ДЕСЯТЬ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ*

В. Н. Малозёмов
v.malozemov@spbu.ru

15 сентября 2021 г.

Речь пойдет об экстремальных задачах, решение которых можно получить с помощью элементарных методов. Систематически данная тема изучается в книге [1]. Предлагаемая подборка является небольшим дополнением к этой книге. Больше задач можно найти в [2].

ЗАДАЧА 1. *Найти наибольшее значение выражения*

$$w = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = A, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots,\ x_n \geqslant 0. \end{gathered}$$

Здесь $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$, A — положительные числа и $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n$ — произвольные коэффициенты.

Решение. Обозначим $N = 1 : n$,

$$M = \max_{k\in N}\Big\{\frac{c_k}{a_k}\Big\},$$

и пусть $J = \{k \in N \mid c_k/a_k = M\}$. Для любого плана $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} c_kx_k &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{c_k}{a_k} - M\Big)a_kx_k + M\sum_{k=1}^{n} a_kx_k = \\ &= \sum_{k\in N\setminus J}\Big(\frac{c_k}{a_k} - M\Big)a_kx_k + MA. \end{aligned} \tag{1}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Так как
$$\frac{c_k}{a_k} - M < 0 \quad \text{при} \quad k \in N \setminus J,$$
коэффициенты a_k положительны и $x_k \geqslant 0$, то
$$\sum_{k \in N \setminus J} \Bigl(\frac{c_k}{a_k} - M\Bigr) a_k x_k \leqslant 0, \tag{2}$$
причем неравенство выполняется как равенство только тогда, когда
$$x_k = 0 \quad \text{при} \quad k \in N \setminus J. \tag{3}$$

На основании (1) и (2) заключаем, что
$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k \leqslant MA.$$
Оптимальным будет любой план, удовлетворяющий условию (3).

ЗАДАЧА 2. *Найти наименьшее значение выражения*
$$w = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \ldots + c_n x_n^2$$
при ограничении
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = A.$$
Здесь все c_k положительны и A отлично от нуля.

Решение. Согласно неравенству Коши-Буняковского имеем
$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Bigr)^2 = \Bigl(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{c_k}} \bigl(\sqrt{c_k}\; x_k\bigr)\Bigr)^2 \leqslant \Bigl(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{c_k}\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} c_k x_k^2\Bigr). \tag{4}$$
Отсюда следует, что для любого плана $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ справедливо неравенство
$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k^2 \geqslant A^2 \Bigl(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{c_k}\Bigr)^{-1}. \tag{5}$$

Неравенство (4) (а значит, и (5)) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $\sqrt{c_k} x_k = t \frac{a_k}{\sqrt{c_k}}$ при некотором t и всех $k \in 1:n$, то есть при $x_k = t \frac{a_k}{c_k}$, $k \in 1:n$. Ограничения задачи позволяют найти константу t:
$$t = A \Bigl(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{c_k}\Bigr)^{-1}.$$

Компоненты оптимального плана имеют вид
$$x_k = A\, \frac{a_k}{c_k} \Bigl(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{c_k}\Bigr)^{-1}, \quad k \in 1:n.$$

ЗАДАЧА 3. *Найти наименьшее значение выражения*

$$w = \sum_{k=1}^{n} \Big(x_k + \frac{1}{x_k} \Big)^2$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,$$
$$x_1 > 0,\ x_2 > 0, \ldots,\ x_n > 0.$$

Решение. Введем функцию $f(x) = \big(x+\frac{1}{x}\big)^2$. Она строго выпуклая на полуоси $(0, +\infty)$, так как ее вторая производная

$$f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$$

положительна при $x > 0$. По неравенству Йенсена, для любого плана $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ имеем

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\Big) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqslant n f(\tfrac{1}{n}).$$

Учитывая определение функции $f(x)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(x_k + \frac{1}{x_k} \Big)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда все x_k равны между собой. Значит, оптимальный план имеет вид $x = \big(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}, \ldots,\ \frac{1}{n}\big)$.

ЗАДАЧА 4. *Обозначим через a, b, c длины сторон треугольника. Найти наименьшее значение выражения*

$$w = \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c}$$

при условии, что среднее гармоническое чисел a, b, c равно H.

Решение. По определению среднего гармонического имеем

$$H = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

так что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{H}. \tag{6}$$

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним гармоническим. Запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} &\geqslant \frac{2}{a}, \\ \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c} &\geqslant \frac{2}{c}, \\ \frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a+b-c} &\geqslant \frac{2}{b}. \end{aligned} \tag{7}$$

Все три неравенства выполняются как равенства тогда и только тогда, когда

$$a+b-c = a-b+c = -a+b+c,$$

то есть только при $a = b = c$.

На основании (7) и (6) получаем

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c}\Big) + \\ + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a+b-c}\Big) \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{H}. \end{aligned}$$

Неравенство выполняется как равенство только при $a = b = c = H$.

