Тихоновское решение пары взаимно двойственных приближенных задач линейного программирования

Ерохин В.И.[1]

[1]Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров
erohin_v_i@mail.ru

III МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ»

Санкт-Петербург, 5-9 октября 2015 г.

(Предистория): Задача о матричном решении СЛАУ с минимальной евклидовой нормой

Основная лемма [a]

[a][1] Тихонов А.Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1373-1383.

Дана СЛАУ $Ax = b$ с **неизвестной** матрицей $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \neq 0$.
$\exists! \hat{A} = \underset{Ax=b}{\operatorname{argmin}} \|A\|$, $\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x}$, $\|A\| = \frac{\|b\|}{\|x\|}$, где

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

РМНК А.Н. Тихонова для приближенных СЛАУ

A_0, b_0 – неизвестные «точные» объекты, A, b – известные «приближенные» объекты, $\|A_0 - A\| \leqslant \mu, \|b_0 - b\| \leqslant \delta < \|b\|$, $\mu, \delta \geqslant 0$ – априорно известные константы (одновременно не равные нулю).

Нормальное решение приближенной СЛАУ (РМНК)

$$Z(A, b, \mu, \delta) : \|x_1\| \to \min_{A_1 x_1 = b_1, \|A_1 - A\| \leqslant \mu, \|b_1 - b\| \leqslant \delta} \tag{1}$$

Построение нормального решения приближенной СЛАУ

Теорема о сведении РМНК к задаче математического программирования [1]

Если существует хотя бы одна совместная СЛАУ $A_1 x_1 = b_1$, для которой выполняются условия $\|A_1 - A\| \leqslant \mu$, $\|b_1 - b\| \leqslant \delta$, то решение проблемы (1) существует, непрерывно зависит от параметров и может быть определено следующим образом:

$$x_1^* \text{ – решение задачи}$$

$$R(A, b, \mu, \delta) : \|x\| \to \min_{\|b - Ax\| = \mu\|x\| + \delta}, \tag{2}$$

$$b_1^* = b - \frac{\delta}{\|b - Ax_1^*\|} \cdot (b - Ax_1^*),$$

$$A_1^* = A + (b_1^* - Ax_1^*) \cdot \frac{{x_1^*}^\top}{{x_1^*}^\top x_1^*}.$$

Регуляризация А.Н. Тихонова для задач ЛП

Регуляризация задачи ЛП [a]

[a] [2] Тихонов А.Н. О некорректных задачах оптимального планирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 1. С. 81-89.

$$L: \; Ax = b,\; x \geqslant 0,\; c^\top x \to \min$$

$$L_R: \; \|Ax - b\| + \alpha((c^\top x)^2 + \lambda \left\|x - x^0\right\|) \to \min_{x \geqslant 0}$$

Устойчивое решение приближенной задачи ЛП [a]

[a] [3] Агаян Г.М., Рютин А.А., Тихонов А.Н. О задаче линейного программирования с приближенными данным // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 9. С. 1303-1311.

$$L_0: \; A_0 x = b_0,\; x \geqslant 0,\; c^\top x \to \min \; \text{– точная задача ЛП}$$

$$L: \; Ax = b,\; x \geqslant 0,\; c^\top x \to \min \; \text{– приближенная задача ЛП}$$

$$L_R: \; (c^\top x + \lambda \left\|x - x^0\right\|) \to \min_{x \geqslant 0, A_1 x = b_1, \|A_1 - A\| \leqslant \mu, \|b_1 - b\| \leqslant \delta}$$

– регуляризованная задача ЛП

Матричная коррекция допустимой области несобственных задач ЛП (1983, А.А. Ватолин, ... 2015, М.Н. Хвостов, ...)

Постановка задачи

$$\left\| \left[\begin{array}{cc} H & -h \end{array} \right] \right\| \to \min_{\text{Система } (A+H)x=b+h,\ x\geq 0 \text{ совместна}} . \qquad (3)$$

Пусть $\varphi(z) = \frac{z^\top Dx}{z^\top z}$, $y \in \operatorname{Argmin}_{z\geqslant 0} \varphi(z)$.

Сведение (3) к задаче математического программирования

$$\inf_{\text{Система } (A+H)x=b+h,\ x\geq 0 \text{ совместна}} \left\| \left[\begin{array}{cc} H & -h \end{array} \right] \right\|^2 = \min_{z\geqslant 0} \varphi(z),$$

задача (3) имеет решение тогда и только тогда, когда найдется такой y, что $y_{n+1} > 0$. При этом

$\left[\begin{array}{cc} H^* & -h^* \end{array} \right] = -\left[\begin{array}{cc} A & -b \end{array} \right] \frac{yy^\top}{y^\top y}$, $x^* = y_{n+1}^{-1} \cdot [y_1 \dots y_n]^\top$ – решение системы $(A + H^*)\,x = b + h^*, x \geq 0$.

