1969 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 79(21), № 2(6)

УДК 517.27+512.25

Применение теоремы Э. Хелли в выпуклом программировании, задачах наилучшего приближения и смежных вопросах

В. Л. Левин (Москва)

Введение

В настоящей работе исследуется задача минимизации выпуклой функции n переменных $x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ при большом или бесконечном числе ограничений, каждое из которых состоит в принадлежности x определенному выпуклому множеству. Кроме того, будут рассмотрены некоторые близкие вопросы (опорные функции, линейные неравенства — следствия бесконечной системы неравенств с выпуклыми функциями), а также задачи наилучшего приближения с дополнительными ограничениями.

Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 описан конечный монотонный метод решения задачи выпуклого программирования с большим числом ограничений, заключающийся в последовательном решении ряда маленьких задач (с числом ограничений, равным количеству переменных). В § 2 рассмотрена задача минимизации выпуклой функции на замкнутом выпуклом множестве $M\subset R^n$ при ограничениях $g(t,x)\leqslant 0$, где $x\in M$, параметр t пробегает некоторый бикомпакт, а функция g полунепрерывна сверху по t и выпукла по x. Удается показать, что из этого бесконечного множества ограничений можно выбрать n таких, что минимальное значение рассматриваемой функции не уменьшится, если отбросить все остальные (теорема 1). Из этого результата вытекает уточнение теоремы Куна—Таккера для указанной задачи. § 3 посвящен двум применениям теоремы 1: описаны линейные функции на R^n, опорные к функции $\varphi(x)=\max\limits_t \varphi(t, x)$ (теорема 2), и получено обобщение одной теоремы Хаара—Черникова о бесконечных системах линейных неравенств (теорема 3). В § 4 рассмотрена задача о чебышевском приближении на бикомпакте непрерывной функции φ линейной комбинацией $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\varphi_k$ заданных непрерывных функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ при бесконечном множестве дополнительных ограничений на коэффициенты $\xi_1,\ldots, \xi_n$. Для этой задачи доказаны теорема об очистке (теорема 4, утверждение 1)) и критерий наилучшего приближения (теорема 4, утверждение 2)). Аналогичные результаты получены для задачи наилучшего приближения в банаховом пространстве (теорема 5).

В статье систематически используется теорема Э. Хелли об общих точках семейства выпуклых подмножеств конечномерного пространства.

Приведем ее формулировку в виде, наиболее удобном для наших целей.

Теорема Хелли ([1], [2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство выпуклых подмножеств пространства R, причем либо $\mathfrak{F}$ конечно, либо все множества из $\mathfrak{F}$ замкнуты и имеется по крайней мере одно ограниченное $H \in \mathfrak{F}$. Если любые $n+1$ множеств из $\mathfrak{F}$ имеют общую точку, то пересечение всех множеств семейства $\mathfrak{F}$ непусто.*

Теорема Хелли используется непосредственно в первых двух параграфах, все остальные результаты получены по существу единым методом с помощью теоремы 1. Благодаря этому удалось ослабить известное условие Слейтера, которое обычно предполагают выполненным в исследованиях, посвященных рассматриваемым вопросам (см. [5], [10]—[14]).

Теорема Хелли применялась для исследования экстремальных задач и раньше; отметим работы [17]—[19]. Наши результаты не пересекаются с результатами этих работ и не опираются на них. В заключение заметим, что во многих доказательствах используется выпуклость не самих рассматриваемых функций, а лишь соответствующих множеств.

§ 1

Рассмотрим задачу выпуклого программирования: минимизировать

$$f(x) \tag{1}$$

при ограничениях

$$g_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

где $x \in R^n$, f и $g_j (j = 1, \ldots, N)$ — выпуклые функции, определенные на выпуклом множестве $S \subset R^n$. Предположим, что система неравенств (2) совместна и $N > n$, т. е. ограничений больше, чем переменных.

Положим $A = \inf \{f(x) : g_j(x) \leqslant 0, \ j = 1, \ldots, N\}$. Рассмотрим множество Ω всевозможных наборов из n различных индексов $\omega = (j_1, \ldots, j_n)$ и свяжем с каждым таким набором величину $A(\omega) = \inf \{f(x) : g_j(x) \leqslant 0, j \in \omega\}$.

Предложение 1. *Справедливо равенство* $A = \max\limits_{\omega \in \Omega} A(\omega)$.

Доказательство. Предположим, что $A > -\infty$, так как только в этом случае утверждение нетривиально. Очевидно, $A(\omega) \leqslant A$ для всякого $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим множества $F = \{x : f(x) < A\}$, $F_j = \{x : g_j(x) \leqslant 0\}$, $j = 1, \ldots, N$. Они выпуклы и их пересечение пусто. Тогда, согласно теореме Хелли, пусто пересечение $n+1$ множества* $F \cap [\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{j_k}]$, где $\omega_0 = (j_1, \ldots, j_n)$ — некоторый набор из Ω. Другими словами, $A(\omega_0) \geqslant A$; следовательно, $A(\omega_0) = A$.

Опишем метод решения задач выпуклого программирования с большим числом ограничений, опирающийся на предложение 1 **. В этом методе на

* F обязательно войдет в их число, так как система (2) совместна.

** Близкий метод был предложен И. Ш. Пинскером [20].

каждом шаге приходится иметь дело лишь с n ограничениями из числа (2); переход от одного набора ограничений ω к другому производится по правилу, обеспечивающему монотонное возрастание величины $A(\omega)$.

