XXIII международная научно-техническая конференция
«ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ»
14 – 18 сентября 2015 г., г. Севастополь

ОБ ОДНОЙ ФИЛЬТРОВОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ЧЕТВЁРТОЙ ЗАДАЧЕЙ ЗОЛОТАРЁВА

М. Гхашим
(Севастопольский университет)

В.Н. Малозёмов
(Санкт-Петербургский университет)

Обозначим через $\mathcal{H}_n^n$ семейство дробно-рациональных функций $H(u)$ порядка n,

$$H(u) = \frac{a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \ldots + b_n}.$$

Зафиксируем два параметра Δ и τ из интервала $(0, 1)$ и рассмотрим фильтровую задачу в следующей постановке:

$$\sup_{|u| \geqslant \frac{1}{\tau}} H(u) \to \inf, \tag{1}$$

где инфимум берётся по всем функциям $H \in \mathcal{H}_n^n$, удовлетворяющим ограничениям

$$|H(u) - 1| \leqslant \Delta \quad \text{при} \quad u \in [-1, 1];$$

$$H(u) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |u| \geqslant \frac{1}{\tau}.$$

Задача (1) при всех натуральных n имеет два решения

$$H_0(u) \qquad \text{и} \qquad H_1(u).$$

Свойства этих решений при чётном n и нечётном n существенно различаются.

Случай чётного n,

$$n = 2s$$

И здесь приходится различать два подслучая: когда s — чётное и когда s — нечётное.

На рис. 1 представлен график первой (непрерывной) дроби $H_0(u)$ при $n = 4$ $(s = 2)$.