Обобщение леммы Тихонова на систему сопряженных СЛАУ

Задача о матричном решении системы сопряженных СЛАУ [a]

[a] [4] Ерохин В.И. Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 587-601.

Дано: $x, v \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x, u \neq 0$.
Найти: матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с минимальной евклидовой нормой, являющейся решением системы

$$Ax = b,\ u^\top A = v^\top. \tag{4}$$

Теорема о матричном решении системы сопряженных СЛАУ

Система (4) разрешима относительно матрицы $A \Leftrightarrow$ выполняется условие $b^\top u = v^\top x = \alpha$. Минимальное по еквклидовой норме решение единственно и определяется формулой

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{uv^\top}{u^\top u} - \alpha \cdot \frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u}.$$

При этом $\left\|\hat{A}\right\|^2 = \|b\|^2 \Big/ \|x\|^2 + \|v\|^2 \Big/ \|u\|^2 - \alpha^2 \Big/ \left(\|x\|^2 \cdot \|u\|^2\right)$.

Минимальная матричная коррекция системы сопряженных СЛАУ с известными A, b, v на заданные решения $x \neq 0$, $u \neq 0$ такие, что $u^\top b = v^\top x = \gamma$: $(A+H)x = b$, $u^\top (A+H) = v^\top$, $\|H\| \to \min$.

Решение с помощью обобщенной леммы Тихонова

$$\hat{H} = (b - Ax)\frac{x}{x^\top x} + \frac{u}{u^\top u}\left(v^\top - u^\top A\right) - \alpha\frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u},$$

$$\left\|\hat{H}\right\|^2 = \frac{\|b-Ax\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\left\|v^\top - u^\top A\right\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2},\ \alpha = \gamma - u^\top Ax.$$

Решение с помощью векторизации матрицы H

$$\hat{h}(x,u) = \begin{bmatrix} X(x) \\ U(u) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} b - Ax \\ v - A^T u \end{bmatrix},\ \text{где } X(x) = \begin{bmatrix} x^\top & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x^\top & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x^\top \end{bmatrix},$$

$U(u) = [u_1 I_n \cdots u_m I_n]$, $\hbar$ собран из столбцов H, «$+$» – псевдообращение, I_n – единичная матрица порядка n.

Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач ЛП

Пусть $L(A, b, c)$: $Ax = b,\ x \geq 0,\ c^\top x \to \max$ – прямая задача ЛП в канонической форме, $L^*(A, b, c)$: $u^\top A x \geq c^\top,\ u^\top b \to \min$ – двойственная задача ЛП в основной форме.

Постановка задачи

$$\|H\| \to \min_{\text{Задачи } L(A+H,b,c),\ L^*(A+H,b,c) \text{ собственные}} \tag{5}$$

Сведение задачи (5) к задаче МП, общие условия:

$c^\top x = u^\top b = \gamma,\ d^\top x = 0,\ x \geq 0,\ d \geq 0.$

– обобщенная лемма Тихонова:

$$\frac{\|b-Ax\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\left\|c+d-A^\top u\right\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\left(\gamma - u^\top A x\right)^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2} \to \min_{x,d,u}.$$

– векторизация: $\left\| \begin{bmatrix} X(x) \\ U(u) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} b-Ax \\ c+d-A^T u \end{bmatrix} \right\|^2 \to \min\limits_{x,d,u}.$

Достаточность коррекции ДО задачи ЛП для её собственности*

$$\inf_{\text{Система } (A+H)x=b,\ x\geq 0 \text{ совместна}} \|H\| \text{ достигается} \Rightarrow \text{Задачи}$$

$L\left(A+H,b,c\right)$, $L^{*}\left(A+H,b,c\right)$ – собственные, $L\left(A,b,c\right)$ – несобственная задача I-го рода. [1]

[1] [5] Ерохин В.И. О некоторых достаточных условиях разрешимости и неразрешимости задач матричной корреции несобственных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. №3. С. 110–116.

Регуляризованная задача ЛП*

Пусть $\mathbf{X}(A,b) \triangleq \{x \,|\, Ax = b, x \geqslant 0\}$ и $\mathbf{U}(A,c) \triangleq \left\{u \,\middle|\, u^\top A \geqslant c^\top\right\}$ – допустимое множества задач ЛП $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$.

