Санкт-Петербургский государственный университет

Малозёмов Василий Николаевич

Тамасян Григорий Шаликович

ЭТЮД НА ТЕМУ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРОВОЙ ЗАДАЧИ

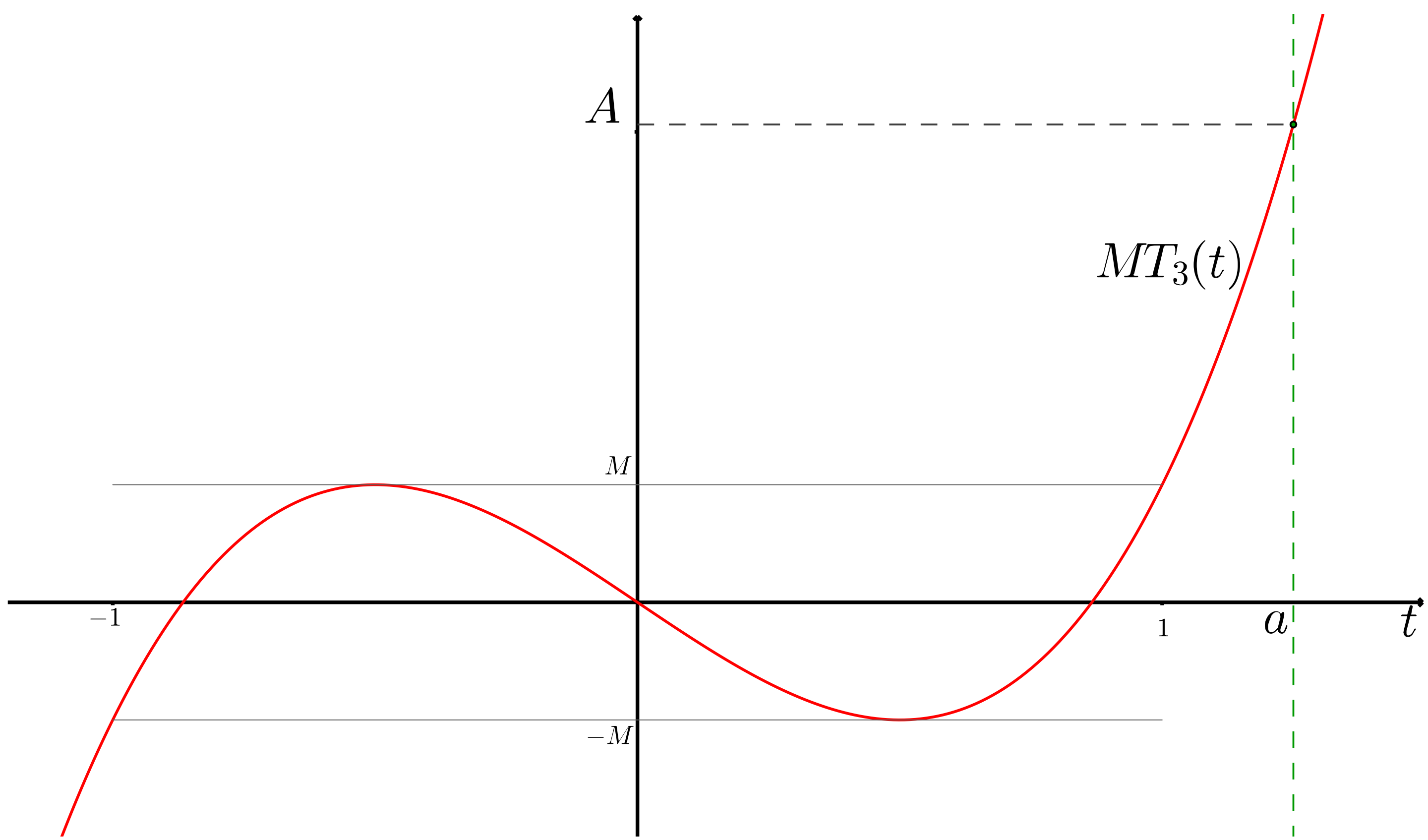
XXIII международная научно-техническая конференция
«ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ»

г. Севастополь
14 – 18 сентября 2015 г.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полином Чебышёва $T_n(t)$, который на отрезке $[-1, 1]$ допускает представление $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$, обладает многими замечательными свойствами, в том числе, таким:

среди всех алгебраических полиномов степени n, не превосходящих на отрезке $[-1, 1]$ по модулю величины $M > 0$, наибольшее значение в точке $t = a$ при $a > 1$ принимает полином $MT_n(t)$.



Указанное свойство полинома Чебышёва используется при построении чебышёвских фильтров. Мы рассмотрим более сложную фильтровую задачу.

