БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ МИНИМИЗАЦИЯ ВЫПУКЛОЙ ЛОМАНОЙ*

Г. Ш. Тамасян g.tamasyan@spbu.ru

Г. С. Шульга gdextrous@gmail.com

24 марта 2021 г.

1°. Пусть заданы два набора вещественных чисел $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_m$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу

$$f(t) := \sum_{k=1}^{m} |a_k t - b_k| \longrightarrow \min_{t \in \mathbb{R}} . \tag{1}$$

Известно, что задача (1) может быть решена средствами линейного программирования (см. [1, с. 13]). Однако, используя специфику задачи, в докладе показывается, что решением задачи является взвешенная медиана (см. [2, с. 255]), на поиск которой уходит линейное время (см. [3]).

2°. Несложно показать, что функция $f(t)$ является выпуклой ломаной, которая удовлетворяет условию $\lim\limits_{|t| \to +\infty} f(t) = +\infty$ (т. е. коэрцитивна), поэтому глобальный минимум в задаче (1) достигается, в общем случае на отрезке.

Положим p_j — угловой коэффициент j-го звена ломаной $f(t)$. Тогда точка минимума (если она не единственная, то крайняя слева на вещественной оси) характеризуется изменением угла наклона звена ломаной с отрицательного значения на неотрицательное, т. е. $p_j < 0$, а $p_{j+1} \geqslant 0$. Если же угловой коэффициент звена ломаной изменяется с отрицательного на положительное значение, то глобальный минимум единственный.

Обозначим $I = 1 : m$. Далее будем считать, что $a_k > 0$, $k \in I$.

3°. Вначале исследуем простейший случай: $a_k = 1$, $k \in I$ и $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Тогда задача (1) примет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} |t - b_k| \longrightarrow \min_{t \in \mathbb{R}} . \tag{2}$$

---

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

В силу того, что все b_j различны, ломаная $f(t)$ имеет $m+1$ звено. Очевидно, что первое и последнее звенья ломанной имеют угловые коэффициенты p_0 и p_m равные, соответственно, $-m$ и m. Более того справедливо

$$p_0 = -m, \qquad p_{j+1} = p_j + 2, \quad j = 0 : m-1,$$

или в эквивалентной форме

$$p_j = -m + 2j, \quad j = 0 : m. \tag{3}$$

Действительно, произведем сортировку узлов ломаной по возрастанию. Получим $\hat{b}_1 < \hat{b}_2 < \ldots < \hat{b}_m$. Тогда

$$f(t) = \begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{m}(t - \hat{b}_j) & \text{при } \ t \leqslant \hat{b}_1; \\ \sum\limits_{j=1}^{k}(t - \hat{b}_j) - \sum\limits_{j=k+1}^{m}(t - \hat{b}_j) & \text{при } \ t \in [\hat{b}_k, \hat{b}_{k+1}], \ k \in 1 : m-1; \\ \sum\limits_{j=1}^{m}(t - \hat{b}_j) & \text{при } \ t \geqslant \hat{b}_m, \end{cases} \tag{4}$$

или после упрощения

$$f(t) = \begin{cases} -mt + \sum\limits_{j=1}^{m}\hat{b}_j & \text{при } \ t \leqslant \hat{b}_1; \\ (2k-m)t - \sum\limits_{j=1}^{k}\hat{b}_j + \sum\limits_{j=k+1}^{m}\hat{b}_j & \text{при } \ t \in [\hat{b}_k, \hat{b}_{k+1}], \ k \in 1 : m-1; \\ mt - \sum\limits_{j=1}^{m}\hat{b}_j & \text{при } \ t \geqslant \hat{b}_m. \end{cases}$$

Если количество звеньев функции $f(t)$ четно, т. е. m — нечетно, то, в силу (3), найдется такой индекс $j^* \in I$, что $p_{j^*-1} = -1$, а $p_{j^*} = 1$. Тогда ломаная $f(t)$ имеет единственный глобальный минимум в точке $\hat{b}_{j^*}$.