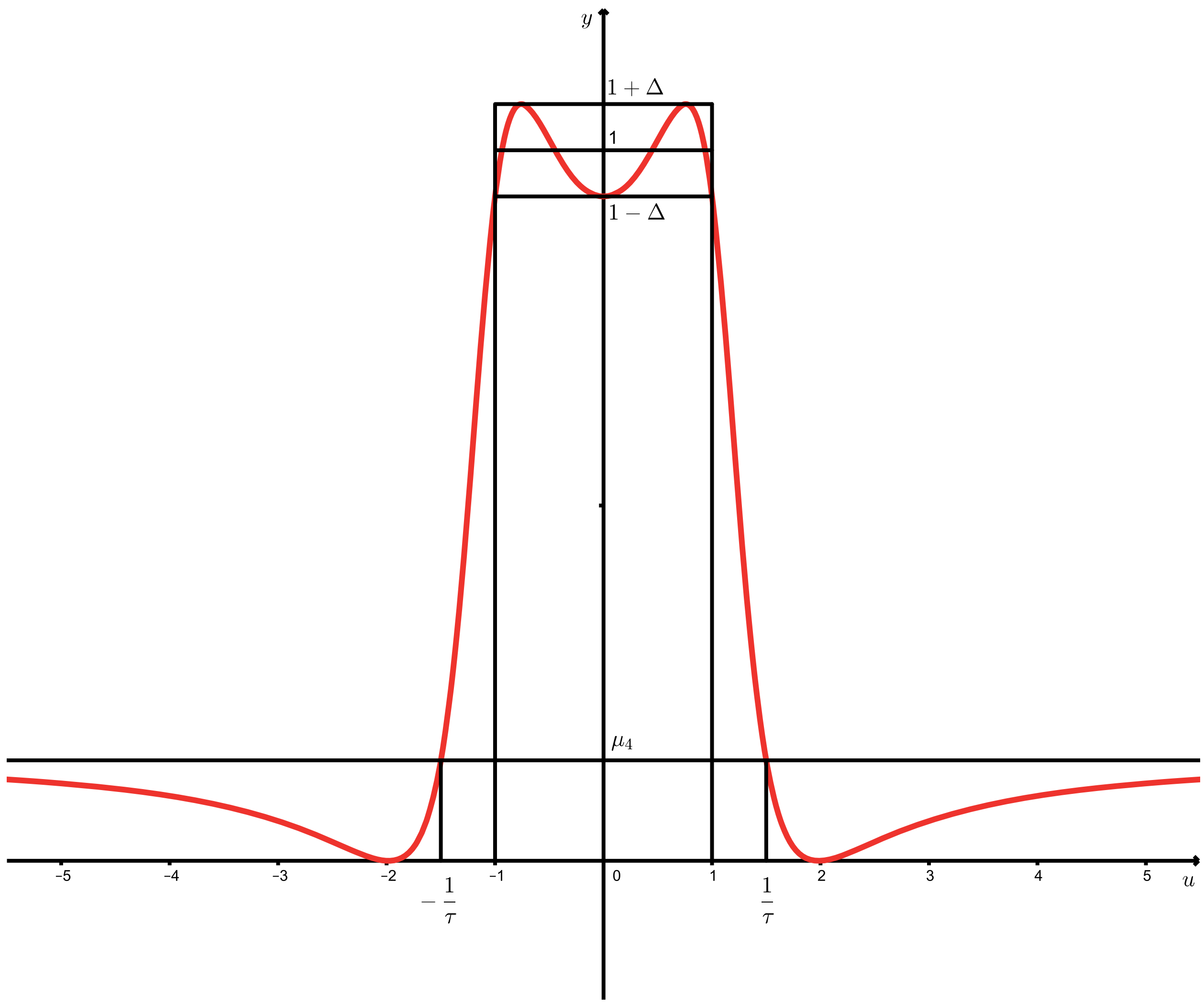

Рис. 1. График непрерывного фильтра при $n = 4$

На рис. 2 представлен график второй оптимальной дроби $H_1(u)$ при $n = 4$ $(s = 2)$.