Для алгебраических полиномов степени не выше n будем использовать обозначение

$$P_n(x,t) = x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + \ldots + x_n.$$

Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\begin{gathered} \textbf{\textit{максимизировать величину}}\ \ P_n(x,b)\ \ \textbf{\textit{при ограничениях}} \\ -M \leqslant P_n(x,t) \leqslant M,\ \ t \in [-1,1]; \\ P_n(x,a) = A. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $b < -1$, $M > 0$, $a > 1$ и A — вещественные параметры.

Вектор коэффициентов $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, полинома $P_n(x,t)$, удовлетворяющего ограничениям задачи (1), назовём **планом**.

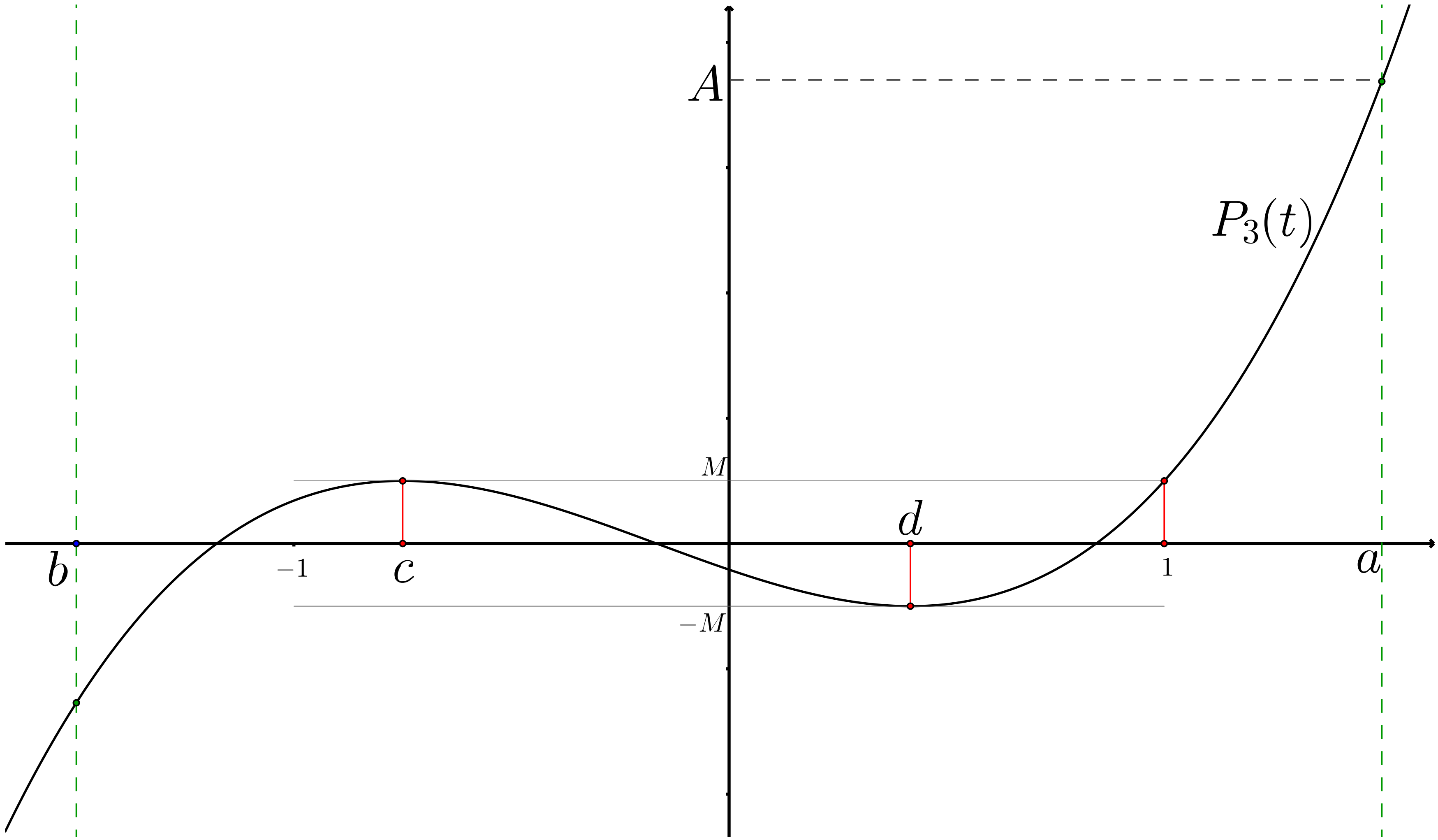


Рис. 2. График экстремального полинома при $n = 3$
и некоторых значениях параметров M, a и A.

Положим $A_n = MT_n(a)$.

ТЕОРЕМА 1. *Множество планов задачи* (1) *непусто тогда и только тогда, когда* $|A| \leqslant A_n$.