Будем предполагать, что для всякого $\omega \in \Omega$ либо значение $A(\omega)$ достигается функцией f в единственной точке $x(\omega)$, удовлетворяющей n соответствующим ограничениям, либо $A(\omega) = -\infty$. Это предположение не слишком ограничительно: оно выполняется, например, когда функция f строго выпукла, а множество $\{x: f(x) \leqslant c\}$ ограничено для всякого c, а также, когда (1), (2) есть задача линейного программирования и двойственная задача невырождена.

Описание алгоритма. Начинаем с произвольного набора $\omega_0 \in \Omega$, для которого $A(\omega_0) > -\infty$. Пусть после k-го шага мы получили набор ограничений ω_k и вектор $x_k = x(\omega_k)$. Если вектор x_k удовлетворяет всем ограничениям (2), не входящим в ω_k*, то он является минимальным для нашей задачи, и алгоритм заканчивается. В противном случае найдется ограничение с индексом $j' \notin \omega_k$, которое нарушается в точке x_k, т. е. $g_{j'}(x_k) > 0$. Набор ω_{k+1} получается из набора ω_k введением в последний индекса j' и выведением индекса j_0, определяемого по следующему правилу.

Случай I. Среди ограничений, входящих в ω_k, есть ограничение j_0, которому вектор x_k удовлетворяет как строгому неравенству. Тогда его следует удалить из ω_k.

Случай II. $g_j(x_k) = 0$ для всех $j \in \omega_k$. В этом случае индекс j_0 находится перебором n возможных вариантов. Обозначим через ω_k^j набор индексов, полученный из ω_k добавлением j' и удалением j. Находим $A(\omega_k^j)$: если $A(\omega_k^j) > A(\omega_k)$, полагаем $j_0 = j$ и $\omega_{k+1} = \omega_k^j$; в противном случае переходим к следующему индексу $j \in \omega_k$**.

Таким образом, на каждом шаге алгоритма мы должны решать одну маленькую задачу (с n ограничениями) в случае I и самое большое n маленьких задач (из них до конца одну) в случае II.

Предложение 2. 1) *Если после k-го шага имеет место случай* I, *то* $A(\omega_{k+1}) > A(\omega_k)$;

2) *В случае* II *найдется индекс* $j_0 \in \omega_k$, *для которого* $A(\omega_k^{j_0}) > A(\omega_k)$.

*Таким образом, описанный алгоритм приводит к минимуму за конечное число шагов****.

Доказательство. 1) Допустим противное. Тогда найдется вектор x, удовлетворяющий всем ограничениям из ω_{k+1}, для которого $f(x) \leqslant f(x_k)$. Положим $y = (1-\delta)x_k + \delta x$, где $0 < \delta < 1$ и δ настолько мало, что $(1-\delta) g_{j_0}(x_k) + \delta g_{j_0}(x) \leqslant 0$. Получаем $g_{j_0}(y) \leqslant (1-\delta) g_{j_0}(x_k) + \delta g_{j_0}(x) \leqslant 0$,

* Ограничениям, входящим в ω_k, вектор x_k удовлетворяет по определению.

** Для этого необязательно находить $A(\omega_k^j)$; так только в процессе решения маленькой задачи становится ясно, что $A(\omega_k^j) < A(\omega_k)$, следует переходить к другому $j \in \omega_k$.

*** Напомним, что мы предполагаем выполненным условие, сформулированное перед описанием алгоритма.

так что y удовлетворяет всем ограничениям набора ω_k. Поскольку $y \neq x_k$ и

$$f(y) \leqslant (1-\delta) f(x_k) + \delta f(x) \leqslant f(x_k) = A(\omega_k),$$

мы получаем противоречие с минимальностью, либо с единственностью x_k.

2) Рассмотрим $n+2$ выпуклых множества $F = \{x : f(x) \leqslant A(\omega_k)\}$, $F_j = \{x : g_j(x) \leqslant 0\}$, $j \in \omega_k \bigcup \{j'\}$. Согласно предположению, их пересечение пусто *. Тогда по теореме Хелли среди них найдется $n+1$ множество с пустым пересечением. Следовательно, найдется такой индекс $j_0 \in \omega_k$, что $F \bigcap [\bigcap\limits_{j \in \omega_k^{j_0}} F_j]$ пусто, т. е. $f(x) > A(\omega_k)$ для всех $x \in \bigcap\limits_{j \in \omega_k^{j_0}} F_j$, в частности, $A(\omega_k^{j_0}) > A(\omega_k)$.

При применении описанного алгоритма к конкретным задачам может случиться, что мы все время будем находиться в ситуации, предусмотренной случаем II. Чтобы этого избежать, можно несколько изменить метод, включая в маленькие задачи, решаемые на каждом шаге, не n, а $n+1$ ограничений.

По-видимому, возможны и другие основанные на теореме Хелли методы решения задач выпуклого программирования с большим числом ограничений **. С другой стороны, теорема Хелли может оказаться полезной при построении алгоритмов минимизации и в невыпуклом случае. Для этого ее следует применять к выпуклым конусам, с помощью которых формулируется необходимое условие экстремума, принадлежащее А. Я. Дубовицкому и А. А. Милютину [3].

Заметим, что описанный алгоритм применим, в частности, к задачам линейного программирования ***. При этом он превращается в двойственный симплекс-метод.