ЗАДАЧА 5. *Пусть задана площадь S треугольника. Найти наименьшее значение выражения*

$$w = ab + bc + ca,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

Решение. Введем обозначения

$$p = \tfrac{1}{2}(a+b+c), \quad t = p - a, \quad u = p - b, \quad v = p - c.$$

Ясно, что t, u, v — положительные величины, при этом

$$t+u=c, \quad u+v=a, \quad v+t=b, \quad t+u+v=p.$$

Отметим также, что

$$t^2uv+tu^2v+tuv^2=tuvp=S^2. \tag{8}$$

Имеем

$$\begin{aligned} w=ab+bc+ca=(u+v)(v+t)+(v+t)(t+u)+(t+u)(u+v)= \\ =(v+t+u)^2+vt+tu+uv. \end{aligned} \tag{9}$$

Покажем, что

$$(v+t+u)^2 \geqslant 3(vt+tu+uv). \tag{10}$$

Неравенство (10) эквивалентно следующему неравенству

$$v^2+t^2+u^2 \geqslant vt+tu+uv,$$

которые можно переписать в виде

$$\tfrac{1}{2}(v^2-2vt+t^2)+\tfrac{1}{2}(t^2-2tu+u^2)+\tfrac{1}{2}(u^2-2uv+v^2) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство тривиально. Оно выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $v=t$, $t=u$, $u=v$, то есть при $v=t=u$.

В силу (9) и (10) получаем

$$w \geqslant 4(vt+tu+uv), \tag{11}$$

причем это неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $v=t=u$.

Теперь еще раз воспользуемся неравенством (10), заменив в нем v, t, u на vt, tu, uv. Запишем

$$(vt+tu+uv)^2 \geqslant 3(t^2uv+tu^2v+tuv^2). \tag{12}$$

На основании (11), (12) и (8) приходим к окончательному неравенству

$$w \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

Промежуточные неравенства (10) и (12) выполняются как равенства тогда и только тогда, когда $v=t=u$, то есть при $a=b=c$. Отсюда следует, что величина w принимает наименьшее значение, равное $4\sqrt{3}S$, только при выполнении условия $a=b=c=\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$.

ЗАДАЧА 6. *Найти наименьшее значение выражения*

$$w = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2},$$

где α, β, γ *— углы остроугольного треугольника.*

Решение. Функция $f(x) = \sin^2 x$ строго выпукла на интервале $(0, \frac{\pi}{4})$, так как

$$f''(x) = 2\cos 2x > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{4}).$$

По условию задачи углы $\alpha/2$, $\beta/2$ и $\gamma/2$ принадлежат интервалу $(0, \frac{\pi}{4})$. Воспользуемся неравенством Йенсена. Получим

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 3\sin^2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right) = \frac{3}{4}.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

ЗАДАЧА 7. *Найти наибольшее значение выражения*

$$w = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta$$

по всем α *и* β *из промежутка* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Решение. Перепишем формулу для w в виде

$$w = \sin\alpha \cdot \sin\beta + (\cos\alpha) \cdot 1 + 1 \cdot (\cos\beta).$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского. Получим

$$w \leqslant \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1} \cdot \sqrt{\sin^2\beta + 1 + \cos^2\beta} = 2.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда при некотором $t \geqslant 0$ совместны соотношения

$$\sin\alpha = t\sin\beta, \quad \cos\alpha = t, \quad 1 = t\cos\beta.$$

Они гарантируют, что

$$\sin^2\alpha + 1^2 = t^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = t^2 = \cos^2\alpha,$$

то есть, что $\sin^2\alpha + 1 = \cos^2\alpha$. На отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ это возможно только при $\alpha = 0$. По $\alpha = 0$ вычислим $t = 1$ и $\beta = 0$.

Таким образом, наибольшее значение w равно 2 и достигается в единственном случае, когда $\alpha = \beta = 0$.

ЗАДАЧА 8. *Найти наименьшее значение выражения*

$$w = \Big(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots \frac{1}{b_n}\Big)(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n),$$

где $n \geqslant 2$ *и* $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n$ *— положительные числа.*

Решение. По неравенству Коши имеем

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}}. \tag{13}$$

Далее,

$$1 + b_k = \underbrace{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-1}}_{(n-1)\text{ раз}} + b_k \geqslant n\sqrt[n]{\frac{b_k}{(n-1)^{n-1}}},$$

так что

$$\prod_{k=1}^{n}(1+b_k) \geqslant n^n \frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}}{(n-1)^{n-1}}. \tag{14}$$

Перемножив (13) и (14), получим

$$w \geqslant n^2 \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{n-1}.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \frac{1}{n-1}$.