ТЕОРЕМА 2. *При* $n \geqslant 2$ *и* $|A| \leqslant A_n$ *решение задачи* (1) ***существует*** *и* ***единственно***. *Для того чтобы план* x^* *был* ***оптимальным***, *необходимо и достаточно, чтобы полином* $P_n(x^*, t)$ *обладал* n***-точечным альтернансом***, *точнее, чтобы нашлись* n *точек* $-1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant 1$, *в которых*

$$P_n(x^*, t_k) = (-1)^{k-1} M, \quad k \in 1 : n. \tag{2}$$

Обратим внимание на то, что альтернанс формулируется за счет активных ограничений и что в крайней слева точке альтернанса t_1 значение $P_n(x^*, t_1)$ положительно.

Отметим также, что полином $P_n(x^*, t)$, экстремальный при некотором значении параметра b, остаётся экстремальным и при любом другом $b < -1$.

Альтернансные условия (2), позволяют найти решение задачи (1). Мы покажем, как это делается в частном случае, при $n = 3$.

Явный вид экстремального полинома $P_3(x^*, t)$ находится в два этапа:

Этап I. С помощью **теоремы 2** построим однопараметрическое семейство полиномов третьей степени, обладающих на отрезке $[-1, 1]$ трёхточечным альтернансом,

$$P_3(x^*, t_1) = M, \quad P_3(x^*, t_2) = -M, \quad P_3(x^*, t_3) = M.$$

Этап II. Из этого семейства выделим полином, удовлетворяющий условию $P_3(x, a) = A$.

Полученный полином и будет **решением** задачи (1).

ЭТАП I

Рассмотрим семейство полиномов третьей степени вида

$$P_3(t) = x_0 t^3 - \frac{3}{2} x_0 (c+d) t^2 + 3 x_0 c d t + h, \quad c \neq d.$$

В этом случае

$$P_3'(t) = 3x_0 (t-c)(t-d),$$

$$P_3''(c) = 3x_0(c-d), \quad P_3''(d) = 3x_0(d-c).$$

В дальнейшем будем считать, что d — точка **строго локального минимума**, так что выполнено одно из двух условий

$$c < d \quad \text{и} \quad x_0 > 0 \qquad \text{или} \qquad c > d \quad \text{и} \quad x_0 < 0.$$

В семействе

$$P_3(t) = x_0 t^3 - \frac{3}{2} x_0 (c+d) t^2 + 3 x_0 c d t + h, \qquad c \neq d$$

выделим **однопараметрическое** семейство полиномов, обладающих на отрезке $[-1,1]$ трёхточечным альтернансом.

В качестве **параметра** возьмём d.

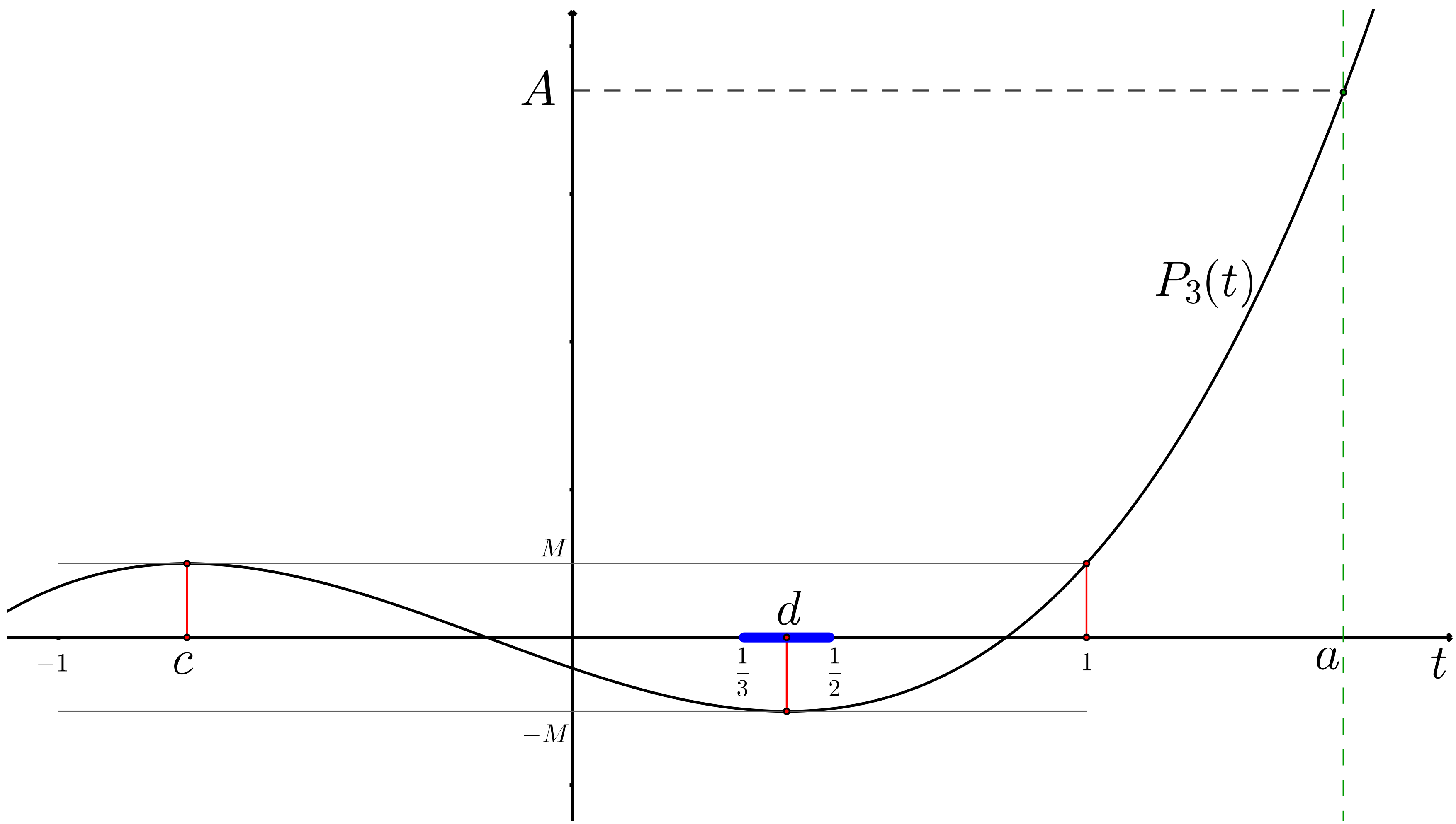
Рассмотрим четыре случая взаимного расположения точек c и d относительно отрезка $[-1,1]$:

$$1)\ -1 \leqslant c < d < 1, \qquad 2)\ c < -1 < d < 1,$$
$$3)\ -1 < d < 1 < c, \qquad 4)\ -1 < d < c \leqslant 1.$$

ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ

$$-1 \leqslant c < d < 1$$

Точками альтернанса будут $t_1 = c$, $t_2 = d$, $t_3 = 1$.



Альтернансные условия принимают вид

$$\begin{aligned} P_3(c) = M, \quad P_3(d) &= -M, \quad P_3(1) = M, \\ P_3(-1) &\geqslant -M. \end{aligned}$$

В подробной записи:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x_0c^3 + \tfrac{3}{2}x_0c^2d + h &= M, \\ -\tfrac{1}{2}x_0d^3 + \tfrac{3}{2}x_0cd^2 + h &= -M, \\ x_0 - \tfrac{3}{2}x_0(c+d) + 3x_0cd + h &= M, \\ -x_0 - \tfrac{3}{2}x_0(c+d) - 3x_0cd + h &\geqslant -M. \end{aligned}$$

Данная система имеет единственное решение: $\frac{1}{3} \leqslant d \leqslant \frac{1}{2}$,

$$c = 3d - 2, \qquad x_0 = \frac{M}{2(1-d)^3}, \qquad h = \frac{M}{2(1-d)^3}(1-2d)(d^2+2d-2).$$

Получаем при $d \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

$$P_3(x(d), t) = \frac{M}{2(1-d)^3}(t - 2d + 1)\left(t^2 + 2(1-2d)t + d^2 + 2d - 2\right).$$