Постановка задачи

Дано: A_0, b_0, c_0 – неизвестные «точные» объекты, A, b, c – известные «приближенные» объекты, $\|A_0 - A\| \leqslant \mu$, $\|b_0 - b\| \leqslant \delta_b$, $\|c_0 - c\| \leqslant \delta_c$, задачи $L(A_0,b_0,c_0)$, $L^*(A_0,b_0,c_0)$ – **собственные.**

Найти: A_1, b_1, c_1, x_1, u_1 такие, что $\|A_1 - A\| \leqslant \mu$, $\|b_1 - b\| \leqslant \delta_b$, $\|c_1 - c\| \leqslant \delta_c$,

$$\|x_1\|^2 + \|u_1\|^2 \to \min_{\mathbf{X}(A_1,b_1)\neq\varnothing,\mathbf{U}(A_1,c_1)\neq\varnothing} \qquad (6)$$

Сведение (6) к задаче МП и восстановление решения

Решение задачи (6) существует, единственно и имеет вид $A_1 = A + H$, $b_1 = b + h_b$, $c_1 = c + h_c$, $h_b = \beta_1(b - Ax) + \beta_2 u_1$, $h_c = \gamma_1(c - A^\top u) + \gamma_2 x_1$,

$$H = \frac{(b_1 - Ax_1)\, x_1^\top}{x_1^\top x_1} + \frac{u\left[c_1^\top - u_1^\top A\right]_+}{u_1^\top u_1} - \alpha \frac{u_1 x_1^\top}{x_1^\top x_1 \cdot u_1^\top u_1},$$

где $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $u_1 \in \mathbb{R}^m$ – решение задачи $(1+\gamma_1)(c^\top x - u^\top Ax) + \gamma_2 x^\top x =$ $(1 + \beta_1)(u^\top b - u^\top Ax) + \beta_2 u^\top u = \alpha$, $x \geq 0$,

$$\|\beta_1(b - Ax) + \beta_2 u\| = \delta_b, \ \left\|\gamma_1(c - A^\top u) + \gamma_2 x\right\| = \delta_c,$$
$$\left[(1 + \gamma_1)(c - A^\top u) + \gamma_2 x\right]_- x = 0,$$

$$\frac{\|(1 + \beta_1)(b - Ax) + \beta_2 u\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\left\|\left[(1 + \gamma_1)(c - A^\top u) + \gamma_2 x\right]_+\right\|^2}{\|u\|^2} -$$

$$- \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2} = \mu^2, \|x\|^2 + \|u\|^2 \to \min, [\cdot]_+, [\cdot]_-$$ – срезки вектора.

Численный пример

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \delta_b := 1 \qquad \delta_c := 1 \qquad \mu := 1$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.097 & -6.698 \times 10^{-3} & 3.799 & 3 & -0.393 \\ 1.932 & 2.999 & 2.86 & 5 & -1.271 \\ 0.84 & 3.006 & 0.669 & 2 & 0.37 \\ 2.088 & 6.003 & 8.182 & 10 & 0.354 \end{pmatrix} \; b_1 = \begin{pmatrix} 2.445 \\ 1.311 \\ 1.736 \\ 9.596 \end{pmatrix} \; c_1 = \begin{pmatrix} 1.071 \\ 2.21 \\ 0.183 \\ 1.252 \\ 0.477 \end{pmatrix} \; x_1 = \begin{pmatrix} 0.469 \\ 0 \\ 0.972 \\ 0 \\ 1.869 \end{pmatrix} \; u_1 = \begin{pmatrix} -0.411 \\ -0.075 \\ 0.395 \\ 0.207 \end{pmatrix}$$

$$c_1^T \cdot x_1 = 1.572$$

$$u_1^T \cdot b_1 = 1.572$$

$$\mathrm{tr}\left[(A_1 - A)^T \cdot (A_1 - A)\right] = 1$$

$$(b_1 - b)^T \cdot (b_1 - b) = 1$$

$$(c_1 - c)^T \cdot (c_1 - c) = 1$$

$$b_1 - A_1 \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 2.178 \times 10^{-10} \\ 3.983 \times 10^{-11} \\ -2.091 \times 10^{-10} \\ -1.098 \times 10^{-10} \end{pmatrix} \qquad A_1^T \cdot u_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 1.03 \times 10^{-11} \\ 0 \\ 3.089 \times 10^{-10} \\ 1.941 \times 10^{-3} \\ 4.104 \times 10^{-11} \end{pmatrix}$$