Минимаксная задача управления сингулярно возмущенной системой с ограниченной информацией

С.К. Мышков
Санкт-Петербургский госуниверситет, Санкт-Петербург
e-mail: skmyshkov@mail.ru

Рассматривается система, функционирование которой описывается следующими соотношениями:

$$E(\mu)\dot{x} = P(\mu)x + Q(\mu)u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$z(t) = H(\mu)x(t) = H_1(\mu)x_1(t); \tag{2}$$

$$u = Mz, \tag{3}$$

$$J(u) = \int_0^\infty (x^* A(\mu)x + x^* B(\mu)u + u^* B^*(\mu)x + u^* C(\mu)u)dt, \tag{4}$$

Здесь $x \in R^n$ — вектор координат состояния, $x_1 \in R^{n_1}$ — «медленные» (доминирующие) координаты, $x_2 \in R^{n_2}$ — «быстрые» координаты, $n_1 + n_2 = n$, $E(\mu) = \mathrm{diag}(E_{n_1}, \mu E_{n_2})$, E — единичная матрица; $u \in R^r$ — управление; $z \in R^m$ — измерение, $m \leq n_1$; $\mu > 0$ — малый параметр; $t \geq 0$ — время. Предполагается, что все матрицы, зависящие от μ, разлагаются в степенные ряды, абсолютно сходящиеся при $|\mu| < \bar{\mu}$; например,

$$P(\mu) = \begin{pmatrix} P_{11}(\mu) & P_{12}(\mu) \\ P_{21}(\mu) & P_{22}(\mu) \end{pmatrix}, \; P_{ij}(\mu) = \hat{P}_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} P_{ij}^{(k)}$$

Предполагается также, что подинтегральная квадратичная форма положительно полуопределенная, причем $C(\mu) > 0$, $P_{22}(\mu)$-гурвицева и $rank(H_1(\mu)) = m, \forall \mu \in (0, \bar{\mu})$. Из (2),(3) следует, что управление осуществляется по доминирующим координатам, причем при $m < n_1$ информация о них неполная. Обозначим через $\mathcal{M} \subset R^{r \times m}$ множество матриц M таких, что система (1)-(2), замкнутая управлением (3) с $M \in \mathcal{M}$, асимптотически устойчива. Пусть $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Тогда при любом допустимом управлении (3) имеем

$$J(u) = x_0^* \Theta(M) x_0 \stackrel{def}{=} J(M) \tag{5}$$

где $\Theta(M)$-решение уравнения Ляпунова для задачи (1)-(4). По причинам, изложенным в [1,2], вводится минимаксное управление, оптимальное в следующем смысле:

$$\lambda_{max}(\Theta(M)) \Longrightarrow \min_{M \in \mathcal{M}} \tag{6}$$

Необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\Theta P_e + P_e^*\Theta + W(M) = 0, \tag{7}$$

$$LP_e^* + P_eL + v * v^* = 0, \tag{8}$$

$$\Theta v = \lambda v, \tag{9}$$

$$M = -C^{-1}(Q^*\Theta + B^*)LH^*(HLH^*)^{-1}. \tag{10}$$

При этом (10) — искомое значение матрицы $M_o(\mu)$ минимаксного управления (4).

Здесь λ, v- максимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы Θ; L-положительно полуопределенная n-матрица;

$$P_e = \begin{pmatrix} P_{11} + Q_1MH & P_{12} \\ \frac{1}{\mu}(P_{21} + Q_2MH) & \frac{1}{\mu}P_{22} \end{pmatrix},$$

$$W(M) = A + BMH + (BMH)^* + (MH)^*CMH.$$

Для исследования уравнений (7)-(10) используется метод асимптотических представлений, который позволяет выделить главные члены искомых величин.

Теорема 1. *Матрица минимаксного управления и оптимальное значение функционала имеют следующий вид:*

$$M_o = \hat{M}_s + O_1(\mu), \quad I(u_o) = \lambda_s + O_2(\mu). \tag{11}$$

Здесь $\hat{M}_s, \lambda_s$ *— решение соответствующей редуцированной задачи.*

Если редуцированная задача имеет единственное решение, то в исходной задаче (1)–(4) имеется единственное минимаксное управление $u_0 = M_oz$, в котором матрица M_o определяется равенством (11).

Литература

[1] *Мышков С.К.* Линейные управляемые системы с неполной информацией о координатах состояния // Негладкие задачи теории оптимизации и управления / Под ред. В.Ф.Демьянова. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. С. 248-272.

[2] *Мышков С.К.* Минимаксное управление сингулярно возмущенной системой с неполной информацией. // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер.10, 2009, Вып.4, С. 284-291.