В частности,

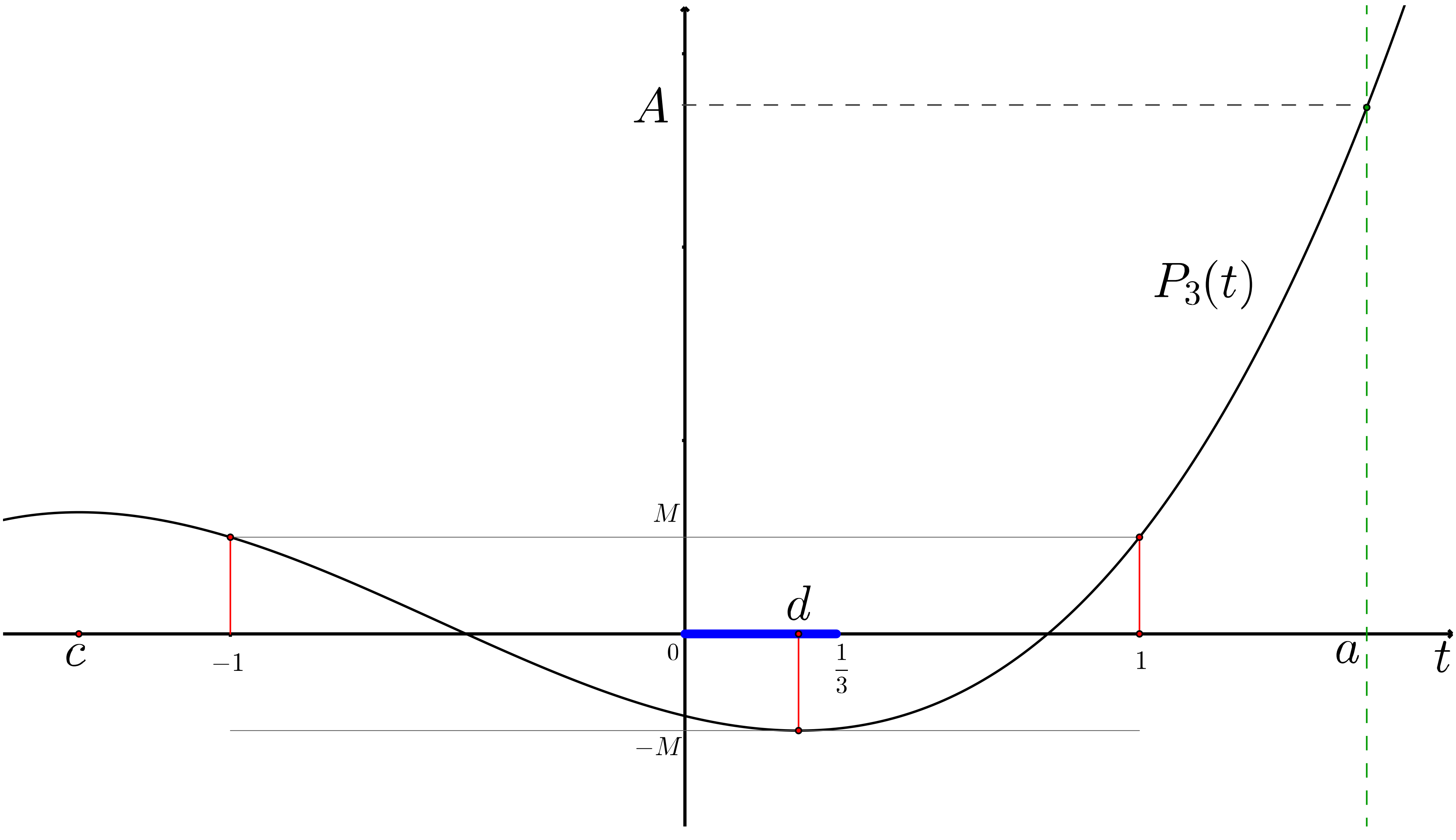
$$P_3(x(\tfrac{1}{2}), t) = MT_3(t),$$

$$P_3(x(\tfrac{1}{3}), t) = \tfrac{M}{16}(3t+1)(9t^2+6t-11).$$

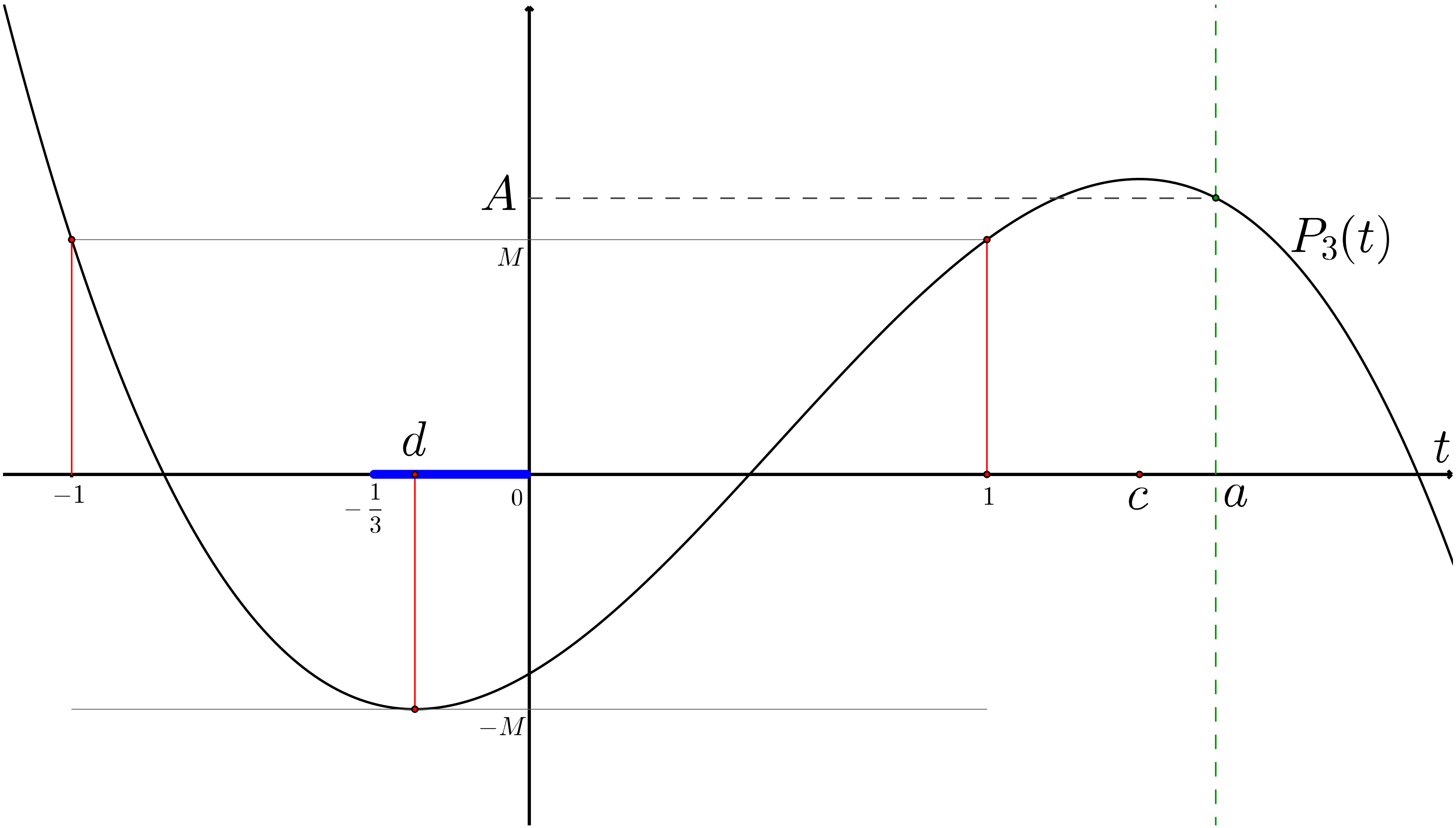
Обозначим $A(d) = P_3(x(d), a)$ и пусть $\widehat{A}_3 = A(\frac{1}{3})$.

