СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ЛИНЕАРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ*

В. Н. Малозёмов Е. К. Чернэуцану
v.malozemov@spbu.ru katerinache@yandex.ru

11 февраля 2020 г.

1°. Рассмотрим дискретную минимаксную задачу

$$\varphi(x) := \max_{i \in I} f_i(x) \to \inf_{x \in \mathbb{R}^n}. \tag{1}$$

Здесь $f_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}^n$ функции, градиенты которых $f_i'(x)$ удовлетворяют условию Липшица на каждом компактном множестве, принадлежащем $\mathbb{R}^n$.

При решении задачи (1) на первом этапе ограничиваются нахождением стационарных точек функции $\varphi(x)$.

2°. Введём обозначение

$$R(x) = \big\{ i \in I \mid f_i(x) = \varphi(x) \big\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка $x_* \in \mathbb{R}^n$ называется стационарной точкой функции $\varphi(x)$, если существуют неотрицательные числа α_i^*, $i \in R(x_*)$, в сумме равные единице, такие, что*

$$\sum_{i \in R(x_*)} \alpha_i^* f_i'(x_*) = \mathbb{O}.$$

В стационарной точке производные функции φ по всем направлениям неотрицательны.

Можно дать эквивалентное определение стационарной точки, используя идею линеаризации. При фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ введём вспомогательную задачу квадратичного программирования:

$$\max_{i \in I} \Big\{ f_i(x) + \big\langle f_i'(x), p \big\rangle \Big\} + \tfrac{1}{2}\|p\|^2 \to \min_{p \in \mathbb{R}^n}. \tag{2}$$

Эта задача имеет решение $p = p(x)$ и оно единственно.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

ЛЕММА 1. *Точка x_* будет стационарной точкой функции $\varphi(x)$ тогда и только тогда, когда решение $p(x_*)$ задачи (2) при $x = x_*$ удовлетворяет условию $p(x_*) = \mathbb{O}$.*

Доказательство этого утверждения имеется, например, в [1].

3°. Опишем принципиальную схему метода линеаризации для нахождения стационарных точек.

В качестве начального приближения берём произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Пусть уже имеется k-е приближение x_k. Находим решение $p_k = p(x_k)$ вспомогательной задачи (2) при $x = x_k$. Если $p_k = \mathbb{O}$, то по лемме 1 точка x_k — стационарная. Процесс заканчивается. В противном случае вычисляем величины

$$\beta(x_k) = \max_{i\in I}\Big\{ f_i(x_k) + \big\langle f_i'(x_k), p_k \big\rangle \Big\},$$
$$\Delta(x_k) = \varphi(x_k) - \beta(x_k).$$

В качестве следующего приближения берём точку

$$x_{k+1} = x_k + t_k p_k,$$

где t_k — первое число в последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$, при котором выполняется неравенство

$$\varphi(x_k + t_k p_k) \leqslant \varphi(x_k) - \gamma\, t_k \Delta(x_k). \tag{3}$$

Фиксированное $\gamma \in (0,1)$ — параметр метода.

Описание метода линеаризации завершено.

4°. Разберёмся со вспомогательными величинами

$$\beta(x) = \max_{i\in I}\Big\{ f_i(x) + \big\langle f_i'(x), p(x) \big\rangle \Big\}, \tag{4}$$
$$\Delta(x) = \varphi(x) - \beta(x). \tag{5}$$

Для этого запишем задачу квадратичного программирования, эквивалентную задаче (2):

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\|p\|^2 + \beta \to \min, \\ -\big\langle f_i'(x), p \big\rangle + \beta \geqslant f_i(x),\ i \in I. \end{gathered} \tag{6}$$

Если $\big(p(x), \beta(x)\big)$ — решение задачи (6), то $p(x)$ — решение задачи (2) и для $\beta(x)$ справедлива формула (4).

Пара $p = \mathbb{O}$, $\beta = \varphi(x)$ удовлетворяет ограничениям задачи (6), поэтому

$$\tfrac{1}{2}\big\|p(x)\big\|^2 + \beta(x) \leqslant \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что

$$\|p(x)\|^2 \leqslant 2\big(\varphi(x) - \beta(x)\big) = 2\Delta(x). \tag{7}$$

В частности,

$$\Delta(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

ЛЕММА 2. *Точка x_* будет стационарной точкой функции $\varphi(x)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\Delta(x_*) = 0$.*

Доказательство. Пусть x_* — стационарная точка. По лемме 1, $p(x_*) = \mathbb{O}$. В силу (4) и (5) получаем $\Delta(x_*) = 0$. Наоборот, пусть $\Delta(x_*) = 0$. В силу (7), $p(x_*) = \mathbb{O}$. Это гарантирует стационарность точки x_*. □

По определению функций $\varphi(x)$ и $\beta(x)$ имеем

$$\varphi(x) - \beta(x) \leqslant \max_{i\in I}\Big|\big\langle f_i'(x), p(x)\big\rangle\Big| \leqslant \|p(x)\| \cdot \max_{i\in I}\|f_i'(x)\|.$$