Если же количество звеньев функции $f(t)$ нечетно, то найдется такой индекс $j^* \in I$, что $p_{j^*-1} = -2$, $p_{j^*} = 0$, $p_{j^*+1} = 2$. Это означает, что ломаная $f(t)$ достигает глобального минимума на всех точках отрезка $\left[\hat{b}_{j^*}, \hat{b}_{j^*+1}\right]$ (см. рис.).

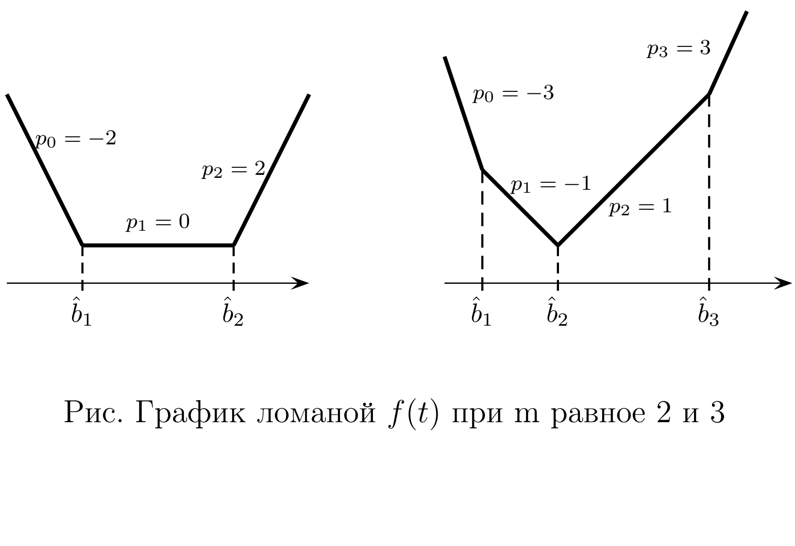

Рис. График ломаной $f(t)$ при m равное 2 и 3

Итак, в силу (3), индекс $j^* \in I$, на котором выполняются неравенства $p_{j^*-1} < 0$ и $p_{j^*} \geqslant 0$, вычисляется по формуле

$$j^* = \left\lfloor \tfrac{m+1}{2} \right\rfloor .$$

Здесь $\lfloor t \rfloor$ — целая часть числа t.

Таким образом, величина $\hat{b}_{j^*}$ является не чем иным, как медианой (нижней медианой) набора точек $b_1, \ldots, b_m$ (см. [2, с. 243]).

Подведем промежуточный итог.

ТЕОРЕМА 1. *Медиана $\hat{b}_{j^*}$ множества точек $\{b_1, \ldots, b_m\}$ доставляет глобальный минимум в задаче* (2). *Более того при четном m глобальный минимум достигается на всех точках отрезка* $\left[\hat{b}_{j^*}, \hat{b}_{j^*+1}\right]$.

4°. Теперь рассмотрим случай, когда $a_k = 1$, $k \in I$, а набор точек $b_1, \ldots, b_m$ состоит из элементов:

$$\underbrace{\xi_1, \ldots, \xi_1}_{w_1}, \underbrace{\xi_2, \ldots, \xi_2}_{w_2}, \ldots, \underbrace{\xi_s, \ldots, \xi_s}_{w_s}. \tag{5}$$

Здесь $\xi_1, \ldots, \xi_s$ — попарно различные вещественные числа (узлы ломаной), $w_k \in \mathbb{N}$, $w_1 + \ldots + w_s = m$. Тогда задача (1) примет вид

$$\sum_{k=1}^{s} w_k |t - \xi_k| \longrightarrow \min_{t \in \mathbb{R}} .$$

Далее, будем исследовать эквивалентную ей задачу

$$\sum_{k=1}^{s} \tfrac{w_k}{m} |t - \xi_k| \longrightarrow \min_{t \in \mathbb{R}} . \tag{6}$$