Лемма 1. *Функция $A(d)$ строго возрастает на $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ от значения $\widehat{A}_3$ до A_3.*

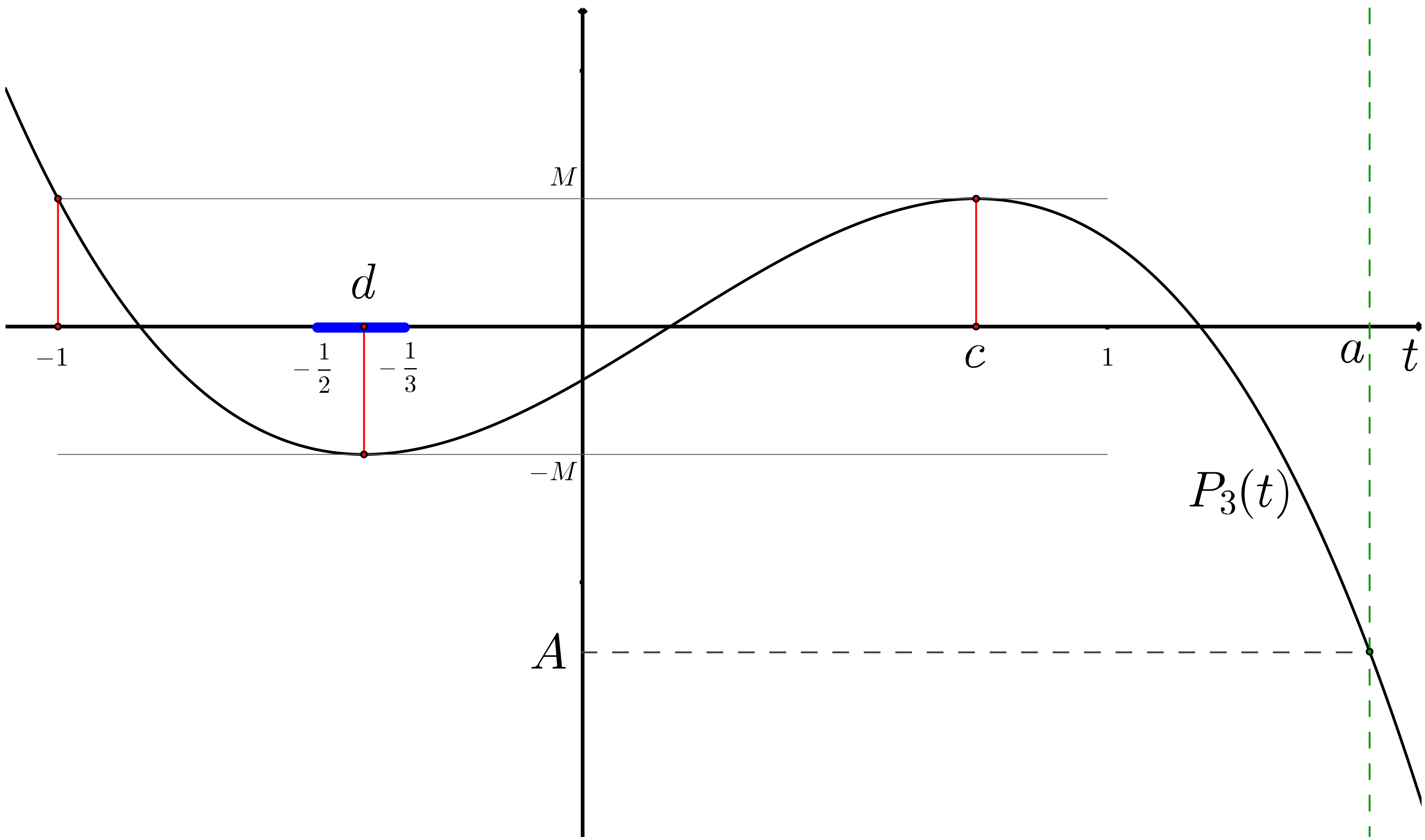
Во втором случае (когда $c < -1 < d < 1$), точками альтернанса будут $t_1 = -1$, $t_2 = d$, $t_3 = 1$.



