«Утверждаю»
проректор по НИР ФГБОУ ВПО
«Саратовский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского»
доктор ф.-м. наук, профессор
_____________ А.В.Стальмахов
«29» ___августа___ 2014 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

на диссертацию Долгополика Максима Владимировича «Абстрактное кодифференциальное исчисление в нормированных пространствах и его приложение к негладкой оптимизации»

Аппроксимация негладких функций и получение условий их экстремума – основное направление негладкого анализа. Оно отражается в многочисленных работах Р.Т. Рокафеллара, Б.Н. Пшеничного, В.Ф. Демьянова, А.М. Рубинова, Ф. Кларка и других известных отечественных и зарубежных математиков. На каждом очередном этапе развития появлялись новые все более широкие классы негладких функций, для которых вводились соответствующие способы аппроксимации, пользуясь которыми выражались условия экстремума.

В конце 1980-х годов В.Ф. Демьянов ввел понятие кодифференцируемой функции и кодифференциала, дающего неоднородную аппроксимацию такой функции. Это имело важное значение для построения эффективных методов оптимизации ввиду, в отличие от однородных аппроксимаций, непрерывности кодифференциального отображения.

Идея использовать положительно однородные верхние выпуклые аппроксимации (в.в.а) и нижние вогнутые аппроксимации (н.в.а.) зародилась в работах А.А. Милютина и Б.Н. Пшеничного в конце 1970-х годов и, кроме этих авторов, развивалась научной школой В.Ф. Демьянова – А.М. Рубинова.

В данной диссертации на основе идей абстрактного выпуклого анализа дается дальнейшее развитие кодифференцируемости, вводятся и изучаются исчерпывающие семейства неоднородных выпуклых и вогнутых аппроксимаций с построением соответствующего исчисления аппроксимаций данных видов, получением условий экстремума и приложением к некоторым задачам вариационного исчисления.

Следует сказать, что мотивация таких исследований во многом заключается в их прикладном значении. Поэтому можно уверенно говорить об **актуальности** темы диссертации и ее **значимости** как для математических так и возможных технико-экономических приложений.

Диссертация состоит из введения и пяти глав. Приведем наиболее важные результаты в порядке изложения текста диссертации:

введение через опр.2.2.1 понятия Н-кодифференцируемой функции. Уже само это понятие, логично обобщающее определение В.Ф. Демьянова через понятие Н-выпуклой функции из абстрактного выпуклого анализа, дает большой простор для приложений;

построено исчисление Н-кодифференцируемых функций, позволяющее подсчитывать Н-кодифференциал для основных операций над такими функциями (предл. 2.4.1–2.4.6 и теоремы 2.4.1 и 2.4.2);

получены необходимые условия экстремума в задаче математического программирования для кодифференцируемых функций (теоремы 2.5.1–2.5.4);

более детально изучается Н-кодифференцируемость для случая, когда Н-множество непрерывных аффинных функций, заданных на нормированном пространстве. Для этого случая, с соответствующей детализацией:

- указаны полезные эквивалентные формулировки кодифференцируемости (предл. 3.2.1) и рассмотрены интересные примеры 3.2.2–3.2.5, развивающие, по сути, кодифференциальное исчисление,
- построено исчисление непрерывно кодифференцируемых функций (предл. 3.3.1–3.3.6, теор. 3.3.1),
- получено необходимое условие экстремума в задаче математического программирования для кодифференцируемых функций в терминах гипо- и гипердифференциалов функций (теоремы 3.4.1–3.4.2),
- получено обобщение теоремы о среднем значении для кодифференцируемой функции (теорема 3.5.2),
- построен и обоснован метод кодифференциального спуска (п.3.6.1 - схема метода, предл. 3.6.1–3.6.2 – монотонность метода, теорема 3.6.2

– сходимость метода);

введены понятия сильных и слабых неоднородных верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций (опр. 4.1.1–4.1.3), а также их исчерпывающих семейств (опр. 4.1.4–4.1.5). Эти понятия позволили сформулировать как необходимые условия экстремума (теор. 4.3.1 следствие 4.3.1), так и достаточные условия строгого локального экстремума (теор. 4.3.2, следствие 4.3.2) в сравнимой форме;