§ 2

Рассмотрим следующую задачу: минимизировать

$$f(x) \tag{3}$$

при ограничениях

$$g(t, x) \leqslant 0, \ t \in T, \tag{4}$$

где $x \in M$, M — замкнутое выпуклое подмножество R^n, функция f выпукла и непрерывна на M, T — бикомпакт, функция g полунепрерывна сверху по t при каждом $x \in M$ и выпукла и непрерывна по x при каждом $t \in T$.

Теорема 1. *Предположим, что система* (4) *совместна и для любых n ограничений из* (4) *найдется вектор $y(t_1, \ldots, t_n) \in M$, удовлетворяющий им как строгим неравенствам. Тогда существуют такие n огра-*

* Пересечение первых $n+1$ множеств состоит из единственной точки x_k, но $x_k \notin F_{j'}$.

** При их создании, помимо предложения 1, может пригодиться соответствующее уточнение теоремы Куна-Таккера (см. следствие теоремы 1).

*** Предполагается, что соответствующая двойственная задача невырождена.

ничений, что все остальные можно отбросить, не уменьшая минимального значения f.

Если минимальное значение f достигается на некотором векторе z_0, то можно оставить только те из этих n ограничений, которым z_0 удовлетворяет как равенствам.

Доказательство. Положим $A=\inf\{f(x):g(t,x)\leqslant 0,\ t\in T\}$ и рассмотрим функцию $A(\tau)=A(t_1,\ldots,t_n)=\inf\{f(x):g(t_i,x)\leqslant 0,\ i=1,\ldots,n\}$, где

$$\tau=(t_1,\ldots,t_n)\in T^n=\underbrace{T\times\ldots\times T}_{n\ \text{раз}}.$$

Очевидно, $A(\tau)\leqslant A$ для всех $\tau\in T^n$. Положим $B=\sup\limits_{\tau\in T^n}A(\tau)$. Первое утверждение теоремы будет доказано, если мы покажем, что 1) значение B достигается и 2) $B=A$.

Возьмем последовательность (τ_k), для которой $\lim\limits_{k\to\infty}A(\tau_k)=B$, и выберем из нее сходящуюся подсеть *, что можно сделать ввиду бикомпактности T^n. Чтобы не усложнять записи, предположим, что сходится сама последовательность (τ_k), и пусть $\tau_0=(t_1^0,\ldots,t_n^0)$—ее предел. Покажем, что $A(\tau_0)=B$. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и возьмем вектор $x\in M$, для которого $g(t_i^0,x)\leqslant 0\ (i=1,\ldots,n)$ и $f(x)\leqslant A(\tau_0)+\frac{\varepsilon}{2}$. Положим $x_0=(1-\delta)x+\delta y(t_1^0,\ldots,t_n^0)$, где $0<\delta<1$ и δ настолько мало, что $f(x_0)\leqslant f(x)+\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $f(x_0)\leqslant A(\tau_0)+\varepsilon$ и $g(t_i^0,x_0)<0$ $(i=1,\ldots,n)$. Рассмотрим в T^n окрестность

$$V(\tau_0)=\{\tau=(t_1,\ldots,t_n):g(t_i,x_0)<0,\ i=1,\ldots,n\}.$$

Для всякого $\tau\in V(\tau_0)$ получаем $A(\tau)\leqslant f(x_0)\leqslant A(\tau_0)+\varepsilon$. В частности, $A(\tau_k)\leqslant A(\tau_0)+\varepsilon$ при достаточно больших k, и следовательно, $B\leqslant A(\tau_0)+\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, $A(\tau_0)=B$.

Покажем, что $B=A$. Допустим противное. Возьмем $0<\delta<A-B$ и выберем для каждого $\tau=(t_1,\ldots,t_n)\in T^n$ вектор $x(\tau)\in M$ из условия: $f[x(\tau)]\leqslant A(\tau)+\delta$ и $g(t_i,x(\tau))<0$ $(i=1,\ldots,n)$. Возможность такого выбора доказана выше (см. выбор x_0). Рассмотрим в T^n окрестность

$$V(\tau)=\{\tau'=(t_1',\ldots,t_n'):g(t_i',x(\tau))<0,\ i=1,\ldots,n\}.$$

Окрестности $V(\tau)$, $\tau\in T^n$, образуют открытое покрытие T^n; выберем из него конечное покрытие $V(\tau_1),\ldots,V(\tau_m)$. Обозначим через H выпуклую оболочку точек $x(\tau_1),\ldots,x(\tau_m)$ и рассмотрим в R^n множества $F=\{x:f(x)\leqslant B+\delta\}$, $F_t=\{x:g(t,x)\leqslant 0\}$ $(t\in T)$, H. Легко видеть, что это семейство множеств удовлетворяет условиям теоремы Хелли. Следовательно, пересечение всех этих множеств непусто, так что существует вектор $x\in M$, для которого

* О сетях (обобщенных последовательностях) см. [4].

