

## МДМ-МЕТОДУ 50 ЛЕТ\*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

10 ноября 2021 г.

1°. Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  заданы  $m$  точек,

$$H = \{a_i\}_{i=1}^m.$$

Обозначим через  $G$  выпуклую оболочку множества  $H$ .

Ставится задача: *найти точку из  $G$ , ближайшую (в евклидовой норме) к началу координат.* Задачу можно записать так:

$$\|v\|^2 \rightarrow \min_{v \in G}. \quad (1)$$

Задача (1) имеет решение и оно единственно. Обозначим его  $v_*$ .

Вопрос о нахождении  $v_*$  возник как вспомогательная задача в оптимальном управлении [1] и негладкой оптимизации [2]. В 1971 году в работе [3] был предложен простой итерационный метод для решения задачи (1), который в дальнейшем получил название “МДМ-метод” (см., например [4, 5]). В данном докладе я возвращаюсь к анализу МДМ-метода с современных позиций.

2°. Отметим прежде всего, что при всех  $v \in G$  выполняется неравенство

$$\langle v, v_* \rangle \geq \langle v_*, v_* \rangle. \quad (2)$$

Действительно, зафиксируем  $v \in G$ . В силу выпуклости множества  $G$  точка  $v_* + t(v - v_*)$  при всех  $t \in (0, 1)$  принадлежит  $G$ , поэтому

$$\langle v_*, v_* \rangle \leq \langle v_* + t(v - v_*), v_* + t(v - v_*) \rangle = \langle v_*, v_* \rangle + 2t\langle v_*, v - v_* \rangle + t^2\|v - v_*\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\langle v_*, v - v_* \rangle + \frac{1}{2}t\|v - v_*\|^2 \geq 0.$$

В пределе при  $t \rightarrow +0$  получим неравенство, равносильное (2).

Неравенство (2) равносильно также следующему неравенству

$$\|v - v_*\|^2 \leq \|v\|^2 - \|v_*\|^2 \quad \forall v \in G. \quad (3)$$

---

\*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

**3°.** Обозначим через  $A$  матрицу со столбцами  $a_1, \dots, a_m$ . Тогда любой вектор  $v$  из выпуклой оболочки  $G$  множества  $H$  допускает представление

$$v = Ap, \quad p \geq \mathbb{O}, \quad \sum_{i=1}^m p[i] = 1. \quad (4)$$

Первичным в этой формуле является вектор коэффициентов  $p$ . Носитель вектора  $p$  обозначим  $M_+(p)$ , так что

$$M_+(p) = \{i \in 1 : m \mid p[i] > 0\}.$$

Введём величину

$$\Delta(p) = \max_{i \in M_+(p)} \langle a_i, v \rangle - \min_{i \in 1:m} \langle a_i, v \rangle,$$

где  $v = Ap$ . Вектор  $p$  удовлетворяет условиям, указанным в формуле (4). Множество таких векторов обозначим  $P$ .

**ЛЕММА 1.** При любом  $v = Ap$ ,  $p \in P$ , справедливо неравенство

$$\|v - v_*\|^2 \leq \Delta(p). \quad (5)$$

*Доказательство.* Согласно (2) имеем

$$\begin{aligned} \|v - v_*\|^2 &= \|v\|^2 - 2\langle v, v_* \rangle + \|v_*\|^2 \leq \|v\|^2 - \langle v, v_* \rangle = \\ &= \sum_{i \in M_+(p)} p[i] \langle a_i, v \rangle - \sum_{i=1}^m p_*[i] \langle a_i, v \rangle \leq \\ &\leq \max_{i \in M_+(p)} \langle a_i, v \rangle - \min_{i \in 1:m} \langle a_i, v \rangle = \Delta(p). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Из (5) следует, в частности, что

$$\Delta(p) \geq 0 \quad \forall p \in P. \quad (6)$$

**ЛЕММА 2.** Равенство в (6) достигается тогда и только тогда, когда вектор  $v = Ap$  является решением задачи (1).

*Доказательство.* Неравенство (5) гарантирует оптимальность вектора  $v = Ap$  в случае  $\Delta(p) = 0$ .

