Решение вариационной разрывной задачи первого рода методом гиподифференциального спуска

Г.Ш. Тамасян
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург
e-mail: g.tamasyan@spbu.ru

Пусть $T > 0$. Рассмотрим задачу о нахождении экстремума функционала

$$I(x) = \int_0^T F(x, x', t)\, dt \tag{1}$$

считая, что допустимые кривые $x \in P^1[0, T]$ удовлетворяют фиксированным граничным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1 \tag{2}$$

и могут иметь излом в некоторой точке с абсциссой $t_1 \in (0, T)$. Функцию $F(x, z, t)$ будем считать непрерывно-дифференцируемой по всем своим аргументам. Заметим, что этот излом возможен лишь там, где $F''_{zz} = 0$.

Как известно [1, 2], каждый гладкий участок кривой, являющейся экстремалью, должен удовлетворять уравнению Эйлера, а в каждой угловой точке (изломе) функции выполняются условия Вейерштрасса–Эрдмана:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial F(t)}{\partial z}\right|_{t=t_1-0} &= \left.\frac{\partial F(t)}{\partial z}\right|_{t=t_1+0}, \\ \left.\left(F(t) - z(t)\frac{\partial F(t)}{\partial z}\right)\right|_{t=t_1-0} &= \left.\left(F(t) - z(t)\frac{\partial F(t)}{\partial z}\right)\right|_{t=t_1+0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $F(t) = F(x, z, t)$.

Для решения задачи (1)–(2) предлагается воспользоваться теорией точных штрафных функций [3, 4, 5, 6, 7]. Построенная штрафная функция является негладкой и исследуется на всем пространстве. С помощью классической вариации выводятся условия экстремума. Из полученных условий экстремума естественным образом следуют классические условия экстремума, а именно уравнение Эйлера и условия Вейерштрасса–Эрдмана (3). Однако, помимо этих условий экстремума данный подход позволяет построить новые конструктивные «прямые» методы [8, 9, 10] (наискорейшего и гиподифференциального спуска), которые были реализованы в математических пакетах Maple и Mathcad. Результаты численных экспериментов показали эффективность рассматриваемых методов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-31521_мол_а, гранта СПбГУ 9.38.205.2014.

Литература

[1] *Гюнтер Н.М.* Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1941. 308 с.

[2] *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учеб. для вузов 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. 488 с.

[3] *Еремин И.И.* Метод «штрафов» в выпуклом программировании // Доклады АН СССР, 1967. Т. 143, № 4. С. 748–751.

[4] *Демьянов В.Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

[5] Di Pillo G., Facchinei F. Exact penalty functions for nondifferentiable programming problems, In *Nonsmooth Optimization and Related Topics*. Eds. F.H. Clarke, V.F. Demyanov and F. Giannessi, Plenum, New York (1989), pp. 89–107.

[6] *Долгополик М. В.* Точные штрафные функции в негладкой оптимизации [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO» [Официальный сайт]. Избранные доклады. 8.05.2014. URL: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/DolgopolikM_ExactPenalty.pdf (дата обращения: 6.11.2014).

[7] *Долгополик М. В.* Обзор по точным штрафным функциям [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO» [Официальный сайт]. Избранные доклады. 2.10.2014. URL: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/DolgopolikMV_2Oct2014.pdf (дата обращения: 24.11.2014).

[8] *Демьянов В.Ф., Тамасян Г.Ш.* О прямых методах решения вариационных задач // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 36–47.

[9] *Demyanov V.F., Tamasyan G.Sh.* Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. Volume 60. Issue 1. 2011. P. 153–177.

[10] *Долгополик М.В., Тамасян Г.Ш.* Об эквивалентности методов наискорейшего и гиподифференциального спусков в некоторых задачах условной оптимизации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2, с. 532-542.