выполняются все ограничения (4) и $f(x) \leqslant B+\delta < A$, что противоречит определению числа A. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть. Возьмем набор $\tau^0 = (t_1^0, \ldots, t_n^0)$ из условия $A = A(\tau^0) = f(z_0)$ и предположим, что $g(t_i^0, z_0) < 0$ при $i > p$, где $p < n$. Если бы нашелся вектор $z \in M$, удовлетворяющий ограничениям $g(t_i^0, z) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, p)$, для которого $f(z) < f(z_0)$, то при достаточно малом $\delta > 0$ мы имели бы

$$g(t_i^0, (1-\delta) z_0 + \delta z) \leqslant (1-\delta) g(t_i^0, z_0) + \delta g(t_i^0, z) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и $f((1-\delta) z_0 + \delta z) < f(z_0)$ в противоречие с равенством $A(\tau^0) = f(z_0)$. Теорема доказана.

Обозначим через $W(T)$ множество всех конечных регулярных борелевских мер на T. Составим функцию Лагранжа задачи (3), (4)

$$H(x, \sigma) = f(x) + \int\limits_T g(t, x)\, \sigma(dt),$$

где $x \in M$, $\sigma \in W(T)$.

Из теоремы 1 и теоремы Куна — Таккера (см. [5]) вытекает

Следствие (уточнение теоремы Куна — Таккера для задачи (3), (4)). *Пусть выполняются предположения теоремы* 1. *Для того чтобы вектор* $x_0 \in M$ *удовлетворял ограничениям* (4) *и при этом обращал в минимум функцию* f, *необходимо и достаточно существование меры* $\sigma_0 \in W(T)$, *сосредоточенной в* p *точках* $(p \leqslant n)$ *и такой, что* $H(x_0, \sigma) \leqslant H(x_0, \sigma_0) \leqslant H(x, \sigma_0)$ *для любых* $x \in M$, $\delta \in W(T)$.

§ 3

Сейчас мы опишем линейные функции на R^n, опорные к выпуклой функции вида $\varphi(x) = \max\limits_{t \in T} \varphi(t, x)$. Для функционалов на бесконечномерном пространстве аналогичное описание получено впервые А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным в предположении, что T конечно (см. [6], [3])*; общий бесконечномерный случай разобран в [8].

Напомним определение опорной функции. Пусть φ — выпуклая функция на открытом выпуклом множестве $S \subseteq R^n$. Линейная функция l на R^n называется опорной к φ в точке $x_0 \in S$, если

$$l(x) - l(x_0) \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0) \tag{5}$$

для всех $x \in S$**

Теорема 2***. *Пусть* S — *открытое выпуклое множество в* R^n, T — *бикомпакт*, $\varphi(t, x)$ — *функция двух переменных* $t \in T$, $x \in S$, *полунепрерывная сверху по* t *при каждом* $x \in S$ *и выпуклая по* x *при каждом* $t \in T$.

* См. также [7].

** Поскольку φ выпукла, для этого достаточно, чтобы неравенство (5) выполнялось для всех x из некоторой окрестности x_0.

*** Ср. с теоремой 3 в [8].

Рассмотрим на S *выпуклую функцию* $\varphi(x)=\max\limits_{t\in T}\varphi(t,x)$ *и положим* $T_0=\{t\in T:\varphi(t,x_0)=\varphi(x_0)\}$.

Для того чтобы линейная функция l *на* R^n *была опорной к* φ *в точке* x_0, *необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде*

$$l(x)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j l_j(x),$$

где $1\leqslant p\leqslant n+1$, $\lambda_j\geqslant 0$ $(j=1,\ldots,p)$, $\sum\limits_{j=1}^{p}\lambda_j=1$, l_j — *функция, опорная к* $\varphi(t_j,x)$ *в* x_0 $(j=1,\ldots,p)$, $t_1,\ldots,t_p\in T_0$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Возьмем какую-нибудь замкнутую выпуклую окрестность U точки x_0, содержащуюся в S, и рассмотрим в пространстве $R^{n+1}=R^n\times R^1$ множество $M=U\times R^1$. Положим $f(z)=-l(x)+a$, $g(t,z)=\varphi(t,x)-a$ для любых $z=(x,a)\in M$, $t\in T$ и рассмотрим задачу (3), (4). Вектор $z_0=(x_0,\varphi(x_0))\in M$ удовлетворяет ограничениям (4) по определению функции φ. Далее, для всякого $z=(x,a)\in M$, удовлетворяющего (4), $\varphi(x)-a\leqslant 0$, и, так как l опорна к φ в x_0, имеем

$$f(z)=-l(x)+a\geqslant -l(x_0)+\varphi(x_0)-\varphi(x)+a\geqslant -l(x_0)+\varphi(x_0)=f(z_0),$$

т. е. f достигает минимального значения в точке z_0. Из теоремы 1 вытекает * равенство

$$f(z_0)=\min\{f(z):g(t_j,z)\leqslant 0,\ j=1,\ldots,p\}$$

при некоторых $t_1,\ldots,t_p\in T_0$, $p\leqslant n+1$.

Определим на S выпуклую функцию $\varphi_0(x)=\max\limits_{j=1,\ldots,p}\varphi(t_j,x)$ и рассмотрим для всякого $x\in U$ вектор $z(x)=(x,\varphi_0(x))\in M$. Имеем $g(t_j,z(x))=\varphi(t_j,x)-\varphi_0(x)\leqslant 0$ $(j=1,\ldots,p)$, следовательно, $f(z(x))\geqslant f(z_0)$. Расписывая подробно это неравенство и учитывая, что $\varphi(x_0)=\varphi_0(x_0)$, получаем

$$l(x)-l(x_0)\leqslant\varphi_0(x)-\varphi_0(x_0)$$

для всех $x\in U$, т. е. функция l опорна к φ_0 в x_0. Доказываемое утверждение вытекает теперь из теоремы 1.4 в [7].