Здесь коэффициент $\frac{w_k}{m}$ можно интерпретировать, как вес при ξ_k, $k = 1 : s$, т. к. $\sum_{k=1:s} \frac{w_k}{m} = 1$. Далее нам понадобится следующее естественное обобщение понятия медианы массива точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [2, с. 255]. Пусть имеется конечный набор различных вещественных чисел $b_1, \ldots, b_s$, для которых заданы положительные веса $\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_s$, такие, что $\hat{w}_1 + \ldots + \hat{w}_s = 1$. *Взвешенной* (*нижней*) *медианой* называется элемент b_ℓ, удовлетворяющий неравенствам

$$\sum_{k \,:\, b_k < b_\ell} \hat{w}_k < \tfrac{1}{2} \qquad \text{и} \qquad \sum_{k \,:\, b_k > b_\ell} \hat{w}_k \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Согласно определению веса $\hat{w}_k$ являются положительными вещественными числами. В случае, когда веса $\hat{w}_k$ — положительные рациональные числа, справедливо утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Пусть* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — *заданные натуральные числа, такие, что* $\sum\limits_{k=1}^{s} \frac{\alpha_k}{\beta_k} = 1$. *Обозначим через* D *наименьшее общее кратное чисел* $\beta_1, \ldots, \beta_s$. *Взвешенная медиана набора различных вещественных чисел* $b_1, \ldots, b_s$ *с положительными рациональными весами* $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$, $k = 1 : s$, *равна обычной медиане множества*

$$\underbrace{b_1, \ldots, b_1}_{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathrm{D}}, \ldots, \underbrace{b_s, \ldots, b_s}_{\frac{\alpha_s}{\beta_s}\mathrm{D}}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть b_ℓ взвешенная медиана набора чисел $b_1, \ldots, b_s$ с весами α_k/β_k, $k = 1 : s$, т. е.

$$\sum_{k\,:\,b_k < b_\ell} \frac{\alpha_k}{\beta_k} < \frac{1}{2}, \qquad \sum_{k\,:\,b_k > b_\ell} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Умножив обе части неравенств на D, получим

$$\sum_{k\,:\,b_k < b_\ell} \frac{\alpha_k}{\beta_k}\mathrm{D} < \frac{1}{2}\mathrm{D}, \qquad \sum_{k\,:\,b_k > b_\ell} \frac{\alpha_k}{\beta_k}\mathrm{D} \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{D}. \tag{8}$$

В силу того, что $\sum\limits_{k=1}^{s} \frac{\alpha_k}{\beta_k}\mathrm{D} = \mathrm{D}$, из (8) следует, что точка b_ℓ является медианой множества (7). □

Вернемся к задаче (6). Упорядочим пары $(\xi_k, \frac{w_k}{m})$, $k = 1 : s$, по возрастанию первой компоненты. Получим последовательность

$$(\hat{b}_1, \hat{w}_1), \ldots, (\hat{b}_s, \hat{w}_s),$$

где $\hat{b}_1 < \hat{b}_2 < \ldots < \hat{b}_s$.

Целевая функция состоит из $s+1$ звена, а угловые коэффициенты её звеньев можно вычислить по следующим формулам (см. (4)):

$$p_0 = -\sum_{i=1}^{s} \hat{w}_i, \qquad p_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \hat{w}_j - \sum_{i=\ell+1}^{s} \hat{w}_i, \quad \ell = 1 : s-1, \qquad p_s = \sum_{j=1}^{s} \hat{w}_j.$$

Эти формулы можно переписать компактнее. Введем $\hat{w}_0 = \hat{w}_{s+1} = 0$. Тогда

$$p_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \hat{w}_j - \sum_{i=\ell+1}^{s+1} \hat{w}_i, \quad \ell = 0 : s.$$

ТЕОРЕМА 2. *Медиана множества* (5) *доставляет глобальный минимум в задаче* (6).

