

Метод установления для поиска минимального
расстояния между двумя замкнутыми, выпуклыми,
гладкими множествами

Аббасов М.Э.

III International Conference in memory of V.I.Zubov
Stability and Control Processes

08/10/2015

Работы по данной теме

Косолап А. И. Квадратичные оптимизационные задачи компьютерной геометрии // Искусственный интеллект, 2010. №1. С. 70–75.

Lin A., Han S.P. On the distance between two ellipsoids // SIAM Journal on Optimization, 2002. Vol. 13. P. 298–308.

Tamasyan G.Sh., Chumakov A. A. Finding the distance between ellipsoids. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2014; 8(3):400–410.

Утешев А.Ю. Вычисление расстояний между геометрическими объектами 2007, <http://pmpu.ru/vf4/algebra2/optimiz/distance>

Утешев А. Ю., Яшина М. В. Нахождение расстояния от эллипсоида до плоскости и квадрики в \mathbb{R}^n // Доклады АН, 2008. Т. 419, №4. С. 471–474.

Shi-Min Hu, Johannes Wallner A second order algorithm for orthogonal projection onto curves and surfaces // Computer Aided Geometric Design, 2005, Vol. 22. P. 251–260

Методы установления

Схема большинства известных методов установления описывается уравнениями вида

$$A_0 \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} + A_1 \left(x, \frac{dx}{dt}, \nabla f(x) \right) = 0$$

или

$$B_0 \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + B_1 \left(x, \frac{dx}{dt}, \nabla f(x) \right) = 0,$$

где

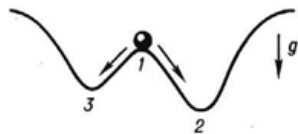
$$A_0(x^*, 0) \neq 0, \quad A_1(x^*, 0, 0) = 0,$$

$$B_0(x^*, 0) \neq 0, \quad B_1(x^*, 0, 0) = 0$$

и выполнены условия диссипативности, обеспечивающие сходимость к точке экстремума x^* .

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., Численные методы.
М.: Наука, 1987, 600 с.

Метод тяжелого шарика



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \frac{\nabla f(x)}{1 + \|\nabla f(x)\|^2} = 0.$$

В окрестности решения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \nabla f(x) = 0.$$

Переход к разностной схеме приводит к алгоритму

$$x^{n+1} = x^n - \alpha \nabla f(x^n) + \beta(x^n - x^{n-1}),$$

который сходится с линейной скоростью. За счет выбора параметров α , β можно добиться получения оптимального (в смысле количества итераций) линейного процесса.

Inomata S., Kumada M. On the Golf Method. Bulletin of Electrical Laboratory (Japan). 1961; 25(7):495–512.

Поляк Б.Т., Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983, 384 с.

Постановка исходной задачи

Пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$, где $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая, непрерывно дифференцируемая функция. Будем решать задачу

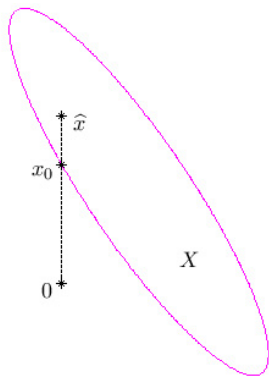
$$\begin{cases} \|x - \tilde{x}\| \longrightarrow \inf \\ x \in X \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно X – замкнутое, выпуклое множество. Задача имеет решение, а, следовательно, существует $x_* \in X$ на котором искомый инфимум достигается. Без уменьшения общности можно считать $\tilde{x} = 0_n$. С учетом сказанного (1) переписется в виде

$$\begin{cases} \|x\| \longrightarrow \min \\ x \in X \end{cases}$$

Эту задачу мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Нахождение начальной точки x_0



Уравнения движения

Обозначим координату шарика $x(t)$, где t время. Уравнение движения

$$m\ddot{x}(t) = F(t) + N(t) + R(t),$$

$F(t)$ – кулоновская сила, $N(t)$ – сила нормальной реакции, $R(t)$ – сила сопротивления.