Следующий результат является обобщением одной теоремы А. Хаара — С. Н. Черникова о бесконечных системах линейных неравенств.

Теорема 3. *Пусть* T — *бикомпакт,* $g(t,x)$ — *функция на* $T\times R^n$, *полунепрерывная сверху по* t *при каждом* $x\in R^n$ *и выпуклая по* x *при каждом* $t\in T$. *Предположим, что система неравенств* (4) *совместна и для любых* n *точек* $t_1,\ldots,t_n\in T$ *найдется вектор* $y(t_1,\ldots,t_n)\in R^n$, *для которого* $g(t_j,y)<0$, $j=1,\ldots,n$. *Пусть* l — *ненулевая линейная функция на* R^n *и неравенство* $l(x)\leqslant b$ *является следствием системы* (4).

---

* Все предположения теоремы 1, очевидно, выполняются.

Тогда это неравенство является следствием неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g(t_j^0, x) \leqslant 0$$

при некоторых $t_1^0, \ldots, t_n^0 \in T, \lambda_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. Из теоремы 1, примененной к задаче (3), (4) с $f(x) = -l(x)$ и $M = R^n$, вытекает существование n точек $t_1^0, \ldots, t_n^0 \in T$, для которых $\sup\{l(x) : g(t_j^0, x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, n\} \leqslant b$. Рассмотрим в R^n множества:

$P = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_j \geqslant g(t_j^0, x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ для некоторого x, удовлетворяющего неравенству $l(x) > b\}$,

$$K = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_j < 0, j = 1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, P выпукло, K — открытый выпуклый конус, и они не имеют общих точек. Тогда существует гиперплоскость, разделяющая P и K и проходящая через начало. Следовательно, найдутся такие $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, не все равные нулю, что $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j \geqslant 0$ для всех $(a_1, \ldots, a_n) \in P$; в частности, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g(t_j^0, x) \geqslant 0$ для всякого x, удовлетворяющего неравенству $l(x) > b$.

Пусть теперь $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g(t_j^0, x) \leqslant 0$. В случае строгого неравенства из доказанного следует, что $l(x) \leqslant b$. Если же $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g(t_j^0, x) = 0$, возьмем последовательность

$$x_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) x + \frac{1}{k} y(t_1^0, \ldots, t_n^0) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Имеем $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g(t_j^0, x_k) < 0$, следовательно, $l(x_k) \leqslant b$. Тогда и $l(x) = \lim_{k\to\infty} l(x_k) \leqslant b$. Теорема доказана.

Следствие (Хаар [9], Черников [10], [11]*). *Пусть дана система линейных неравенств с n переменными* $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$L_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j - b_i \leqslant 0, \quad i \in I,$$

где I *— некоторое бесконечное множество, и линейное неравенство*

$$L_0(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{0j}\xi_j - b_0 \leqslant 0$$

является следствием этой системы. Предположим, что множество

---

* В формулировке, почти совпадающей с приведенной здесь, этот результат содержится в [10]. В работе А. Хаара [9], появившейся значительно раньше, имелось доказательство для случая, когда множество I счетно. С. Н. Черников [10], [11] обнаружил, что при сделанных в [9] предположениях теорема неверна, исправил ее формулировку так, что доказательство Хаара стало корректным, и свел общий случай к исправленной теореме Хаара.

$(n+1)$-мерных векторов $(a_{i1}, \ldots, a_{in}, b_i)$, $i \in I$, *компактно и существует набор переменных* $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$, *для которого* $L_i(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) < 0$, $i \in I$ *.

Тогда найдутся такие числа $\lambda_0 \geqslant 0, \lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ *и такие* n *индексов* $i_1, \ldots, i_n \in I$, *что*

$$L_0(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \lambda_0.$$

§ 4

Обратимся к задачам наилучшего приближения. Доказываемые в этом параграфе теоремы усиливают некоторые результаты Е. Г. Гольштейна [12]—[14]**.

Пусть $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — непрерывные вещественные функции на бикомпакте P.

Требуется найти линейную комбинацию $\sum_{k=1}^{n} \xi_k\varphi_k$, для которой величина

$$\max_{p \in P} \left| \varphi(p) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(p) \right| \tag{6}$$

обращается в минимум при условии, что коэффициенты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ удовлетворяют ограничениям

$$\psi(q, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant 0, \quad q \in Q, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\varkappa k}\xi_k = b_\varkappa, \quad \varkappa = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

где Q — некоторый бикомпакт, функция $\psi(q, x) \equiv \psi(q, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ выпукла на R^n при каждом $q \in Q$ и полунепрерывна сверху на Q при каждом $x = (\xi_1 \ldots, \xi_n) \in R^n$, равенства (8) линейно независимы.

Предположим, что система ограничений (7), (8) совместна и функция φ непредставима в виде линейной комбинации $\sum_{k=1}^{n} \xi_k\varphi_k$ с коэффициентами $\xi_1, \ldots, \xi_n$, удовлетворяющими ограничениям (7), (8).

Теорема 4. *Пусть для всякого набора из* $n-m+1$ *точек* $q_1, \ldots, q_{n-m+1} \in Q$ *найдется вектор* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *удовлетворяющий равенствам* (8) *и неравенствам*

$$\psi(q_j, x) \equiv \psi(q_j, \xi_1, \ldots, \xi_n) < 0 \quad (j = 1, \ldots, n-m+1).$$

---

* Согласно теореме 4, последнее условие можно несколько ослабить.