Доказательство. В силу, выше доказанного, утверждения при $\alpha_k = w_k$ и $\beta_k = m$, обычная медиана набора точек (5) является взвешенной медианой $\hat{b}_{\ell^*}$ множества чисел $\xi_1, \dots, \xi_s$ с весами $\frac{w_k}{m}$, $k = 1 : s$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что на индексе $\ell^* \in 1 : s$ (взвешенной медианы) выполнены неравенства:

$$p_{\ell^*-1} = \sum_{j=0}^{\ell^*-1} \hat{w}_j - \sum_{i=\ell^*}^{s+1} \hat{w}_i \ < \ 0, \tag{9}$$

$$p_{\ell^*} = \sum_{j=0}^{\ell^*} \hat{w}_j - \sum_{i=\ell^*+1}^{s+1} \hat{w}_i \ \geqslant \ 0. \tag{10}$$

Так как $\sum\limits_{k=0}^{s+1} \hat{w}_k = 1$, согласно определению взвешенной медианы, имеем

$$\sum_{k\ :\ \xi_k < \hat{b}_{\ell^*}} \frac{w_k}{m} = \sum_{k=0}^{\ell^*-1} \hat{w}_k < \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\ell^*-1} \hat{w}_k + \sum_{k=\ell^*}^{s+1} \hat{w}_k\right)$$

и

$$\sum_{k\ :\ \xi_k > \hat{b}_{\ell^*}} \frac{w_k}{m} = \sum_{k=\ell^*+1}^{s+1} \hat{w}_k \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\ell^*} \hat{w}_k + \sum_{k=\ell^*+1}^{s+1} \hat{w}_k\right).$$

Итак, чтобы получить (9) и (10), надо в первом неравенстве все перенести в левую часть, а во втором — в правую. □

Замечание. Если $p_{\ell^*-1} < 0$ и $p_{\ell^*} = 0$, то глобальный минимум в задаче (6) достигается на отрезке $\left[\hat{b}_{\ell^*}, \hat{b}_{\ell^*+1}\right]$.

5°. Вернемся к исходной задаче (1). Так как все $a_k > 0$, то узлами ломаной $f(t)$ будут точки b_k/a_k, $k \in I$. В целевой функции сгруппируем слагаемые с одинаковыми узлами. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_s$ — попарно различные узлы ломаной $f(t)$. Тогда, не умаляя общности, задача (1) примет вид

$$\sum_{k=1}^{s} w_k |t - \xi_k| \longrightarrow \min_{t \in \mathbb{R}},$$

где $w_k = \sum\limits_{j \in I\ :\ b_j/a_j = \xi_k} a_j > 0$, $k \in 1 : s$.

Умножим целевую функцию на $1/A$, где $A = w_1 + \ldots + w_s = a_1 + \ldots + a_m$. Таким образом, мы исходную задачу свели к задаче вида (6), с той лишь разницей, что теперь узел ξ_k имеет вес $\frac{w_k}{A}$, $k = 1 : s$.

Сформулируем основной результат доклада.

ТЕОРЕМА 3. *Взвешенная медиана всех различных узлов* $\xi_1, \ldots, \xi_s$ *с весами* $w_1/A, \ldots, w_s/A$ *доставляет глобальный минимум в задаче* (1).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2. □

Осталось, напомнить, что обычную и взвешенную медианы произвольного конечного множества можно найти за линейное время [2, с. 250–255].

Работа выполнена в Институте проблем Машиноведения РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-71-10032).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

2. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. *Алгоритмы. Построение и анализ* // 3-е издание, Вильямс, 2013.

3. Малистов А. С. *О поиске медианы массива за линейное время* // Матем. просв., сер. 3, 21, МЦНМО, М., 2017, 265–270.