Метод гиподифференциального спуска в задаче построения оптимального управления

А.В. Фоминых

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

e-mail: alexfomster@mail.ru

В докладе рассматривается задача оптимального управления в следующей классической постановке. Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot{x} = f(x, u, t), \ \ t \in [0, T]. \tag{1}$$

Требуется подобрать такое управление $u^* \in P_m[0, T]$, удовлетворяющее интегральному ограничению

$$\int_0^T u^2(t) dt \leqslant 1, \tag{2}$$

которое переводит систему (1) из заданного начального положения

$$x(0) = x_0 \tag{3}$$

в заданное конечное состояние

$$x(T) = x_T \tag{4}$$

и доставляет минимум функционалу

$$I = \int_0^T f_0(x, \dot{x}, u, t) dt. \tag{5}$$

Считаем, что оптимальное управление u^* существует. В системе (1) $T > 0$ — заданный момент времени, f — вещественная n-мерная вектор-функция, $x(t)$ — n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывной на $[0, T]$. Предполагаем $f(x, u, t)$ непрерывно дифференцируемой по x и u и непрерывной по всем трём аргументам. В функционале (5) f_0 — вещественная функция, которую будем считать непрерывно дифференцируемой по x, $\dot{x}$ и u и непрерывной по всем четырём аргументам.

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0, T]$. С помощью теории точных штрафных функций [1] задача (1)–(5) сводится к задаче безусловной минимизации некоторого негладкого функционала $\Phi(z, u)$ на пространстве $P_n[0,T] \times P_m[0,T]$. Данный функционал оказывается субдифференцируемым, для него необходимые условия минимума выписаны в терминах субдифференциала и гиподифференциала [2].

Выделен класс систем (1) и класс функционалов (5), для которых функционал Φ оказывается выпуклым, а тогда необходимое условие минимума будет и достаточным.

Для поиска стационарных точек функционала Φ применяются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска [3], при этом строится некоторая последовательность точек $\{[z_k, u_k]\}$. Если данная последовательность конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала Φ по построению. Если же последовательность $\{[z_k, u_k]\}$ бесконечна, то при некоторых дополнительных предположениях метод гиподифференциально спуска сходится в следующем смысле [3]

$$||d\Phi_k(z,u)|| \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

где $d\Phi_k(z,u) = d\Phi(z_k, u_k)$ — гиподифференциал функционала Φ на k-ой итерации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 12-01-00752 и 14-01-31521 мол-а, гранта Санкт-Петербургского государственного университета, проект № 9.38.205.2014.

Литература

[1] *Карелин В.В.* Точные штрафы в одной задаче управления // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 137–147.

[2] *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

[3] *Демьянов В.Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.