Третий случай аналогичен второму. Так как $-1 < d < 1 < c$, то точками альтернанса будут точки $t_1 = -1$, $t_2 = d$, $t_3 = 1$.



В четвёртом случае (когда $-1 < d < c \leqslant 1$), точками альтернанса будут $t_1 = -1$, $t_2 = d$, $t_3 = c$.

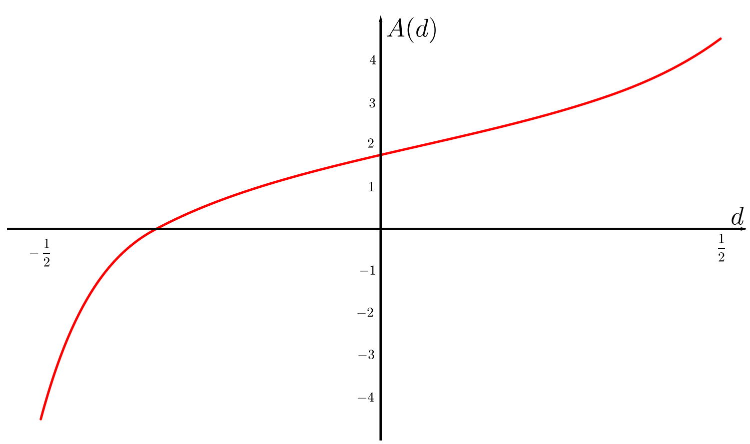


ТЕОРЕМА 3. *Семейство полиномов $P_3(x(d),t)$, обладающих на отрезке $[-1,1]$ трёхточечным альтернансом, допускает представление*

$$P_3(x(d),t) =$$
$$= \begin{cases} \frac{M}{2(1-d)^3}(t-2d+1)\left(t^2+2(1-2d)t+d^2+2d-2\right) & \text{при } d \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ \frac{M}{(d^2-1)^2}\left(4dt^3+2(1-3d^2)t^2-4dt+d^4+4d^2-1\right) & \text{при } |d| < \frac{1}{3}, \\ -\frac{M}{2(d+1)^3}(t-2d-1)\left(t^2-2(1+2d)t+d^2-2d-2\right) & \text{при } d \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]. \end{cases} \tag{3}$$

При этом функция $A(d) = P_3(x(d),a)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ от значения $-A_3$ до A_3.

На рис. представлен график функции $A(d)$ при $a = \frac{3}{2}$ и $M = \frac{1}{2}$.



ЭТАП II

Вернёмся к исходной задаче (1). По теореме 2 её решением будет полином $P_3(x(d^*), t)$ из семейства (3), который удовлетворяет условию $P_3(x(d^*), a) = A$ или, что равносильно, $A(d^*) = A$. При этом величина $B(d^*) = P_3(x(d^*), b)$ является максимальным значением целевой функции.

Возьмём $A \in [-A_3, A_3]$ и рассмотрим уравнение

$$A(d) = A.$$

В силу отмеченных в теореме 3 свойств функции $A(d)$ это уравнение имеет единственное решение $d^* \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Полином $P_3(x(d^*), t)$ и будет решением экстремальной задачи (1).