ЗАДАЧА 9. *Найти наименьшее значение выражения*

$$w = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2$$

при условии, что

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1.$$

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *— вещественные числа.*

Решение. Для любого плана данной задачи в силу неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\begin{gathered} 1 = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2 = \\ = \Big[1\cdot(b_1+a_1) + 1\cdot(b_2+a_2) + \ldots + 1\cdot(b_n+a_n) + \\ + (-1)\cdot(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\Big]^2 \leqslant \\ \leqslant (n+1)\Big[(b_1+a_1)^2 + (b_2+a_2)^2 + \ldots + (b_n+a_n)^2 + \\ + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2\Big]. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$w \geqslant \frac{1}{n+1}. \tag{15}$$

Неравенство (15) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда совместны следующие соотношения

$$\begin{gathered} b_k + a_k = t \quad \text{при} \quad k \in 1:n, \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = -t, \\ b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1. \end{gathered} \tag{16}$$

Обозначим $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Согласно (16), имеем $t = -S$,

$$1 = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (t - a_k) = nt - S = -(n+1)S.$$

Получаем

$$S := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = -\frac{1}{n+1}; \tag{17}$$

$$t = \frac{1}{n+1}; \quad b_k = \frac{1}{n+1} - a_k, \ k \in 1:n. \tag{18}$$

Таким образом, наименьшее значение w равно $\frac{1}{n+1}$ и достигается на любом векторе $(a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots, b_n)$, компоненты a_k которого удовлетворяют условию (17), а компоненты b_k вычисляются по формуле (18).

ЗАДАЧА 10. *Найти наибольшее значение выражения*

$$w = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} + \ldots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$$

при ограничениях

$$\begin{array}{cc} a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A, & b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B, \\ a_1 > 0,\ a_2 > 0, \ldots,\ a_n > 0, & b_1 > 0,\ b_2 > 0, \ldots,\ b_n > 0. \end{array}$$

Здесь A и B — положительные константы.

Решение. Покажем, что при положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)}. \tag{19}$$

Введем обозначение $t_k = \frac{b_k}{a_k}$, $k \in 1 : n$. Перепишем неравенство (19) в терминах a_k и t_k. Приняв во внимание, что $b_k = t_k a_k$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k t_k}{1+t_k} \leqslant \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j t_j\Big)}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(1+t_j)}.$$

Перейдем к эквивалентной записи:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k a_j \frac{t_k(1+t_j)}{1+t_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k a_j t_j. \tag{20}$$

Сравним слагаемые с индексами (k,j) в левой и правой частях неравенства (20). При $k=j$ эти слагаемые равны. Пусть $k \neq j$. Покажем, что сумма слагаемых с индексами (k,j) и (j,k) из левой части не превосходит аналогичной суммы из правой части. Дело сводится к проверке неравенства

$$\frac{t_k(1+t_j)}{1+t_k} + \frac{t_j(1+t_k)}{1+t_j} \leqslant t_j + t_k. \tag{21}$$

Выполним несколько эквивалентных преобразований этого неравенства:

$$t_k\Big(1 - \frac{1+t_j}{1+t_k}\Big) - t_j\Big(\frac{1+t_k}{1+t_j} - 1\Big) \geqslant 0,$$
$$t_k\Big(\frac{t_k - t_j}{1+t_k}\Big) - t_j\Big(\frac{t_k - t_j}{1+t_j}\Big) \geqslant 0,$$
$$(t_k - t_j)\Big(\frac{t_k}{1+t_k} - \frac{t_j}{1+t_j}\Big) \geqslant 0,$$
$$\frac{(t_k - t_j)^2}{(1+t_k)(1+t_j)} \geqslant 0.$$

Очевидно, что заключительное неравенство справедливо. Значит, справедливы неравенства (21) и (20), причем они выполняются как равенства тогда и только тогда, когда все t_k равны между собой.

Из (20) следует справедливость неравенства (19). Оно будет выполняться как равенство тогда и только тогда, когда $b_k = t a_k$ при некотором $t > 0$ и всех $k \in 1 : n$.

Неравенство (19) позволяет легко решить задачу 10. Согласно (19) для любого плана задачи 10 имеем

$$w \leqslant \frac{AB}{A+B}.$$

Критерием обращения неравенства в равенство является условие $b_k = ta_k$, $k \in 1 : n$. Константу t определим из ограничений задачи 10. Получим $t = \frac{B}{A}$.

Таким образом, наибольшее значение w равно $\frac{AB}{A+B}$. Оптимальным будет любой план $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$, компоненты которого связаны соотношением

$$b_k = \tfrac{B}{A} a_k, \quad k \in 1 : n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Элементарные методы в экстремальных задачах.* Второе изд. СПб.: Издательство ВВМ, 2021. 160 с. (Видео-презентация книги: `http://hdl.handle.net/11701/23765`)

2. Седракян Н. М., Авоян А. М. *Неравенства. Методы доказательства.* М.: Физматлит, 2002. 256 с.