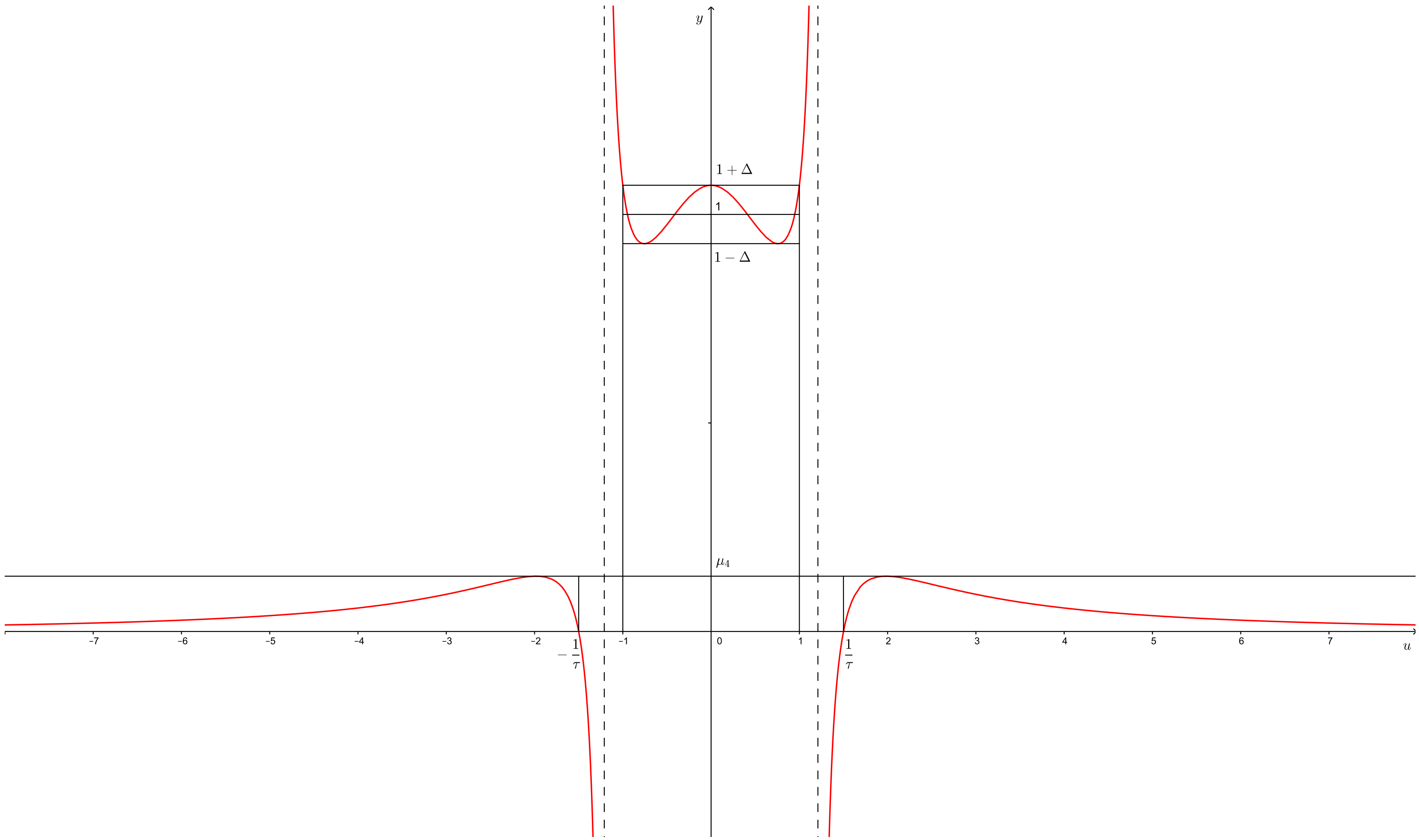

Рис. 2. График дроби $H_1(u)$ при $n = 4$

На рис. 3 представлен график первой (непрерывной) дроби $H_0(u)$ при $n = 6$ $(s = 3)$.