Наоборот, возьмём решение  $v_* = Ap_*$  задачи (1) и покажем, что  $\Delta(p_*) = 0$ . Пусть

$$\Delta(p_*) = \langle a_{i'} - a_{i''}, v_* \rangle,$$

где  $i' \in M_+(p_*)$ ,  $i'' \in 1 : m$ . Введём вектор

$$\hat{v}_* = v_* - p_*[i'](a_{i'} - a_{i''})$$

(коэффициент при  $a_{i'}$  передали вектору  $a_{i''}$ ). Очевидно, что  $\hat{v}_* \in G$ . Имеем

$$\langle \hat{v}_*, v_* \rangle = \langle v_*, v_* \rangle - p_*[i'] \langle a_{i'} - a_{i''}, v_* \rangle = \langle v_*, v_* \rangle - p_*[i'] \Delta(p_*).$$

В силу (2) и положительности  $p_*[i']$  получаем  $\Delta(p_*) \leq 0$ . Вместе с неравенством (6) это приводит к равенству  $\Delta(p_*) = 0$ .

Лемма доказана.  $\square$

4°. Обратимся к МДМ-методу. Возьмём начальное приближение  $v_0 \in G$ .

Пусть уже имеется  $k$ -е приближение  $v_k = Ap_k$ ,  $p_k \in P$ . Опишем построение  $v_{k+1}$ .

Найдём индексы  $i'_k \in M_+(p_k)$  и  $i''_k \in 1 : m$ , такие, что

$$\begin{aligned} \max_{i \in M_+(p_k)} \langle a_i, v_k \rangle &= \langle a_{i'_k}, v_k \rangle, \\ \min_{i \in 1:m} \langle a_i, v_k \rangle &= \langle a_{i''_k}, v_k \rangle. \end{aligned}$$

Для простоты будем использовать обозначения

$$a_{i'_k} = a'_k, \quad a_{i''_k} = a''_k.$$

В этом случае

$$\Delta_k := \Delta(p_k) = \langle a'_k - a''_k, v_k \rangle.$$

Если  $\Delta_k = 0$ , то, согласно лемме 2,  $v_k$  — решение задачи (1). Процесс закончен.

Пусть  $\Delta_k > 0$ . Введём вектор

$$\hat{v}_k = v_k - p'_k(a'_k - a''_k),$$

где  $p'_k = p_k[i'_k]$ . Очевидно, что  $\hat{v}_k \in G$ . Рассмотрим отрезок

$$v_k(t) = v_k + t(\hat{v}_k - v_k) = v_k - t p'_k(a'_k - a''_k), \quad t \in [0, 1].$$

В силу выпуклости множества  $G$  все точки  $v_k(t)$  этого отрезка принадлежат  $G$ . Выберем  $t_k \in [0, 1]$  из условия

$$\|v_k(t_k)\|^2 = \min_{t \in [0, 1]} \|v_k(t)\|^2.$$

Положим  $v_{k+1} = v_k(t_k)$  (см. рис.).

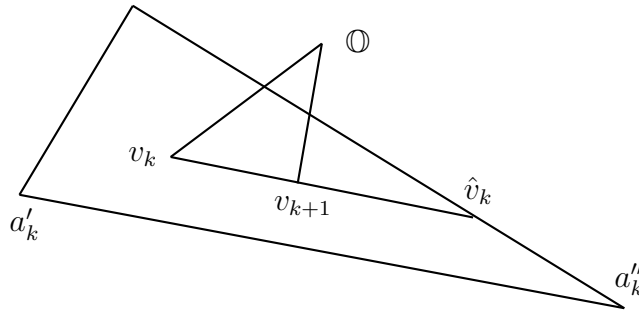


Рис.

Нетрудно понять, что

$$p_{k+1}[i] = \begin{cases} p_k[i], & \text{при } i \neq i'_k, i \neq i''_k, \\ (1 - t_k)p_k[i'_k], & \text{при } i = i'_k, \\ p_k[i''_k] + t_k p_k[i'_k], & \text{при } i = i''_k. \end{cases}$$

Укажем явную формулу для  $t_k$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|v_k(t)\|^2 &= \|v_k\|^2 + 2t\langle v_k, \hat{v}_k - v_k \rangle + t^2\|\hat{v}_k - v_k\|^2 = \\ &= \|v_k\|^2 - 2tp'_k \Delta_k + t^2\|\hat{v}_k - v_k\|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Абсолютный минимум  $v_k(t)$  на  $\mathbb{R}$  достигается в точке

$$\hat{t}_k = \frac{p'_k \Delta_k}{\|\hat{v}_k - v_k\|^2} = \frac{p'_k \Delta_k}{(p'_k)^2 \|a'_k - a''_k\|^2} = \frac{\Delta_k}{p'_k \|a'_k - a''_k\|^2}. \quad (8)$$

Ясно, что  $\hat{t}_k > 0$ , поэтому

$$t_k = \begin{cases} \hat{t}_k, & \text{если } \hat{t}_k < 1, \\ 1, & \text{если } \hat{t}_k \geq 1. \end{cases}$$

Описание МДМ-метода завершено.