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = \psi(x, z) \end{cases} \quad (2)$$

где

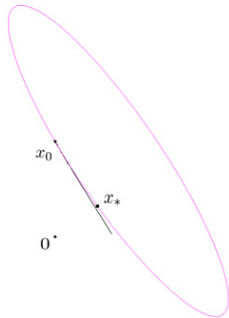
$$\psi(x, z) = -\frac{p_1}{\|x\|^3}x + \frac{p_1 \langle x, \nabla f(x) \rangle}{\|x\|^3 \|\nabla f(x)\|^2} \nabla f(x) - p_2 z.$$

Алгоритм без процедуры корректировки

Полученную систему (2) будем решать методом ломанных Эйлера. Выбираем $x(0) = x_0$, $z(0) = 0_n$, некоторое малое положительное δ – длину шага.

Пусть у нас есть x_k, z_k , тогда

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta z_k \\ z_{k+1} = z_k + \delta \psi(x_k, z_k) \end{cases} \quad (3)$$



Корректировка

Пусть из x_{k-1} совершив итерацию по (3) попадаем в точку \tilde{x}_{k-1} .

$$x_k = \tilde{x}_{k-1} + \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|} \xi,$$

где ξ некий скалярный параметр, определяемый из условия

$$f\left(\tilde{x}_{k-1} + \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|} \xi\right) = 0.$$

Разлагая эту функцию в окрестности $\xi = 0$, учитывая близость \tilde{x}_{k-1} к границе X , отбрасываем все слагаемые выше первого порядка

$$f(\tilde{x}_{k-1}) + \left\langle \nabla f(\tilde{x}_{k-1}), \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|} \right\rangle \xi = 0.$$

Откуда

$$x_k = \tilde{x}_{k-1} - \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|^2} f(\tilde{x}_{k-1}).$$

Итоговый алгоритм и критерий останова

Поэтому окончательно получаем двухэтапный алгоритм

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k-1} = x_{k-1} + \delta z_{k-1} \\ x_k = \tilde{x}_{k-1} - \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|^2} f(\tilde{x}_{k-1}) \\ z_k = z_{k-1} + \delta \psi(x_{k-1}, z_{k-1}) \end{cases}$$

В положении равновесия сила нормальной реакции уравновешивается силой Кулона, что означает коллинеарность векторов x_k и $\nabla f(x_k)$.

$$\sqrt{\sum_{i=2}^n \left(\frac{f'_{x_i}(x_k)}{x_k^i} - \frac{f'_{x^1}(x_k)}{x_k^1} \right)^2} < \varepsilon$$

Аналогичный результат следует и из необходимых условия экстремума:

$$L(x, \lambda) = \|x\|^2 + \lambda f(x),$$

где λ – некоторый скаляр. Откуда

$$2x + \lambda \nabla f(x) = 0,$$

что опять же означает коллинеарность x_k и $\nabla f(x_k)$.

Постановка основной задачи

Пусть

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) \leq 0\},$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid f_2(y) \leq 0\},$$

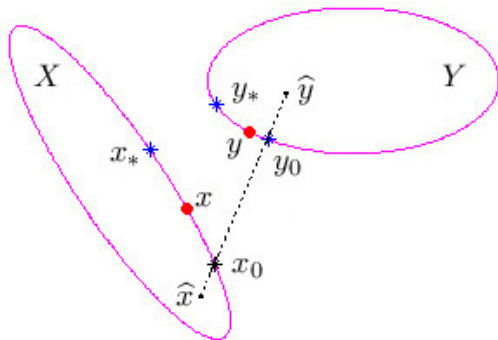
где $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции.

Задача

$$\begin{cases} \|x - y\| \rightarrow \inf \\ x \in X \\ y \in Y \end{cases}$$

может быть решена аналогично.