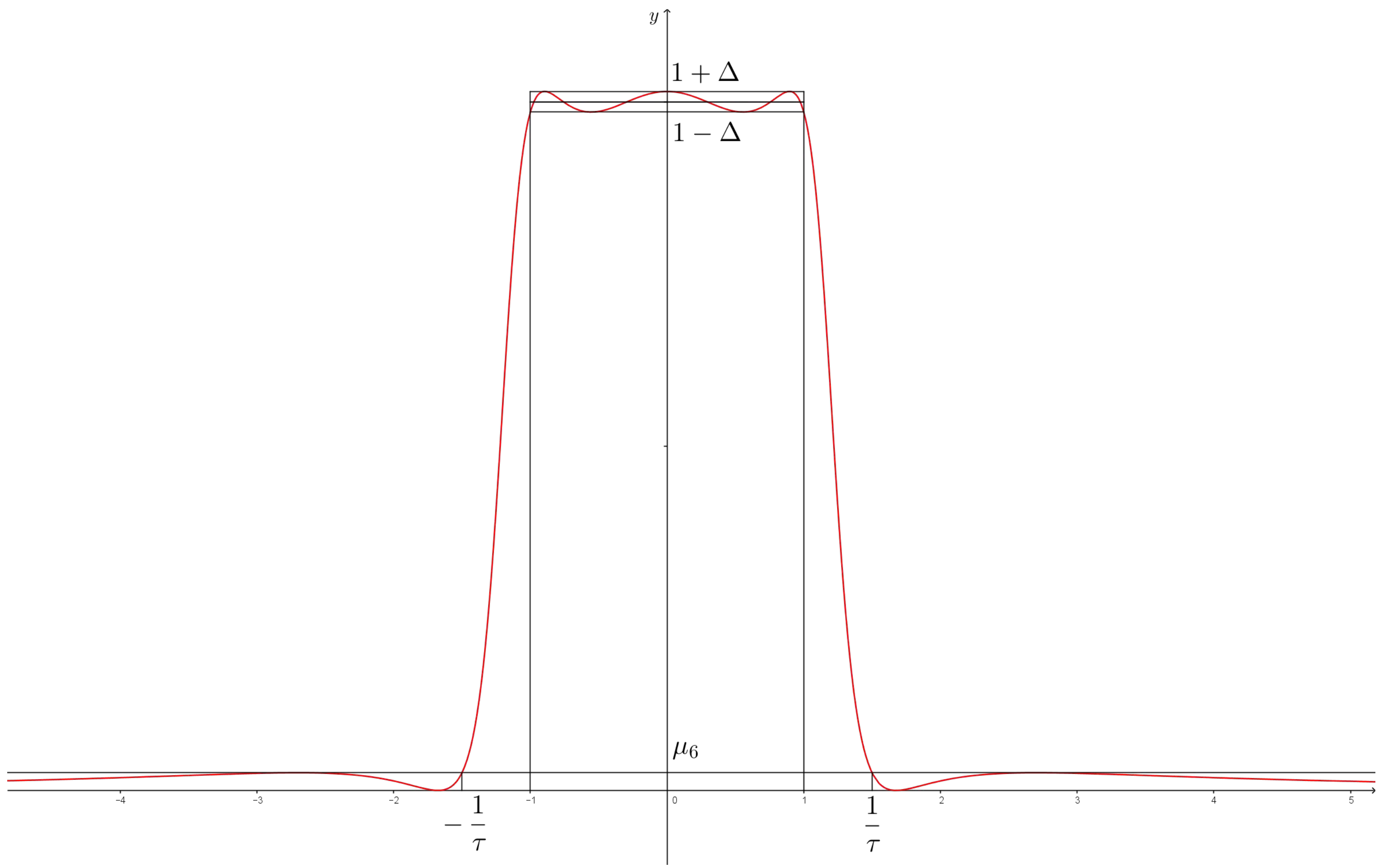

Рис. 3. График непрерывного фильтра при $n = 6$

Случай нечётного n,

$$n = 2s + 1$$

В этом случае решения $H_0(u)$ и $H_1(u)$ связаны соотношением

$$H_1(u) \equiv H_0(-u).$$

Обе дроби имеют по одному полюсу.

На рис. 4 представлен график оптимальной дроби $H_0(u)$ при $n = 3$ $(s = 1)$.