Построена последовательность  $v_0, v_1, \dots$  точек из  $G$ . Если она конечна, то последний её элемент является решением задачи (1). Вообще говоря, последовательность  $\{v_k\}$  бесконечна. Такая ситуация возникает, когда

$$\Delta_k > 0 \quad \text{и, как следствие,} \quad \|v_{k+1}\| < \|v_k\| \quad \text{при всех } k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Покажем, что в этом случае последовательность  $\{v_k\}$  сходится к  $v_*$  — решению задачи (1).

5°. Начнём со вспомогательных утверждений.

**ЛЕММА 3.** *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p'_k \Delta_k = 0. \quad (10)$$

*Доказательство.* Допустим противное, то есть что существует бесконечная подпоследовательность  $\{p'_{k_s} \Delta_{k_s}\}$ , такая, что

$$p'_{k_s} \Delta_{k_s} \geq \varepsilon > 0.$$

Обозначим через  $d$  диаметр множества  $G$ ,

$$d = \max_{u \in G, v \in G} \|u - v\|.$$

Согласно (7) имеем

$$\|v_{k_s}(t)\|^2 \leq \|v_{k_s}\|^2 - 2t\varepsilon + t^2 d^2 = \|v_{k_s}\|^2 - t\varepsilon - t(\varepsilon - td^2),$$

поэтому при  $t \in [0, \varepsilon/d^2]$  будет

$$\|v_{k_s}(t)\|^2 \leq \|v_{k_s}\|^2 - t\varepsilon.$$

Положим  $t_* = \min\{1, \varepsilon/d^2\}$ . Тогда

$$\|v_{k_s+1}\|^2 = \min_{t \in [0, 1]} \|v_{k_s}(t)\|^2 \leq \|v_{k_s}(t_*)\|^2 \leq \|v_{k_s}\|^2 - t_*\varepsilon.$$

Неограниченное число указанных понижений в монотонно убывающей последовательности  $\{\|v_k\|^2\}$  противоречит неотрицательности её элементов. Лемма доказана.  $\square$

**ЛЕММА 4.** *Справедливо предельное соотношение*

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0.$$

*Доказательство.* Допустим противное:

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = \Delta' > 0.$$

В этом случае для достаточно больших  $k \geq k_0$  будет выполняться неравенство

$$\Delta_k \geq \Delta'/2. \quad (11)$$

Отсюда и из (10) следует, в частности, что

$$p'_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Далее, согласно (8) и (11)

$$\hat{t}_k \geq \frac{\Delta'}{2p'_k d^2},$$

так что  $\hat{t}_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . На основании определения  $t_k$  заключаем, что  $t_k = 1$  при  $k \geq k_1 \geq k_0$ . Это приводит к соотношению

$$v_{k+1} = \hat{v}_k, \quad k \geq k_1. \quad (12)$$

Рассмотрим последовательность

$$v_{k_1}, v_{k_1+1}, v_{k_1+2}, \dots \quad (13)$$

Соотношение (12) показывает, что компоненты  $p_k[i]$  вектора  $p_k$ , определяющего  $v_k$ , получаются путём перераспределения значений  $p_{k_1}[i]$ ,  $i \in 1 : m$ , поэтому в последовательности (13) может быть лишь конечное число попарно различных элементов. Но это противоречит неравенству  $\|v_{k+1}\| < \|v_k\|$ , справедливому при всех  $k = 0, 1, 2, \dots$

Лемма доказана.  $\square$

Теперь легко доказать утверждение о сходимости МДМ-метода.

**ТЕОРЕМА 1.** *При выполнении условия (9) последовательность  $\{v_k\}$ , построенная МДМ-методом, сходится к  $v_*$ .*

*Доказательство.* Согласно лемме 4 существует подпоследовательность  $\{\Delta_{k_s}\}$ , сходящаяся к нулю. По лемме 1 соответствующая подпоследовательность  $\{v_{k_s}\}$  сходится к  $v_*$ . В частности,  $\|v_{k_s}\| \rightarrow \|v_*\|$  при  $s \rightarrow \infty$ . В силу (9) вся последовательность  $\{\|v_k\|\}$  строго убывает, поэтому  $\|v_k\| \rightarrow \|v_*\|$  при  $k \rightarrow \infty$ . Остаётся сослаться на неравенство (3). Теорема доказана.  $\square$

**6°.** Отметим, что  $v_* = \mathbb{O}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{O} \in G$ . В этом пункте считаем, что  $v_* \neq \mathbb{O}$ .

