ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ДАНСКИНА*

А. С. Миронов

st063750@student.spbu.ru

3 марта 2021 г.

1°. Введение. Рассмотрим следующую сепарабельную экстремальную задачу:

$$
\begin{aligned}
F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) &\to \max, \\
x_i \geqslant 0 \quad \forall i &\in 1:n, \\
\sum_{i=1}^{n} x_i &= A.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь f_i — непрерывно дифференцируемые строго вогнутые возрастающие на $[0, A]$ функции, A — положительная константа. В задаче, рассматриваемой в исходной работе Данскина [1], функции f_i имеют конкретный вид, а именно

$$f_i(x_i) = a_i(1 - e^{-b_i x_i}),$$

где $a_i, b_i > 0$. В данной работе функциям позволяется иметь более общий вид.

Для решения этой задачи мы воспользовались леммой, известной как *лемма Гиббса.* Ее доказательство и полная формулировка представлены в [2]. Здесь приводится ее усиленный вариант, достаточный для дальнейших рассуждений.

ЛЕММА 1 (Лемма Гиббса)**.** *Пусть в задаче* (1) *функции* f_i *вогнутые. Тогда для того чтобы план* $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ *был оптимальным для задачи* (1), *необходимо и достаточно существование числа* λ *такого, что*

$$f_i'(x_i^*) = \lambda \quad \textit{при } x_i^* > 0, \tag{2}$$

$$f_i'(x_i^*) \leqslant \lambda \quad \textit{при } x_i^* = 0. \tag{3}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Сведение к скалярному уравнению. Начнем с переформулировки леммы в виде, более удобном для дальнейших рассуждений.

Заметим, что в силу дифференцируемости и строгой вогнутости функций $f_i(t)$ их производные $g_i(t) := f_i'(t)$ — непрерывные строго убывающие функции.

Критерии (2) и (3) для плана $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно переписать в следующем виде:

$$x_i = 0 \quad \text{при } g_i(0) \leqslant \lambda, \tag{4}$$
$$x_i > 0 \quad \text{при } g_i(0) > \lambda. \tag{5}$$

Действительно, при $g_i(0) \leqslant \lambda$ необходимо $x_i = 0$, так как иначе в силу (2) имеем $\lambda = g_i(x_i) < g_i(0)$, что противоречит предположению. При $g_i(0) > \lambda$ имеем $x_i > 0$, так как иначе $g_i(x_i) = g_i(0) \leqslant \lambda$ в силу (3), что снова приводит к противоречию.

Поскольку g_i строго монотонны и непрерывны, у них существуют обратные функции g_i^{-1}. Поэтому на основании критерия (2) формулу (5) можно записать как

$$x_i = g_i^{-1}(\lambda), \quad \text{если } g_i(0) > \lambda. \tag{6}$$

Формулы (6) и (4) можно объединить в одну:

$$x_i = h_i(\lambda), \tag{7}$$

где h_i — расширение g_i^{-1}, определяемое следующим образом:

$$h_i(y) = \begin{cases} g_i^{-1}(y), & \text{если } g_i(A) \leqslant y \leqslant g_i(0), \\ 0, & \text{если } y > g_i(0). \end{cases} \tag{8}$$

На рис. 1 представлен график, поясняющий определение h_i.

Напомним, что в задаче (1) присутствует ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = A.$$

Чтобы быть планом задачи (1), вектор x, задаваемый формулой (7), обязан удовлетворять и этому ограничению.

Подведем итог.

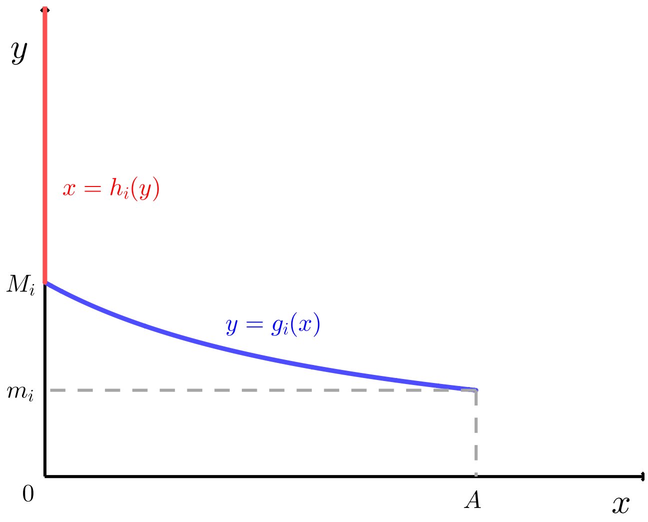

Рис. 1. Графики h_i и g_i. Первый следует понимать как объединение синей и красной кривых.