** Утверждения соответствующих теорем данной работы и [14] совпадают. Усиление заключается в том, что в [14[сделаны более ограничительные предположения. Главное из них — условие Слейтера, вместо предположения теорем 4 и 5. Кроме того, в [14] дополнительно требуется непрерывность ψ по q и метризуемость рассматриваемых бикомпактов. В [12] и [13] получены некоторые важные частные случаи соответствующих результатов из работы [14].

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) *Существуют такие* $p_1^0, \ldots, p_r^0 \in P, q_1^0, \ldots, q_s^0 \in Q, r > 0, r+s \leqslant n-m+1$, *что всякий элемент наилучшего приближения в задаче* (6) — (8) *является одновременно элементом наилучшего приближения функции* φ *на множестве* $\{p_1^0, \ldots, p_r^0\}$ *при ограничениях* (8) *и*

$$\psi(q_j^0, x) \leqslant 0 \quad (j=1, \ldots, s). \tag{7'}$$

Кроме того, если $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ — *вектор коэффициентов элемента наилучшего приближения в задаче* (6) — (8), *то выполняются следующие условия:*

а) $$\left|\varphi(p_i^0) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k(p_i^0)\right| = \max_{p \in P} \left|\varphi(p) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k(p)\right| \quad (i=1, \ldots, r);$$

б) $\psi(q_j^0, x_0) = 0 \quad (j=1, \ldots, s)$.

2) *Предположим, что функции* $\psi(q_j^0, x)$, $j=1, \ldots, s$, *дифференцируемы на* R^n. *Пусть* $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ *удовлетворяет ограничениям* (7), (8). *Для того чтобы функция* $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k$ *была элементом наилучшего приближения в задаче* (6) — (8), *необходимо и достаточно выполнение условий* а), б) *и*

в) $$\sum_{i \in I^+} \lambda_i^0 \varphi_k(p_i^0) - \sum_{i \in I^-} \lambda_i^0 \varphi_k(p_i^0) = \sum_{\varkappa=1}^{m} \nu_\varkappa^0 a_{\varkappa k} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 \frac{\partial \psi(q_j^0, x_0)}{\partial \xi_k} \quad (k=1, \ldots, n),$$

где $\lambda_i^0 \geqslant 0$ $(i=1, \ldots, r)$, $\mu_j^0 \geqslant 0$ $(j=1, \ldots, s)$, $\nu_\varkappa^0$ $(\varkappa=1, \ldots, m)$ — *вещественные числа,* $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 = 1$,

$$I^+ = \left\{i : \varphi(p_i^0) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k(p_i^0) > 0\right\}, \qquad I^- = \left\{i : \varphi(p_i^0) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k(p_i^0) < 0\right\},$$

$$p_1^0, \ldots, p_r^0 \in P, \qquad q_1^0, \ldots, q_s^0 \in Q.$$

Замечание. Утверждение 2) справедливо и в случае, когда функции $\psi(q_j^0, x)$ недифференцируемы. При этом условие в) заменится следующим:

в′) $$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i \in I^+} \lambda_i^0 \varphi_k(p_i^0) - \sum_{i \in I^-} \lambda_i^0 \varphi_k(p_i^0) - \sum_{\varkappa=1}^{m} \nu_\varkappa^0 a_{\varkappa k}\right] h_k \leqslant \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 d\psi(q_j^0, x_0, h)$$

для любого $h = (h_1, \ldots, h_n) \in R^n$, где

$$d\psi(q_j^0, x_0, h) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\psi(q_j^0, x_0 + \varepsilon h) - \psi(q_j^0, x_0)}{\varepsilon}.$$

Доказательство теоремы 4. 1) Обозначим через H пространство векторов $h = (h_1, \ldots, h_n)$, удовлетворяющих однородной системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\varkappa k} h_k = 0, \quad \varkappa = 1, \ldots, m,$$

и рассмотрим $(n-m+1)$-мерное пространство $H\times R^1$. Возьмем топологическую сумму $T=P\oplus Q$ и положим для любых $z=(h,a)\in H\times R^1$, $t\in T$

$$f(z)=a,\quad g(t,z)=\begin{cases}\left|\varphi(p)-\sum_{k=1}^{n}(\eta_k^0+h_k)\varphi_k(p)\right|-a & \text{при } t=p\in P,\\ \psi(q,y_0+h) & \text{при } t=q\in Q,\end{cases}$$

где $y_0=(\eta_1^0,\ldots,\eta_n^0)$ — какой-нибудь вектор, удовлетворяющий равенствам (8). Поскольку всякий вектор $x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, для которого выполняются равенства (8), представим в виде $x=y_0+h$, где $h\in H$, задача (6) — (8) равносильна задаче (3) — (4) с указанными функциями f, g и бикомпактом T. Доказываемое утверждение вытекает тогда из теоремы 1.

