Матричный инструментарий исследования приближенных СЛАУ и несобственных задач ЛП

В.И. Ерохин
СПбГТИ(ТУ), Санкт-Петербург
e-mail: erohin_v_i@mail.ru

На практике часто приходится иметь дело с поиском решений систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), неравенств (СЛАН), и задач линейного программирования (ЛП), матрицы коэффициентов которых подвержены ошибкам или заданы приближенно. При этом матрицы оказываются неизвестными объектами, требующими определения. Похожая ситуация возникает и в «обратных» задачах при генерации модельных СЛАУ, СЛАН и задач ЛП с заданными свойствами. Первым известным инструментом исследования подобных задач, по-видимому, является «основная лемма» А.Н. Тихонова [1] о матрице с минимальной евклидовой нормой (далее в тексте для векторов и матриц обозначаемой символом $\|\cdot\|$), разрешающей СЛАУ вида $Ax = b$ при заданных векторах x и b. Первоначально лемма использовалась в задаче

$$Z(A, b, \mu, \delta): \ \|x_1\| \to \min_{\|A-A_1\|\leqslant\mu,\ \|b-b_1\|\leqslant\delta,\ A_1x_1=b_1} (A_1, b_1, x_1?),$$

названной А.Н. Тихоновым регуляризованным методом наименьших квадратов (РМНК) [2], а затем А.А. Ватолиным в задачах минимальной матричной коррекции несобственных задач ЛП [3].

В докладе предполагается обсудить ряд ранее опубликованных и новых результатов «инструментального» и теоретического характера, связанных с РМНК и матричной коррекцией несобственных задач ЛП. Ограниченный объем тезисов не позволяет изложить материал подробно, ниже приведены три характерных теоремы.

Пусть $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ – векторные нормы, $\|A\|_{\varphi,\psi} \triangleq \max\limits_{x\neq0} \frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)}$ – аддитивная матричная норма, $\varphi^*(x) \triangleq \max\limits_{x\neq0} \frac{\left|y^\top x\right|}{\varphi(x)}$ – норма, двойственная к норме $\varphi(\cdot)$ относительно скалярного произведения $y^\top x$, $\mathfrak{D}\left(x \neq 0, \varphi(\cdot)\right) \triangleq \left\{y \left| y^\top x = \varphi^*(y)\cdot\varphi(x) = 1\right.\right\}$ – множество векторов, двойственных к заданному вектору $x \neq 0$ относительно нормы $\varphi(\cdot)$.

Теорема 1. *Обобщение «основной» леммы на* $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ *-нормы [4].* $\forall x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ $\exists \widehat{A} \in \operatorname*{Argmin}\limits_{Ax=b} \|A\|_{\varphi,\psi}$, $\widehat{A} = by^\top$, $y \in \mathfrak{D}\left(x, \varphi(\cdot)\right)$,

$||\widehat{A}||_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(b)}{\varphi(x)}$.

Теорема 2. *Обобщение «основной» леммы на пару сопряженных СЛАУ* [5]. $\forall x, v \in \mathbb{R}^n$, $\forall u, b \in \mathbb{R}^m \; \left| u^\top b = v^\top x = \alpha \neq 0 \right.$ $\exists! \hat{A} = \underset{Ax=b, u^\top A = v^\top}{\operatorname{argmin}} \|A\|$, $\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{uv^\top}{u^\top u} - \alpha \frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u}$, $||\hat{A}||^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2}$.

Теорема 3. *Обобщённая (на нормы, отличные от евклидовой) задача РМНК*

$$\tilde{Z}(A, b, \mu, \delta): \; \varphi(x_1) \to \min_{\|A - A_1\|_{\varphi,\psi} \leqslant \mu, \; \psi(b - b_1) \leqslant \delta, \; A_1 x_1 = b_1} (A_1, b_1, x_1?)$$

имеет непустое множество решений тогда и только тогда, когда имеет решение задача $R(A, b, \mu, \delta): \; \varphi(x) \to \min\limits_{\psi(b - Ax) \leqslant \mu \cdot \varphi(x) + \delta}$.

Оптимальные значения целевых функций обеих задач совпадают. Если задача $\tilde{Z}(A, b, \mu, \delta)$ *имеет непустое множество решений, то к нему принадлежит решение, полученное следующим образом:* x_1 *– решение задачи* $R(A, b, \mu, \delta)$, $y \in \mathfrak{D}\left(x_1, \varphi\left(\cdot\right)\right)$, $b_1 = b - \frac{\delta}{\psi(b - Ax_1)} \cdot (b - Ax_1)$, $A_1 = A + (b_1 - Ax_1) y^\top$.

Литература

[1] *Тихонов А.Н.* О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1373-1383.

[2] *Тихонов А.Н.* О методах автоматизации обработки наблюдений // Вестн. АН СССР. 1983. № 1. С. 14-25.

[3] *Ватолин А.А.* Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 12. С. 1907-1908.

[4] *Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В.* Минимаксная матричная коррекция несовместимых систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 5. С.52-62.

[5] *Ерохин В.И.* Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 587-601.