ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

В. Н. Малозёмов Г. Ш. Тамасян
v.malozemov@spbu.ru g.tamasyan@spbu.ru

22 сентября 2021 г.

В работе [1] получено, в частности, решение следующей экстремальной задачи:

$$\begin{aligned} &f(x) := \langle c, x\rangle \longrightarrow \max \\ &\tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle \leqslant d, \quad Ax = b, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, D — симметричная положительно определённая матрица порядка n, A — $(m \times n)$-матрица, $m < n$, с линейно независимыми строками и $d > 0$. В этом докладе даётся детальный анализ задачи (1).

1°. Множество планов задачи (1) обозначим через Ω. Выясним когда Ω непусто.

Введём обозначения

$$R = AD^{-1}A^T, \qquad d_0 = \tfrac{1}{2}\langle R^{-1}b, b\rangle.$$

Очевидно, что R — симметричная положительно определённая матрица порядка m.

ЛЕММА. *Множество Ω непусто тогда и только тогда, когда $d_0 \leqslant d$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \varphi(x) :=&\tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle \longrightarrow \min \\ &Ax = b. \end{aligned}$$

Она имеет единственное решение x_0. Чтобы найти его, запишем критерий оптимальности:

$$Dx = A^T u, \quad Ax = b.$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/

Отсюда последовательно получаем

$$A\left(D^{-1}A^T u\right) = b, \quad u_0 = R^{-1}b, \quad x_0 = D^{-1}A^T u_0,$$
$$\varphi(x_0) = \tfrac{1}{2}\langle A^T u_0, D^{-1}A^T u_0\rangle = \tfrac{1}{2}\langle u_0, Ru_0\rangle = \tfrac{1}{2}\langle R^{-1}b, b\rangle = d_0.$$

Теперь очевидно, что $\Omega \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $d_0 \leqslant d$. При $d_0 = d$ множество Ω состоит из единственной точки x_0. $\square$

2°. Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что наряду с указанными выше свойствами матриц D и A выполнены дополнительные условия:*

1) $d_0 < d$;

2) целевая функция $f(x) = \langle c, x\rangle$ задачи (1) *не является постоянной на множестве планов Ω.*

Тогда задача (1) *имеет единственное решение x_*, которое допускает представление*

$$x_* = \frac{1}{\lambda_*}D^{-1}\left(c - A^T u_*\right),$$

где

$$\lambda_* = \sqrt{\frac{1}{2(d-d_0)}\left(\langle D^{-1}c, c\rangle - \langle R^{-1}r, r\rangle\right)},$$
$$u_* = R^{-1}\left(r - \lambda_* b\right), \qquad r = AD^{-1}c.$$

Доказательство. Согласно условию 2) найдутся две точки x_1, x_2 из Ω, в которых $\langle c, x_1\rangle \neq \langle c, x_2\rangle$. Положим $h_0 = x_2 - x_1$. Имеем

$$Ah_0 = \mathbf{0}, \qquad \langle c, h_0\rangle \neq 0. \tag{2}$$

Это гарантирует, что система $A^T u = c$ несовместна. Действительно, в противном случае (при совместности системы $A^T u = c$) любое решение однородной сопряженной системы $Ah = \mathbf{0}$ было бы ортогонально вектору c, что противоречит (2). В дальнейшем мы воспользуемся несовместностью системы $A^T u = c$.

Множество планов задачи (1) непусто, ограничено и замкнуто. Значит, задача (1) имеет решение x_*. В силу 1) выполнено условие Слейтера. Это позволяет записать необходимые условия оптимальности (условия Куна–Таккера в дифференциальной форме):

$$c = \lambda Dx + A^T u, \tag{3}$$
$$\lambda\left(d - \tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle\right) = 0, \quad \lambda \geqslant 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle \leqslant d, \quad Ax = b.$$

Несовместность системы $A^T u = c$ гарантирует, что $\lambda > 0$ (см. (3)). Как следствие,

$$\tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle = d. \tag{4}$$

Из равенства (3) находим x:

$$x = \frac{1}{\lambda} D^{-1}\left(c - A^T u\right). \tag{5}$$

Далее последовательно получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{\lambda} A D^{-1}\big(c - A^T u\big) = b, \quad r - Ru = \lambda b, \\ u = R^{-1}(r - \lambda b). \end{gathered} \tag{6}$$

Теперь можно выразить x через λ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\lambda} D^{-1}\left[c - A^T R^{-1}(r - \lambda b)\right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} D^{-1}\left[\left(c - A^T R^{-1} r\right) + \lambda A^T R^{-1} b\right]. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (4), придём к квадратному уравнению относительно λ:

$$\left\langle \left(c - A^T R^{-1} r\right) + \lambda A^T R^{-1} b, D^{-1}\left[\left(c - A^T R^{-1} r\right) + \lambda A^T R^{-1} b\right]\right\rangle = 2\lambda^2 d. \tag{7}$$

Покажем, что коэффициент при λ в уравнении (7) равен нулю. Запишем выражение для этого коэффициента:

$$2\left\langle c - A^T R^{-1} r, D^{-1} A^T R^{-1} b\right\rangle = 2\left\langle A D^{-1}\left(c - A^T R^{-1} r\right), R^{-1} b\right\rangle. \tag{8}$$

Напомним, что $AD^{-1}c = r$, $AD^{-1}A^T = R$, поэтому

$$A D^{-1}\left(c - A^T R^{-1} r\right) = \mathbf{0}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что коэффициент (8) равен нулю. Отметим также, что

$$\left\langle A^T R^{-1} b, D^{-1} A^T R^{-1} b\right\rangle = \left\langle b, R^{-1}\left(A D^{-1} A^T\right) R^{-1} b\right\rangle = \left\langle b, R^{-1} b\right\rangle = 2d_0.$$

Уравнение (7) принимает вид

$$\left\langle c - A^T R^{-1} r, D^{-1}\left(c - A^T R^{-1} r\right)\right\rangle = 2(d - d_0)\lambda^2. \tag{10}$$

Левая часть уравнения (10) допускает дальнейшее упрощение. Действительно, согласно (9) имеем

$$\left\langle c - A^T R^{-1} r, D^{-1}\left(c - A^T R^{-1} r\right)\right\rangle = \left\langle c - A^T R^{-1} r, D^{-1} c\right\rangle -$$
$$- \left\langle A D^{-1}\left(c - A^T R^{-1} r\right), R^{-1} r\right\rangle = \left\langle c, D^{-1} c\right\rangle - \left\langle R^{-1} r, A D^{-1} c\right\rangle =$$
$$= \left\langle D^{-1} c, c\right\rangle - \left\langle R^{-1} r, r\right\rangle.$$

Окончательно получаем

$$\left\langle D^{-1} c, c\right\rangle - \left\langle R^{-1} r, r\right\rangle = 2(d - d_0)\lambda^2.$$

Ранее отмечалось, что $\lambda > 0$, поэтому

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2(d - d_0)}\left(\langle D^{-1} c, c\rangle - \langle R^{-1} r, r\rangle\right)}. \tag{11}$$

Формулы (5), (6) и (11) дают полное описание решения задачи (1).
Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Gorelik V., Zolotova T. *Linear-quadratic programming and its application to data correction of improper linear programming problems* // Open Computer Science. 2020. Vol. 10. No 1. P. 48–55.