2) Рассмотрим задачу наилучшего приближения функции φ линейной комбинацией $\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi_k$ на конечном множестве $\{p_1^0,\ldots,p_r^0\}$ при ограничениях (7'), (8) на вектор коэффициентов $x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$; будем для краткости называть эту задачу очищенной *. Она, очевидно, эквивалентна задаче минимизации функции

$$F(w)=a$$

при ограничениях (7'), (8) и

$$\left|\varphi(p_i^0)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi_k(p_i^0)\right|-a\leqslant 0,\quad i=1,\ldots,r, \tag{9}$$

на вектор $w=(x,a)\in R^n\times R^1$. Составим функцию Лагранжа последней задачи

$$\begin{aligned}H(w,\lambda,\mu,\nu)&=F(w)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[\left|\varphi(p_i^0)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi_k(p_i^0)\right|-a\right]+\\&+\sum_{j=1}^{s}\mu_j\psi(q_j^0,x)+\sum_{\varkappa=1}^{m}\nu_\varkappa\left[\sum_{k=1}^{n}a_{\varkappa k}\xi_k-b_\varkappa\right]=\\&=a\left(1-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left|\varphi(p_i^0)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi_k(p_i^0)\right|+\\&+\sum_{j=1}^{s}\mu_j\psi(q_j^0,x)+\sum_{\varkappa=1}^{m}\nu_\varkappa\left[\sum_{k=1}^{n}a_{\varkappa k}\xi_k-b_\varkappa\right].\end{aligned}$$

Необходимость. Согласно 1), элемент наилучшего приближения $\sum_{k=1}^{n}\xi_k^0\varphi_k$ исходной задачи является таковым и для очищенной задачи, причем выполняются условия а), б). Тогда $w_0=(x_0,a_0)$ $\left(\text{где } x_0=(\xi_1^0,\ldots,\xi_n^0),\ a_0=\left|\varphi(p_i^0)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k^0\varphi_k(p_i^0)\right|\right)$ — оптимальный вектор эквивалентной задачи выпукло-

* Утверждения типа 1) иногда называют теоремами об очистке.

го программирования. Согласно теореме Куна — Таккера, найдутся такие $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_r^0) \geqslant 0$, $\mu^0 = (\mu_1^0, \ldots, \mu_s^0) \geqslant 0$, $\nu^0 = (\nu_1^0, \ldots, \nu_m^0)$, что

$$H(w_0, \lambda^0, \mu^0, \nu^0) = \min_w H(w, \lambda^0, \mu^0, \nu^0). \qquad (10)$$

Из (10) немедленно вытекает равенство $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 = 1$. Следовательно,

$$H(w, \lambda^0, \mu^0, \nu^0) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \left| \varphi(p_i^0) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(p_i^0) \right| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 \psi(q_j^0, x) + \sum_{\varkappa=1}^{m} \nu_\varkappa^0 \left[\sum_{k=1}^{n} a_{\varkappa k} \xi_k - b_\varkappa \right]$$

зависит только от x; положим $\Phi(x) = H(w, \lambda^0, \mu^0, \nu^0)$. В малой окрестности x_0 имеем

$$\Phi(x) = \sum_{i \in I^+} \lambda_i^0 \left[\varphi(p_i^0) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(p_i^0) \right] - \sum_{i \in I^-} \lambda_i^0 \left[\varphi(p_i^0) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(p_i^0) \right] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 \psi(q_j^0, x) + \sum_{\varkappa=1}^{m} \nu_\varkappa^0 \left[\sum_{k=1}^{n} a_{\varkappa k} \xi_k - b_\varkappa \right].$$

Поскольку $\Phi(x_0) = \min_x \Phi(x)$, справедливы равенства $\frac{\partial \Phi(x_0)}{\partial \xi_k} = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Расписывая подробно эти равенства, получаем условие в).

Достаточность. Пусть $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ удовлетворяет ограничениям (7), (8) и условиям а), б), в). Из а) и в) получаем равенства

$$\frac{\partial \Phi(x_0)}{\partial \xi_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Из этих равенств и выпуклости функции Φ вытекает соотношение (10). Далее, из а), б) получаем равенство $H(w_0, \lambda, \mu, \nu) = H(w_0, \lambda^0, \mu^0, \nu^0) = a_0$ для любых λ, μ, ν. Итак, $(w_0, \lambda^0, \mu^0, \nu^0)$ — седловая точка функции Лагранжа $H(w, \lambda, \mu, \nu)$. Тогда по теореме Куна — Таккера $w_0 = (x_0, a_0)$ — минимальный вектор рассматриваемой задачи выпуклого программирования, следовательно, $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k$ — элемент наилучшего приближения очищенной задачи. Поскольку вектор $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ удовлетворяет ограничениям (7), (8), функция $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k$ является элементом наилучшего приближения и для исходной задачи. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь задачу наилучшего приближения в банаховом пространстве. Пусть X — вещественное пространство Банаха, $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X$. Требуется указать линейную комбинацию $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k$, для которой величина

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k \right\| \qquad (11)$$

достигает минимума при условиях (7), (8) на коэффициенты $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Предположим, что минимальное значение (11) строго больше нуля.