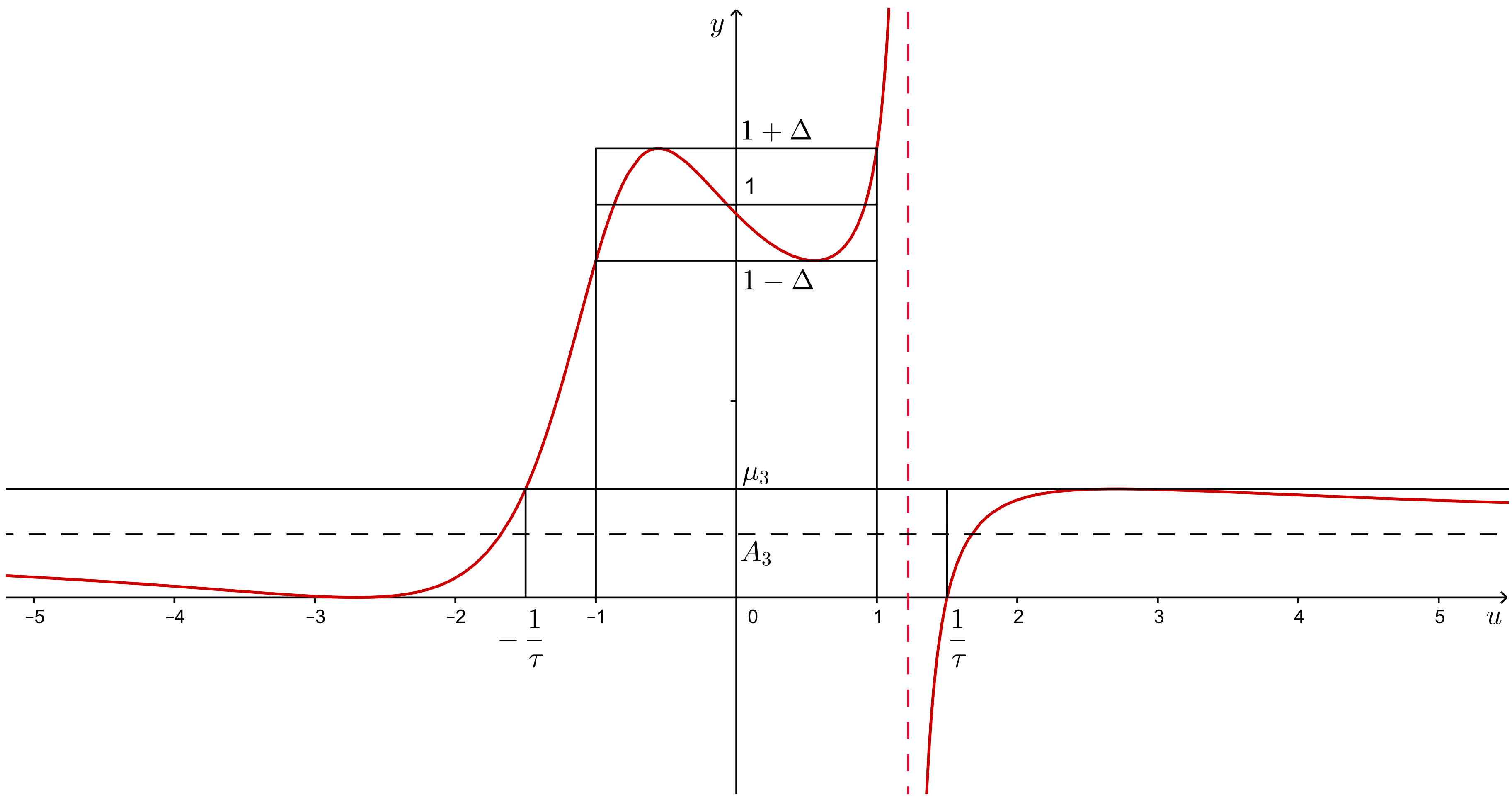

Рис. 4. График оптимальной дроби при $n = 3$

Во всех случаях оба решения задачи (1) характеризуются наличием полного $(2n+2)$-точечного альтернанса.

Приведём точные формулировки при нечётном n.

Теорема. Решение $H_0(u)$ задачи (1) при $n = 2s + 1$ характеризуется следующими свойствами:

1. Существуют $n + 1$ точек $-1 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = 1$, в которых

$$H_0(u_k) - 1 = (-1)^{k+1}\Delta, \quad k \in 0 : n.$$

2. Между этими точками $H_0(u)$ изменяется строго монотонно.

3. На промежутках $\left[\frac{1}{\tau}, +\infty\right)$ и $\left(-\infty, -\frac{1}{\tau}\right]$ существуют по $s+1$ точек

$$\frac{1}{\tau} = u_{n+1} < u_{n+2} < \ldots < u_{n+1+s},$$

$$u_{n+2+s} < u_{n+3+s} < \ldots < u_{2n+1} = -\frac{1}{\tau},$$

в которых

$$H_0(u_{n+1+k}) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^k)\mu_n, \quad k \in 0 : n.$$

Здесь μ_n — наименьшее значение супремума в задаче (1).

4. Между точками $u_{n+1}, \ldots, u_{2n+1}$, включая пару (u_{n+1+s}, u_{n+2+s}), функция $H_0(u)$ изменяется строго монотонно.

5. Существует предел

$$\lim_{x \to \pm\infty} H_0(u) = A_n,$$

причём $A_n \in (0, \mu_n)$.

6. На отрезке $\left[-\frac{1}{\tau}, -1\right]$ дробь $H_0(u)$ монотонно возрастает от значения μ_n до $1-\Delta$.

7. На интервале $\left(1, \frac{1}{\tau}\right)$ у дроби $H_0(u)$ имеется полюс u_∞, при этом на промежутках $\left[1, u_\infty\right)$ и $\left(u_\infty, \frac{1}{\tau}\right]$ дробь $H_0(\infty)$ монотонно возрастает от $1+\Delta$ до $+\infty$ и от $-\infty$ до 0 соответственно.

Простейшие частные случаи. При $n = 1$ функция $H_0(u)$ допускает представление

$$H_0(u) = \frac{(1-\Delta^2)(\tau u - 1)}{(\Delta + \tau)u - \Delta\tau - 1}.$$

При $n = 2$

$$H_0(u) = \frac{1-\Delta^2}{2\Delta u^2 + 1 - \Delta},$$

$$H_1(u) = \frac{\tau^2(1-\Delta^2)u^2 - 1 + \Delta^2}{[2\Delta + \tau^2(1-\Delta)]u^2 - 1 - \Delta}.$$

Доказательство сформулированной теоремы опирается на альтернансные свойства решения Четвёртой задачи Золотарёва и на искусство дробно-линейных преобразований.

$\Big($ Напомним постановку Четвёртой задачи Золотарёва

$$\max_{u\in\mathcal{D}} |H(u) - \mathsf{sign}(u)| \to \inf_{H\in\mathcal{H}_n^n},$$

где $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{\tau}, -1\right] \cup \left[1, \frac{1}{\tau}\right]$, $\tau \in (0, 1)$ — параметр. $\Big)$

Семинар по конструктивному негладкому анализу

и недифференцируемой оптимизации

http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/