ЛЕММА 2. *Если число λ является решением уравнения*

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(\lambda) = A, \tag{9}$$

то план, задаваемый формулой (7), *удовлетворяет критериям* (2) *и* (3), *а значит является оптимальным.*

3°. Исследование уравнения. Для удобства определим функцию

$$h(y) = \sum_{i=1}^{n} h_i(y). \tag{10}$$

Перенумеруем индексы таким образом, чтобы выполнялось условие $g_1(0) \geqslant g_2(0) \geqslant \dots \geqslant g_n(0)$. Введем обозначения

$$M_i := g_i(0), \quad m_i := g_i(A), \quad m = \max_{i \in 1:n} m_i = m_{i_0}.$$

На рис. 2 представлен график $x = h(y)$.

Функция $h(y)$ определена только при $y \geqslant m$. Причем для любого $y \in [m, M_1]$ можно записать формулу (10) несколько иначе, отбросив в сумме заведомо нулевые слагаемые:

$$h(y) = \sum_{i=1}^{k} g_i^{-1}(y), \quad y \in [M_{k+1}, M_k). \tag{11}$$

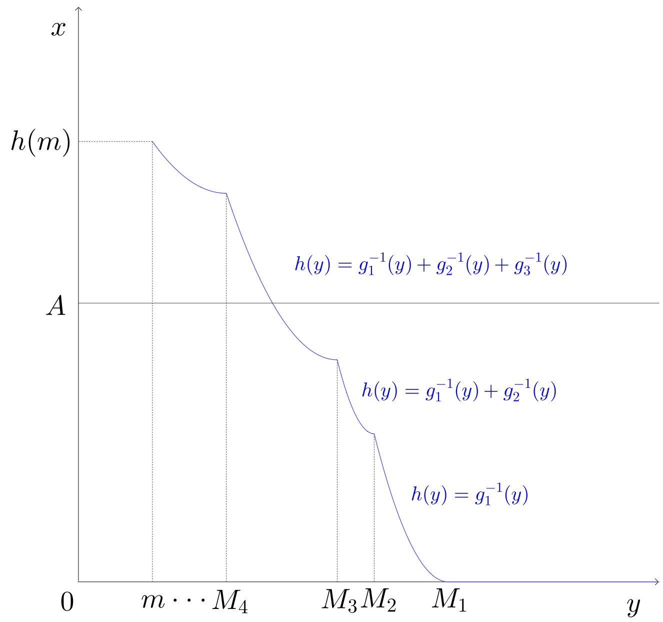

Рис. 2. График функции h. Здесь виден ее «кусочно-гладкий» вид.

Действительно, если $i > k$, то $y > M_i$, а значит $h_i(y) = 0$; больше членов отбросить не удастся. Из последнего неравенства, неотрицательности значений h_i и подстановки $y = m$ в формулу (11) имеем

$$h(m) = \sum_{i=1}^{k} g_i^{-1}(m) > g_{i_0}^{-1}(m) = A. \tag{12}$$

Наконец, в силу определения h_i ясно, что функция h непрерывна, строго убывает на $[m, M_1]$ и что $h(M_1) = 0$. Также известно, что $h(m) > A$. Из этого следует, что уравнение (9) имеет единственное решение на $[m, M_1]$.

4°. **Решение уравнения.** Теперь перейдем к нахождению λ. Вычислим функцию h в точках M_k:

$$h(M_k) = \sum_{i=1}^{k-1} g_i^{-1}(M_k), \quad k \in 2:n, \quad h(M_1) = 0. \tag{13}$$

Обозначим за k^* наибольший индекс, для которого выполняется $h(M_{k^*}) \leqslant A$. Тогда искомое значение λ найдется по формуле (11) на промежутке $[M_{k^*+1}, M_{k^*}]$, если $M_{k^*+1} > m$, или на $[m, M_{k^*}]$ в противном случае. После нахождения λ^* оптимальный план задачи (1) найдется по формуле (7).

Заметим, что если $M_i \leqslant m$, то $x_i^* = 0$ вне зависимости от значения λ; это следует из формул (7) и (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Данскин Дж. М. *Теория максимина и её приложение к задачам распределения вооружения.* М.: Изд-во «Советское радио», 1970. 200 с.

2. Малозёмов В.Н., Тамасян Г.Ш. *Лемма Гиббса и её приложения*. Семинар «CNSA & NDO». Доклад от 10 октября 2017 года.