О ГЛОБАЛЬНОМ МАКСИМУМЕ В ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ*

Г. Ш. Тамасян g.tamasyan@spbu.ru

Г. С. Шульга gdextrous@gmail.com

3 марта 2020 г.

1°. Доклад посвящен решению следующей экстремальной задачи: *в заданном d-мерном параллелепипеде Ω требуется разместить $m \geqslant 2$ точек $x_1, \ldots, x_m$ так, чтобы сумма квадратов расстояний между всеми парами этих точек была максимальной.*

Формально задачу можно записать так:

$$F\left(x_1, \ldots, x_m\right) := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \|x_i - x_j\|^2 \longrightarrow \max_{\substack{x_k \in \Omega \\ k \in 1:m}}, \tag{1}$$

где $x_1, \ldots, x_m$ из $\mathbb{R}^d$, $\Omega = \{y = (y_1, \ldots, y_d) \mid a_i \leqslant y_i \leqslant b_i \text{ при всех } i \in 1:d\}$, $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_d^2}$.

Нетрудно убедится, что целевая функция F является выпуклой, и глобальный максимум достигается на границе множества Ω. Отметим, также, что поставленная задача является многоэкстремальной и глобальный максимум не единственный.

Замечание. В силу того, что функция F принимает неотрицательные значения на всем пространстве, несложно понять, что минимальное (нулевое) значение достигается только в случае, когда $x_1 = \ldots = x_m$.

2°. С помощью следующего вспомогательного утверждения задачу (1) сведём к решению более простой.

ЛЕММА. *Справедливо равенство*

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \|x_i - x_j\|^2 = m \sum_{i=1}^{m} \left\| x_i - \tfrac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j \right\|^2. \tag{2}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/

Доказательство. Для начала заметим, что левая часть тождества (2) равна следующему выражению

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\|x_i - x_j\|^2,$$

которое, как легко проверить, можно привести к виду

$$m\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^2 - \Big\|\sum_{j=1}^{m}x_j\Big\|^2. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим правую часть равенства (2). Так как

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(x_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j\Big) = \mathbf{0}_d,$$

то

$$\sum_{i=1}^{m}\Big\langle x_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j, x_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j\Big\rangle = \sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^2 - \frac{1}{m}\Big\|\sum_{j=1}^{m}x_j\Big\|^2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) очевидным образом следует (2).

Лемма доказана. □

Положим $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kd})$, $k = 1 : m$. В силу (2), целевая функция задачи (1) примет вид

$$F(x_1, \ldots, x_m) = m\sum_{i=1}^{m}\Big\|x_i - \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m}x_\ell\Big\|^2 = m\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d}\Big(x_{ik} - \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m}x_{\ell k}\Big)^2 =$$

$$= m\sum_{k=1}^{d}\sum_{i=1}^{m}\Big(x_{ik} - \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m}x_{\ell k}\Big)^2. \tag{5}$$

Пусть $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Введём функцию

$$\varphi(y) := \sum_{i=1}^{m}\Big(y_i - \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m}y_\ell\Big)^2.$$

Тогда выражение для целевой функции (5) можно переписать так

$$F(x_1, \ldots, x_m) = m\sum_{k=1}^{d}\varphi(x_{1k}, \ldots, x_{mk}). \tag{6}$$

Получили, что исследуемая на максимум функция F приняла вид сепарабельной функции по группе переменных $(x_{1k}, \ldots, x_{mk})$, $k \in 1 : d$.

3°. Принимая во внимание структуру ограничений задачи (1) и вид целевой функции (6), для поиска глобального максимума функции F достаточно решить одну задачу максимизации квадратичной функции с простейшими ограничениями, а именно, максимизировать функцию φ на m-мерном кубе.