Введём гиперплоскость

$$L = \{x \mid \langle v_*, x \rangle = \langle v_*, v_* \rangle\}.$$

**ТЕОРЕМА 2.** *Если  $v_* \neq \mathbb{O}$ , то, начиная с некоторого номера, все точки последовательности  $\{v_k\}$  принадлежат  $L$ .*

Доказательство. Обозначим  $M = 1 : m$ ,

$$M_0 = \{i \in M \mid a_i \in L\}, \quad M_1 = M \setminus M_0.$$

Согласно (2)

$$\langle a_i, v_* \rangle \geq \langle v_*, v_* \rangle, \quad i \in 1 : m,$$

поэтому при  $i \in M_1$

$$\langle a_i, v_* \rangle > \langle v_*, v_* \rangle.$$

Положим

$$\tau = \min_{i \in M_1} \langle a_i, v_* \rangle - \langle v_*, v_* \rangle > 0.$$

Очевидно, что

$$\langle a_i, v_* \rangle \geq \langle v_*, v_* \rangle + \tau, \quad i \in M_1. \quad (14)$$

Воспользуемся теоремой 1, в силу которой найдётся индекс  $k_0$ , такой, что при  $k \geq k_0$

$$\max_{i \in 1:m} |\langle a_i, v_k \rangle - \langle a_i, v_* \rangle| \leq \frac{\tau}{4}.$$

При тех же  $k$  и  $i \in M_0$

$$\langle a_i, v_k \rangle \leq \langle a_i, v_* \rangle + \frac{\tau}{4} = \langle v_*, v_* \rangle + \frac{\tau}{4}, \quad (15)$$

в то время как при  $i \in M_1$  согласно (14)

$$\langle a_i, v_k \rangle \geq \langle a_i, v_* \rangle - \frac{\tau}{4} \geq \langle v_*, v_* \rangle + \frac{3\tau}{4}. \quad (16)$$

Значит, при  $k \geq k_0$

$$\min_{i \in 1:m} \langle a_i, v_k \rangle = \min_{i \in M_0} \langle a_i, v_k \rangle. \quad (17)$$

Запишем представление

$$v_k = \sum_{i \in M_0} p_k[i] a_i + \sum_{i \in M_1} p_k[i] a_i.$$

Покажем, что в последовательности

$$v_{k_0}, v_{k_0+1}, v_{k_0+2}, \dots \quad (18)$$

встретится элемент  $v_k$ , у которого  $p_k[i] = 0$  при всех  $i \in M_1$ .

Допустим противное. На основании (15) и (16) получим

$$\begin{aligned} \min_{i \in 1:m} \langle a_i, v_k \rangle &\leq \langle v_*, v_* \rangle + \frac{\tau}{4}, \\ \max_{i \in M_+(p_k)} \langle a_i, v_k \rangle &\geq \langle v_*, v_* \rangle + \frac{3\tau}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_k \geq \tau/2, \quad k \geq k_0. \quad (19)$$

Далее, в силу определения  $M_0$  и  $\tau$  имеем

$$\begin{aligned} \langle v_k - v_*, v_* \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m p_k[i] (a_i - v_*), v_* \right\rangle = \\ &= \sum_{i \in M_1} p_k[i] \langle a_i - v_*, v_* \rangle \geq \tau \sum_{i \in M_1} p_k[i]. \end{aligned}$$

Левая часть этого неравенства стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in M_1} p_k[i] = 0.$$

Выберем столь большое  $k_1 \geq k_0$ , чтобы при  $k \geq k_1$  выполнялось неравенство

$$\sum_{i \in M_1} p_k[i] \leq \frac{\tau}{2d^2}.$$

На основании (8) и (19) получим

$$\hat{t}_k = \frac{\Delta_k}{p'_k \|a'_k - a''_k\|^2} \geq \frac{\tau}{2d^2 \sum_{i \in M_1} p_k[i]} \geq 1.$$

Значит,  $t_k = 1$  и  $v_{k+1} = \hat{v}_k$  при  $k \geq k_1$ . Как установлено при доказательстве леммы 4, отсюда следует, что в последовательности  $v_{k_1}, v_{k_1+1}, v_{k_1+2}, \dots$  может быть лишь конечное число попарно различных элементов. Это противоречит строгому убыванию  $\|v_k\|$ .

Итак, в последовательности (18) встретится элемент  $v_k$ , имеющий представление

$$v_k = \sum_{i \in M_0} p_k[i] a_i, \quad p_k \geq \mathbb{O}, \quad \sum_{i \in M_0} p_k[i] = 1. \quad (20)$$

В частности,  $v_k$  принадлежит гиперплоскости  $L$ . Согласно описанию МДМ-метода и соотношению (17) последующие элементы последовательности эту плоскость не покинут.