Теорема 5. *В предположениях теоремы 4 справедливы следующие утверждения.*

1) *Существуют линейные функционалы* $p_1^0, \ldots, p_r^0$, *принадлежащие единичной сфере сопряженного пространства* X', *и точки* $q_1^0, \ldots, q_s^0 \in Q$, $r > 0$, $r + s \leqslant n - m + 1$, *такие, что вектор коэффициентов всякого элемента наилучшего приближения* $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k$ *доставляет минимум функции*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant r} p_i^0 \left(\varphi - \sum_{k=1}^{m} \xi_k \varphi_k \right)$$

при ограничениях (7), (8) *и величина этого минимума равна минимальному значению* (11). *Кроме того, выполняются условия*:

а) $$p_i^0 \left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k \right) = \left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k \right\| \quad (i = 1, \ldots, r),$$

б) $$\psi(q_j^0, x_0) = 0 \quad (j = 1, \ldots, s), \quad \text{где} \quad x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0).$$

2) *Пусть* $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ *удовлетворяет ограничениям* (7), (8). *Для того чтобы* $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k$ *был элементом наилучшего приближения, необходимо и достаточно выполнение условий* б) *и*

в) $$p^0(\varphi_k) = \sum_{\varkappa=1}^{m} \nu_\varkappa^0 a_{\varkappa k} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 \frac{\partial \psi(q_j^0, x_0)}{\partial \xi_k} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

где $p^0 \in X'$, $\|p^0\| = 1$, $p^0 \left(\varphi - \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k \right) = \left\| \varphi - \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^0 \varphi_k \right\|$, $\mu_j^0 \geqslant 0 (j = 1, \ldots, s)$, $\nu_\varkappa^0 (\varkappa = 1, \ldots, m)$ — *вещественные числа*, $q_1^0, \ldots, q_s^0 \in Q$.

Замечание. Если функции $\psi(q_j^0, x)$ недифференцируемы, условие в) заменится следующим:

в′) $$\sum_{k=1}^{n} \left[p^0(\varphi_k) - \sum_{\varkappa=1}^{m} \nu_\varkappa^0 a_{\varkappa k} \right] h_k \leqslant \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 \, d\psi(q_j^0, x_0, h)$$

для любого $h = (h_1, \ldots, h_n) \in R^n$.

Доказательство теоремы 5. Пусть P — единичный шар сопряженного пространства X', рассматриваемый в слабой топологии. Положим $\varphi(p) = p(\varphi)$, $\varphi_k(p) = p(\varphi_k)$, $k = 1, \ldots, n$, для всякого $p \in P$. Тогда величина (11) принимает форму (6) и доказываемые утверждения сразу вытекают из теоремы 4. При этом $p^0 = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i^0 p_i^0$.

Замечание. Используя более тонкие рассуждения, проведенные в аналогичной ситуации С. Я. Хавинсоном [15], можно выбрать функционалы $p_1^0, \ldots, p_r^0$, являющиеся крайними точками единичной сферы сопряженного пространства X'.

Аналогичные методы применимы и к другим задачам на минимакс. Так, используя теорему 1, можно получить простые доказательства некоторых известных предложений о непрерывных играх с выпуклой платежной функцией (см. [16], гл. II, § 5).

(Поступила в редакцию 26/IX 1968 г.)

Литература

1. Э. Хелли, О совокупности выпуклых тел с общими точками, Успехи матем. наук, вып. **II** (1936), 80—81.
2. И. Г. Дукор, К теореме Хелли о совокупности выпуклых тел с общими точками, Успехи матем. наук, вып. **X** (1944), 60—61.
3. А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Задачи на экстремум при наличии ограничений, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **5**, № **3** (1965), 395—453.
4. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц, Линейные операторы. Общая теория, Москва, ИЛ, 1962.
5. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава, Исследования по линейному и нелинейному программированию, Москва, ИЛ, 1963.
6. А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Задачи на экстремум при наличии ограничений, ДАН СССР, **149**, № **4** (1963), 759—762.
7. Б. Н. Пшеничный, Выпуклое программирование в нормированном пространстве, Кибернетика, № **5** (1965), 46—54.
8. В. Л. Левин, О некоторых свойствах опорных функционалов, Матем. заметки, **4**, вып. **6** (1968), 685—696.
9. A. Haar, Über lineare Ungleichungen, Acta Litt. Scient. Univ. Hung., **2** (1924), 1—14.
10. С. Н. Черников, О теореме Хаара для бесконечных систем линейных неравенств, Успехи матем. наук, **XVIII**, вып. **5 (113)** (1963), 199—200.
11. С. Н. Черников, Линейные неравенства, Москва, изд-во «Наука», 1968.
12. Е. Г. Гольштейн, Об одном обобщении чебышевской задачи наилучшего приближения, Успехи матем. наук, **XVI**, вып. **4 (100)** (1961), 208.
13. Е. Г. Гольштейн, Об одной общей постановке задачи наилучшего приближения, ДАН СССР, **144**, № **1** (1962), 21—22.
14. Е. Г. Гольштейн, Исследования по математическому программированию и теории приближений, Москва, Докторская диссертация, 1967.
15. С. Я. Хавинсон, Об аппроксимации элементами выпуклых множеств, ДАН СССР, **172**, № **2** (1967), 294—297.
16. Д. Блекуэлл и М. А. Гиршик, Теория игр и статистических решений, Москва, ИЛ, 1958.
17. Л. Г. Шнирельман, О равномерных приближениях, Изв. АН СССР, серия матем., **2** (1938), 53—60.
18. H. Rademacher, I. J. Schoenberg, Helly's theorems on convex domains and Tchebycheff's approximation problem, Canad. J. Math., **2** (1950), 245—256.
19. R. T. Rockafellar, Helly's theorem and minima of convex functions, Duke Math. J., **32**, № **3** (1965), 381—397.
20. И. Ш. Пинскер, Метод альтернанса, Автоматика и телемеханика, **XXV**, № **3** (1964), 302—311.