Обозначим $I = 1 : m$. Зафиксируем $k \in 1 : d$. Положим $a = a_k$, $b = b_k$, $y_j = x_{jk}$, $j \in I$. Рассмотрим задачу

$$\varphi(y) = \sum_{i \in I} \Big(y_i - \tfrac{1}{m} \sum_{\ell \in I} y_\ell \Big)^2 \longrightarrow \max_{\substack{a \leqslant y_j \leqslant b \\ j \in I}}. \tag{7}$$

Пусть $c \in \mathbb{R}$ произвольная точка отрезка $[a, b]$. Очевидно, что при $y_j = c$, $j \in I$, функция $\varphi(y)$ принимает нулевое значение, т. е. $y = (c, \ldots, c) \in \mathbb{R}^m$ — точка доставляющая глобальный минимум функции φ. Отметим, что среди них имеются две вершины m-мерного куба $y = (a, \ldots, a)$ и $y = (b, \ldots, b)$.

Так как глобальный максимум выпуклой функции φ на m-мерном кубе достигается в вершинах куба, то сами точки доставляющие глобальный максимум, на основании вышесказанного, будем искать среди точек вида $\hat{y} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m)$:

$$\hat{y}_j = a, \quad j \in I_a, \qquad \hat{y}_k = b, \quad k \in I_b,$$

где I_a, I_b — непустые подмножества множества I, такие, что $I_a \cup I_b = I$.

Пусть $|I_a| = s$, где $1 \leqslant s \leqslant m-1$. Тогда $|I_b| = m - s$. Найдём s, при котором функция $\varphi(\hat{y})$ примет наибольшее значение.

Учитывая, что $\sum_{\ell \in I} \hat{y}_\ell = sa + (m-s)b$, имеем

$$\varphi(\hat{y}) = \sum_{i \in I} \Big(\hat{y}_i - \tfrac{1}{m} \sum_{\ell \in I} \hat{y}_\ell \Big)^2 =$$
$$= \sum_{i \in I_a} \Big(a - \tfrac{1}{m} \big[sa + (m-s)b \big] \Big)^2 + \sum_{i \in I_b} \Big(b - \tfrac{1}{m} \big[sa + (m-s)b \big] \Big)^2 =$$
$$= \tfrac{(a-b)^2}{m^2} s(m-s)^2 + \tfrac{(a-b)^2}{m^2} (m-s)s^2 =$$
$$= \tfrac{1}{m} (a-b)^2 s(m-s).$$

Нетрудно понять, что максимум достигается при $s \in \big\{ \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \ \lceil \frac{m}{2} \rceil \big\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Глобальный максимум в задаче* (7) *достигается в точках вида*: *любые* $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ *или* $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ *компонент вектора* $\hat{y}$ *принимают значение равное* a, *а оставшиеся — значение* b.

4°. Сформулируем основной результат работы. Для упрощения её формулировки введём семейство $\mathbb{M}$ матриц размерности $d \times m$ таких, что $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ или $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ элементов j-й строки, принимают значение a_j, а оставшиеся — значение b_j, $j \in 1 : d$.

ТЕОРЕМА. *Пусть M произвольная матрица из семейства $\mathbb{M}$. Обозначим через $M^{(k)}$ её k-й столбец. Набор векторов $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$, где*

$$x_1^* = M^{(1)}, \ldots, x_m^* = M^{(m)},$$

доставляет глобальный максимум в задаче (1).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Из множества решений задачи* (1) *выделим «простейшее по структуре»*:

$$x_1^* = \ldots = x_s^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}, \qquad x_{s+1}^* = \ldots = x_m^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix},$$

где $s = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ *или* $s = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* $m \leqslant 2^d$, *то глобальный максимум в задаче* (1) *достигается при размещении точек* $x_1, \ldots, x_m$ *в различных вершинах* d*-мерного параллелепипеда* Ω.

5°. Близкие экстремальные задачи рассматривались в работах [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Н. Н., Юдин В. А. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Матем. просв. Сер. 3. 1997. Вып. 1. С. 115–125. Труды ИСА РАН, 2006. Т. 28. С. 48–66.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве* // Семинар “DHA&CAGD”. Избранные доклады. 16 апреля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0116`)