На основании (7) получаем

$$\|p(x)\|^2 \leqslant 2\|p(x)\| \cdot \max_{i\in I}\|f_i'(x)\|,$$

так что

$$\|p(x)\| \leqslant 2\max_{i\in I}\|f_i'(x)\|. \tag{8}$$

5°. Докажем слабую сходимость метода линеаризации в предположении, что множество

$$\mathscr{L}_0 = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\big\}$$

ограничено (и значит, компактно). Согласно описанию метода вычисления продолжаются, пока $p_k \neq \mathbb{O}$. По лемме 2 условие $p_k \neq \mathbb{O}$ равносильно условию $\Delta(x_k) > 0$. Формула (3) для выбора шага t_k гарантирует, что $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$. Таким образом, все точки последовательности $\{x_k\}$ принадлежат компактному множеству $\mathscr{L}_0$. На $\mathscr{L}_0$ функция $\varphi(x)$ ограничена снизу. Значит, строго убывающая последовательность $\big\{\varphi(x_k)\big\}$ имеет предел. В частности,

$$\lim_{k\to\infty}\big(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})\big) = 0. \tag{9}$$

ТЕОРЕМА (о слабой сходимости метода линеаризации). *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k\to\infty}\Delta(x_k) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$c = 2\max_{x\in\mathscr{L}_0}\max_{i\in I}\bigl\|f_i'(x)\bigr\|.$$

Согласно (8) имеем

$$\bigl\|p(x)\bigr\| \leqslant c \quad \forall x\in\mathscr{L}_0. \tag{10}$$

Множество $\mathscr{L}_0 + B_c$, где $B_c = \bigl\{p\in\mathbb{R}^n \mid \|p\|\leqslant c\bigr\}$, компактно. По предположению все градиенты $f_i'(x)$ на таком множестве удовлетворяют условию Липшица. Значит, при некотором $L>0$ и всех $i\in I$, $x\in\mathscr{L}_0$ и $p\in B_c$ выполняется неравенство

$$\bigl\|f_i'(x+p) - f_i'(x)\bigr\| \leqslant L\|p\|. \tag{11}$$

Воспользуемся теоремой о среднем. Запишем

$$\begin{gathered}f_i(x_k+tp_k) = f_i(x_k) + t\bigl\langle f_i'(x_k+\theta_i tp_k), p_k\bigr\rangle = \\ = (1-t)f_i(x_k) + t\Bigl[f_i(x_k) + \bigl\langle f_i'(x_k), p_k\bigr\rangle\Bigr] + \\ + t\bigl\langle f_i'(x_k+\theta_i tp_k) - f_i'(x_k), p_k\bigr\rangle.\end{gathered}$$

В силу (10), (11) и (7) при $t\in[0,1]$ получаем

$$\begin{gathered}f_i(x_k+tp_k) \leqslant (1-t)\varphi(x_k) + t\beta(x_k) + Lt^2\|p_k\|^2 \leqslant \\ \leqslant \varphi(x_k) - t\bigl[\varphi(x_k)-\beta(x_k)\bigr] + 2Lt^2\Delta(x_k) = \\ = \varphi(x_k) - t(1-2Lt)\Delta(x_k).\end{gathered}$$

При $t\in[0,1]$ и $1-2Lt\geqslant\gamma$, то есть при

$$0 < t \leqslant \min\left\{1, \frac{1-\gamma}{2L}\right\} =: \hat{t},$$

выполняется неравенство (независимо от k)

$$\varphi(x_k+tp_k) \leqslant \varphi(x_k) - \gamma\, t\Delta(x_k). \tag{12}$$

Напомним, что шаг t_k в методе линеаризации выбирается как первое $t\in \in\{1,\frac12,\frac14,\ldots\}$, при котором выполняется неравенство (12). Пусть $\frac{1}{2^s} < \hat{t} \leqslant \frac{1}{2^{s-1}}$ при некотором натуральном s. По определению t_k имеем

$$t_k \geqslant \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2\cdot 2^{s-1}} \geqslant \tfrac12\hat{t}.$$

Значит,

$$\varphi(x_k+t_kp_k) \leqslant \varphi(x_k) - \tfrac12\gamma\,\hat{t}\Delta(x_k).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$0 < \Delta(x_k) \leqslant \frac{2}{\gamma\,\hat{t}}\bigl[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})\bigr].$$

Отсюда и из (9) следует, что $\Delta(x_k)$ стремится к нулю при $k\to\infty$.

Теорема доказана. □

6°. Более широкий анализ сходимости метода линеаризации для решения дискретных минимаксных задач (при другой регулировке шага) представлен в книгах [2, с. 258–264] и [3, с. 94–107].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Стационарные и чебышёвские точки в минимаксных задачах* / В кн.: Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 182–191. (`http://dha.spb.ru/reps13.shtml#0425`)

2. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. *Численные методы в экстремальных задачах.* М.: Наука, 1975, 320 с.

3. Пшеничный Б. Н. *Метод линеаризации.* М.: Наука, 1983. 136 с.