построено исчисление неоднородных в.в.а. и н.в.а. (п.4.2), включая вычисление исчерпывающего семейства сильных неоднородных в.в.а. для точной верхней грани множества функций, допускающих сильную неоднородную в.в.а. (теор. 4.2.1);

дано обобщение (п.4.4.1) и обоснование (монотонность – предл. 4.4.3, сходимость к стационарной точке – теор. 4.4.1.) метода кодифференциального спуска, использующего неоднородные в.в.а. минимизируемой функции;

с помощью построения неоднородных в.в.а. (теор. 5.2.1) получено необходимое условие решения негладкой задачи Больца (теор. 5.2.2), с демонстрацией его большей эффективности по сравнению с другими необходимыми условиями (Ф. Кларк, А.Д. Иоффе - Р.Т. Рокафеллар).

Таковы основные результаты. Они сопровождаются многочисленными примерами и замечаниями, позволяющими делать сравнения с ранее полученными. Текст изложен на высоком научном уровне. Кроме методов негладкого анализа автор использует широкий диапазон средств из теории топологических пространств, функционального анализа, многозначного анализа, вариационного исчисления.

Полученные результаты являются не просто обобщением, а именно творческим развитием ранее введенных понятий и известных фактов. Кроме того, обращает на себя внимание то, что

– корректное введение кодифференцируемости на нормированных пространствах потребовало получения весьма сложных по доказательству вспомогательных фактов, опирающихся на элементы топологии и функционального анализа (предл. 3.1.1 и теор. 3.1.1),

– для обоснования метода кодифференциального спуска была доказана специальная форма теоремы об опорной гиперплоскости (теор. 3.6.1),

– понятие сильной и слабой в.в.а. и н.в.а. были введены впервые. Эффективность этих понятий отразилась на возможности получения необходимых условий экстремума и достаточных условий строгого локального экстремума в сравнимой форме.

Принципиальных замечаний по диссертации нет. Однако отметим некоторые погрешности:

1) на стр. 55 во 2-ой строке после формулы (3.2) вместо $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должно быть $\varphi(\Delta x)$ и $\psi(\Delta x)$,
2) на стр. 59, 7 строка снизу вместо $\varphi(x)$ должно быть $\varphi(\Delta x)$,
3) на стр. 75 в п.п. в), с) и d) вместо $\overline{d_\mu} f(x)$ должно быть $\overline{d_\mu} f(x_k)$,
4) на стр. 101 в 5 строке снизу вместо $\varphi(y)$ должно быть $p(y)$,
5) к задаче, рассматриваемой в п.5.3, также, как это было сделано в задачах из п.п. 5.1–5.2, хотелось бы видеть конкретный пример. Но тут же заметим, это потребовало бы весьма значительного объема, а диссертация и без того перегружена.

Указанные погрешности (имеющие скорее характер опечаток) не отражаются на положительной оценке диссертации. Она является **законченной научно-исследовательской работой**, выполненной на высоком профессиональном уровне. Все приведенные факты **строго доказаны**. Диссертант свободно владеет широким диапазоном средств, прежде всего, методами негладкого анализа и обогащает его новыми средствами исследования, демонстрируя их эффективность.

Полученные результаты являются **новыми**, это **весомый вклад** в развитие негладкого анализа и недифференцируемой оптимизации. Они в достаточной мере опубликованы в тезисах конференций и статьях, две из которых в изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации будут полезны специалистам по негладкому анализу в МГУ, СПбГУ, МИРАН, МФТИ, СГУ, ВЦ РАН, ИММ УрО РАН.

Считаем, что диссертация Долгополика Максима Владимировича удовлетворяет требованиям ВАК Минобрнауки РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, соответствует требованиям пункта 9 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013г. №842, а ее автор, Долгополик М.В., заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика.

Отзыв подготовлен профессором С.И. Дудовым, заслушан и утвержден на заседании кафедры математической экономики ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», протокол № 1 от 28 августа 2014 г.

Заведующий кафедрой математической экономики
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского»,
д.ф.-м.н., профессор Дудов Сергей Иванович

Адрес:	410012, Саратов, Астраханская, 83, СГУ, механико-математический факультет
Тел.:	8 (8452) 518215
e-mail:	DudovSI@info.sgu.ru

Подпись С.И. Дудова удостоверяю
Ученый секретарь СГУ
доцент И.В. Федусенко
28 08 2014