Иллюстрация работы алгоритма для основной задачи



Алгоритм для основной задачи

Выбираем $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z_1(0) = 0_n$, $z_2(0) = 0_n$, малое $\delta > 0$ для величины шага. Предположим получены x_{k-1} , y_{k-1} , $z_{1,k-1}$, $z_{2,k-1}$, тогда алгоритм запишется в виде

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k-1} = x_{k-1} + \delta z_{1,k-1} \\ \tilde{y}_{k-1} = y_{k-1} + \delta z_{2,k-1} \\ x_k = \tilde{x}_{k-1} - \frac{\nabla f_1(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f_1(\tilde{x}_{k-1})\|^2} f_1(\tilde{x}_{k-1}) \\ y_k = \tilde{y}_{k-1} - \frac{\nabla f_2(\tilde{y}_{k-1})}{\|\nabla f_2(\tilde{y}_{k-1})\|^2} f_2(\tilde{y}_{k-1}) \\ z_{1,k} = z_{1,k-1} + \delta \psi_1(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{1,k-1}, z_{2,k-1}) \\ z_{2,k} = z_{2,k-1} + \delta \psi_2(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{1,k-1}, z_{2,k-1}) \end{cases}$$

Критерий остановки

$$\psi_1(x, y, z_1, z_2) = \frac{p_1}{\|x - y\|^3} \left[y - x + \frac{\langle x - y, \nabla f_1(x) \rangle}{\|\nabla f_1(x)\|^2} \nabla f_1(x) \right] - p_2 z_1,$$

$$\psi_2(x, y, z_1, z_2) = \frac{p_1}{\|x - y\|^3} \left[x - y + \frac{\langle y - x, \nabla f_2(y) \rangle}{\|\nabla f_2(y)\|^2} \nabla f_2(y) \right] - p_2 z_2.$$

В положении равновесия сила Кулона коллинеарна вектору $x_k - y_k$, а нормальная реакция для первого и второго шарика коллинеарны $\nabla f_1(x_k)$, $\nabla f_2(y_k)$ соответственно.

$$\sqrt{\sum_{i=2}^n \left(\frac{x_k^i - y_k^i}{f'_{1,x^i}(x_k)} - \frac{x_k^1 - y_k^1}{f'_{1,x^1}(x_k)} \right)^2} + \sqrt{\sum_{i=2}^n \left(\frac{x_k^i - y_k^i}{f'_{2,y^i}(y_k)} - \frac{x_k^1 - y_k^1}{f'_{2,y^1}(y_k)} \right)^2} < \varepsilon.$$

Численные эксперименты

Результаты ² применения алгоритма для нахождения минимального расстояния между эллипсоидами

$$f_1(x) = \langle A_1 x, x \rangle + \langle b_1, x \rangle + c_1, \quad f_2(y) = \langle A_2 y, y \rangle + \langle b_2, y \rangle + c_2,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -30 \\ -21 \end{pmatrix}, \quad c_1 = 47,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -20 \\ -48 \end{pmatrix}, \quad c_2 = 220.$$

²Расчеты проводились в математическом пакете Matlab R2013a на компьютере с ЦПУ Core i5-3450, 3.1 GHz, ОЗУ 8 Gb DDR3.

Таблица: Результаты при $\varepsilon = 10^{-8}$, $\delta = 10^{-3}$.

ρ_1	ρ_2	N^a	$\ x - x_*\ ^b$	$\ y - y_*\ ^b$	t^c
100	0.01	1115495	0.08×10^{-8}	0.03×10^{-8}	7.358
100	0.05	226573	1.9×10^{-8}	1.02×10^{-8}	1.505
100	0.1	147689	7.31×10^{-8}	3.43×10^{-8}	0.985
100	0.5	61686	4.33×10^{-8}	3.61×10^{-8}	0.407
100	1	33034	8.58×10^{-8}	4.24×10^{-8}	0.215
100	2	18809	8.65×10^{-8}	4.22×10^{-8}	0.123
100	3	10635	9.56×10^{-8}	3.77×10^{-8}	0.07
100	4	22111	7.77×10^{-8}	4.13×10^{-8}	0.143
100	5	30331	7.77×10^{-8}	4.13×10^{-8}	0.191
100	10	66130	7.77×10^{-8}	4.13×10^{-8}	0.443
100	50	338244	7.78×10^{-8}	4.13×10^{-8}	2.246
100	100	676954	7.78×10^{-8}	4.13×10^{-8}	4.472
100	200	1354145	7.78×10^{-8}	4.13×10^{-8}	8.359

^a Количество итераций, ^b Расстояние до истинного решения, ^c Время расчетов, с