Теорема доказана.  $\square$

7°. Лемма 4 допускает усиление.

**ТЕОРЕМА 3.** *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0.$$



**Доказательство.** В случае  $v_* = \mathbb{O}$  (когда  $v_k \rightarrow \mathbb{O}$ ) утверждение очевидно. Действительно,

$$\Delta_k \leq \max_{i \in 1:m} \langle a_i, v_k \rangle - \min_{i \in 1:m} \langle a_i, v_k \rangle.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Остаётся учесть неотрицательность  $\Delta_k$ .

Пусть  $v_* \neq \mathbb{O}$ . Согласно (20) при больших  $k$

$$\max_{i \in M_+(p_k)} \langle a_i, v_k \rangle \leq \max_{i \in M_0} \langle a_i, v_k \rangle.$$

Принимая во внимание (17), приходим к неравенству

$$\Delta_k \leq \max_{i \in M_0} \langle a_i, v_k \rangle - \min_{i \in M_0} \langle a_i, v_k \rangle.$$

В силу теоремы 1 и определения  $M_0$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \max_{i \in M_0} \langle a_i, v_k \rangle - \min_{i \in M_0} \langle a_i, v_k \rangle \right] = \max_{i \in M_0} \langle a_i, v_* \rangle - \min_{i \in M_0} \langle a_i, v_* \rangle = 0.$$

Остаётся учесть неотрицательность  $\Delta_k$ .

Теорема доказана.  $\square$

8°. МДМ-метод позволяет за конечное число шагов строго отделить начало координат от  $G$  в случае, когда  $\mathbb{O} \notin G$ .

**ТЕОРЕМА 4.** Условие  $\mathbb{O} \notin G$  выполняется тогда и только тогда, когда при некотором  $k$

$$\Delta_k < \|v_k\|^2. \quad (21)$$

Неравенство (21) гарантирует, что гиперплоскость

$$\langle v_k, x \rangle - \langle v_k, a_k'' \rangle = 0 \quad (22)$$

строго отделяет начало координат от множества  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbb{O} \notin G$ . Справедливость неравенства (21) при некотором  $k$  следует из того, что  $\Delta_k \rightarrow 0$  и  $v_k \rightarrow v_*$ ,  $v_* \neq \mathbb{O}$ .

Наоборот, на основании (21) и (5) получаем

$$\|v_k - v_*\|^2 < \|v_k\|^2.$$

Такое неравенство возможно только при  $v_* \neq \mathbb{O}$ .

Перепишем неравенство (21) в развёрнутом виде

$$\langle a_k' - a_k'', v_k \rangle < \langle v_k, v_k \rangle.$$

Отсюда следует, что

$$-\langle a_k'', v_k \rangle < \langle v_k, v_k - a_k' \rangle.$$

Так как

$$\langle v_k, v_k \rangle = \sum_{i \in M_+(p_k)} p_k[i] \langle a_i, v_k \rangle \leq \langle a_k', v_k \rangle,$$

то

$$-\langle a_k'', v_k \rangle < 0. \quad (23)$$

Вместе с тем, при всех  $v \in G$

$$\langle v_k, v \rangle = \sum_{i=1}^m p[i] \langle v_k, a_i \rangle \geq \langle a_k'', v_k \rangle,$$

так что

$$\langle v_k, v \rangle - \langle v_k, a_k'' \rangle \geq 0. \quad (24)$$

На основании (23) и (24) заключаем, что гиперплоскость (22) строго отделяет начало координат от множества  $G$ .

Теорема доказана.  $\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gilbert E. G. *An iterative procedure for computing the minimum of quadratic form on a convex set* // J. SIAM Control. 1966. Vol. 4. No. 1. P. 61–80.
2. Demyanov V. F. *Algorithms for some minimax problems* // J. Computer and System Sciences. 1968. Vol. 2. No. 4. P. 342–380.
3. Митчелл Б. Ф., Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. *Нахождение ближайшей к началу координат точки многогранника* // Вестник ЛГУ. 1971. № 19. С. 38–45.
4. Barbero A., Lopez J., Dorronsoro J. R. *An accelerated MDM algorithm for SVM Training* // European Symposium on Artificial Neural Networks — Advances in Computational Intelligence and Learning. Bruges (Belgium), 23–25 April 2008. P. 421–426.
5. Lazaro J. L. *On the relationship among the MDM, SMO and SVM-Light algorithms for Training Support Vector Machines* // Master's thesis. Universidad Autonoma de Madrid. Madrid, 2008.