множеств $[\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ называется *кодифференциальным* множеством функции f в точке x и обозначается символом $Df(x)$. Множества $\underline{d}f(x)$ и $\overline{d}f(x)$ называются *гиподифференциальным* и *гипердифференциальным* множествами функции f в точке x. Элементы гиподифференциального множества называются *гипоградиентами*, элементы гипердифференциального множества — *гиперградиентами.*

Из определения 3 следует, что при $h = \mathbf{0}$ справедливо равенство

$$\max_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} a + \min_{(b,w) \in \overline{d}f(x)} b = 0. \qquad (7)$$

Кодифференциальное множество $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ функции f в точке x определяется неоднозначно. Проверяется так же, как и в случае квазидифференцируемых функций.

ЛЕММА 2. *Среди семейства кодифференциальных множеств функции f в точке x всегда найдётся такое кодифференциальное множество $Df(x) = = [V, W]$, что*

$$\max_{(a,v) \in V} a = \min_{(b,w) \in W} b = 0. \qquad (8)$$

Доказательство. Положим

$$\widehat{a} := \max_{(a,v) \in V} a, \qquad \widehat{b} := \min_{(b,w) \in W} b.$$

В силу (7) имеем

$$\widehat{a} + \widehat{b} = 0.$$

Рассмотрим пару выпуклых компактов

$$V_1 = V - C, \qquad W_1 = W + C,$$

где $C = \{(\widehat{a}, \mathbf{0})\}$ — одноточечное множество в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Очевидно, что пары выпуклых компактов $[V, W]$ и $[V_1, W_1]$ являются эквивалентными, т. е. справедливо равенство

$$\max_{(a,v)\in V} [a + \langle v, h\rangle] + \min_{(b,w)\in W} [b + \langle w, h\rangle] =$$
$$= \max_{(a,v)\in V_1} [a + \langle v, h\rangle] + \min_{(b,w)\in W_1} [b + \langle w, h\rangle] .$$

Наконец, заметим, что в гиподифференциальном множестве V_1 первая компонента произвольного гипоградиента не больше нуля, а в гипердифференциальном множестве W_1 первая компонента произвольного гиперградиента не меньше нуля.

$\square$

Теперь мы можем перейти к основному результату доклада. Для простоты мы ограничимся случаем, когда квазидифференциальное и кодифференциальное множества являются многогранными, т. е. множества $\underline{\partial} f(x)$, $\overline{\partial} f(x)$, $\underline{d} f(x)$, $\overline{d} f(x)$ представляют собой выпуклые оболочки конечного числа точек.

ТЕОРЕМА. *Множество кодифференцируемых в точке x функций совпадает с множеством квазидифференцируемых в той же точке функций.*

Доказательство. Сперва покажем, что любая квазидифференцируемая функция является кодифференцируемой. Пусть функция f — квазидифференцируема в точке x, т. е. справедливо разложение

$$f(x + h) - f(x) = \max_{v\in\underline{\partial} f(x)} \langle v, h\rangle + \min_{w\in\overline{\partial} f(x)} \langle w, h\rangle + o(\|h\|), \tag{9}$$

где $o(\|h\|)/\|h\| \longrightarrow 0$ при $h \longrightarrow \mathbf{0}$, $\underline{\partial} f(x) \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\partial} f(x) \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компакты.

Для того чтобы получить представление (6) достаточно в качестве кодифференциального множества взять $Df(x) = [\underline{d} f(x), \overline{d} f(x)]$, где

$$\underline{d} f(x) = \{(a, v) \mid a = 0,\ v \in \underline{\partial} f(x)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$
$$\overline{d} f(x) = \big\{(b, w) \mid b = 0,\ w \in \overline{\partial} f(x)\big\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Обратно, пусть функция f — кодифференцируема в точке x. Имеем

$$f(x + h) - f(x) = \max_{(a,v)\in\underline{d} f(x)} [a + \langle v, h\rangle] + \min_{(b,w)\in\overline{d} f(x)} [b + \langle w, h\rangle] + o(\|h\|), \tag{10}$$

где $o(\|h\|)/\|h\| \longrightarrow 0$ при $h \longrightarrow \mathbf{0}$. Будем считать, что кодифференциальное множество $Df(x) = [\underline{d} f(x), \overline{d} f(x)]$ удовлетворяет условию (8).

Тогда, в силу того, что множества $\underline{d}f(x)$ и $\overline{d}f(x)$ предполагаются многогранными, при достаточно малых (по норме) $h \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства (см. рис.)

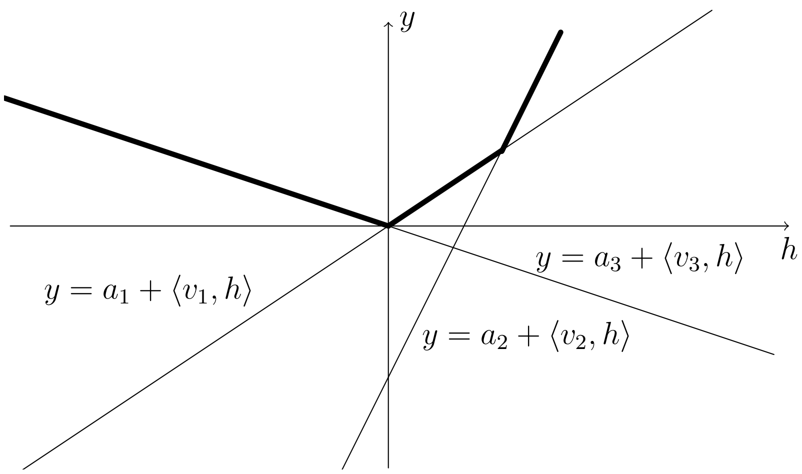
$$\max_{(a,v)\in\underline{d}f(x)} [a + \langle v, h\rangle] = \max_{(0,v)\in\underline{d}f(x)} \langle v, h\rangle = \max_{v\in\underline{\partial}f(x)} \langle v, h\rangle, \tag{11}$$

$$\min_{(b,w)\in\overline{d}f(x)} [b + \langle w, h\rangle] = \min_{(0,w)\in\overline{d}f(x)} \langle w, h\rangle = \min_{w\in\overline{\partial}f(x)} \langle w, h\rangle, \tag{12}$$

где

$$\underline{\partial}f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid a = 0,\ (a, v) \in \underline{d}f(x)\},$$
$$\overline{\partial}f(x) = \left\{w \in \mathbb{R}^n \mid b = 0,\ (b, w) \in \overline{d}f(x)\right\}.$$

Подставив полученные выражения (11) и (12) в (10) получим (9), т. е. функция f квазидифференцируема в точке x. □



3°. В работе [3] приводится доказательство этого утверждения в случае, когда квазидифференциальное и кодифференциальное множества являются произвольными выпуклыми компактами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1990. 432 с.

2. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. *Недифференцируемая оптимизация.* М.: Наука, 1981. 384 с.

3. Dolgopolik M. V. *A convergence analysis of the method of codifferential descent* // Computational Optimization and Applications, 2018, vol. 71, no. 3, pp. 879–913. (`https://doi.org/10.1007/s10589-018-0024-0`)