Для функции $B(d) = P_3(x(d), b)$ имеем

$$B(d) =$$
$$= \begin{cases} \frac{M}{2(1-d)^3}(b-2d+1)\left(b^2+2(1-2d)b+d^2+2d-2\right) & \text{при } \ d \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ \frac{M}{(d^2-1)^2}\left(4db^3+2(1-3d^2)b^2-4db+d^4+4d^2-1\right) & \text{при } \ |d| < \frac{1}{3}, \\ -\frac{M}{2(d+1)^3}(b-2d-1)\left(b^2-2(1+2d)b+d^2-2d-2\right) & \text{при } \ d \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]. \end{cases}$$

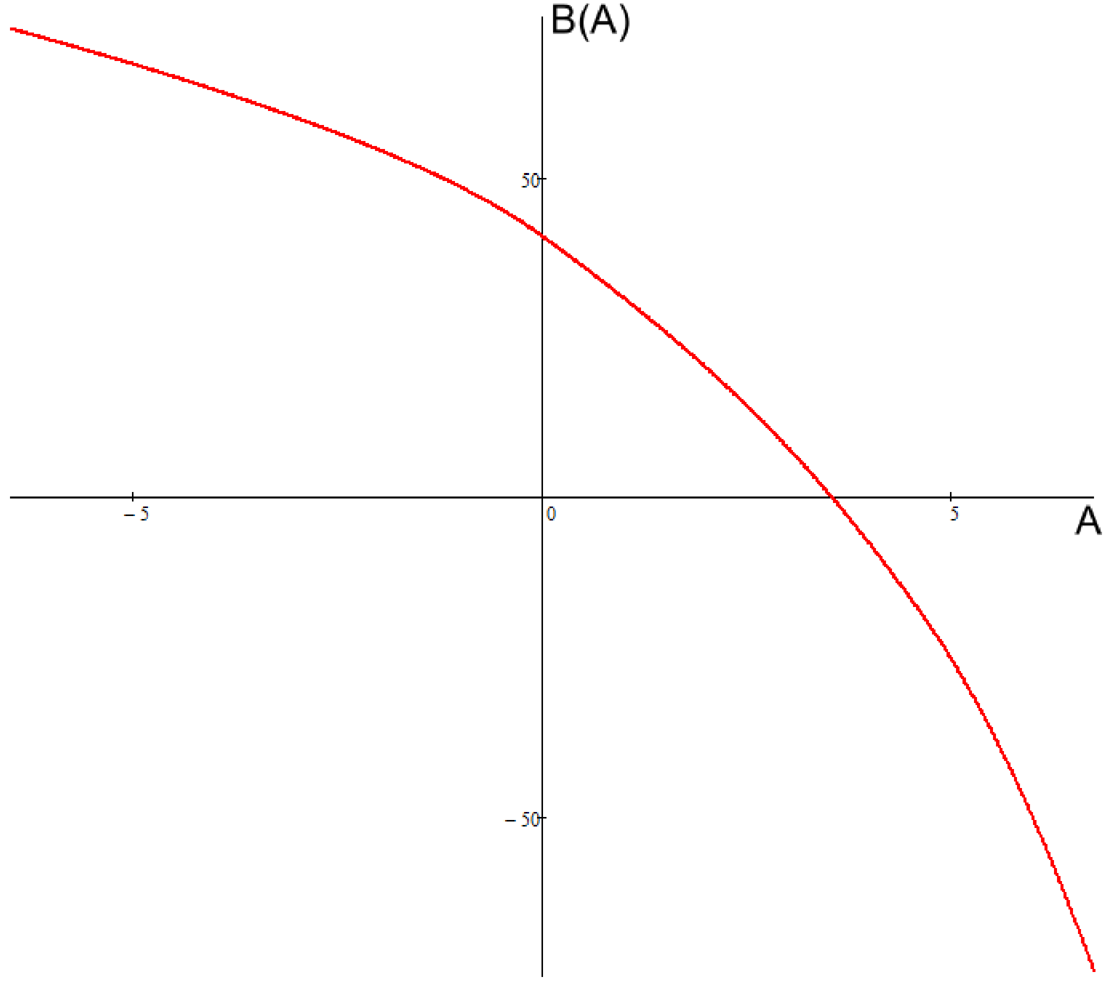
Перейдём от внутреннего параметра d к параметру A.

Введенная ранее функция $A(d) = P_3(x(d), a)$ имеет обратную функцию $d = d(A)$, которая непрерывно дифференцируема и её производная $d'(A)$ положительна при всех $A \in [-A_3, A_3]$. Запишем целевую функцию как функцию параметра A:

$$B = B(d(A)).$$

Эта функция непрерывно дифференцируема и строго убывает на отрезке $[-A_3, A_3]$.

На рис. представлен график функции $B(d(A))$ при $a = \frac{3}{2}$, $M = \frac{1}{2}$ и $b = -3$.



Ниже представлен этюд, который в динамическом режиме показывает, как выглядит решение данной задачи при $n = 3$, $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $M = \frac{1}{2}$ и различных A (воспользуйтесь кнопками «СТАРТ», «ПРОДОЛЖИТЬ» и «ПОВТОРИТЬ»).

Полиномиальная фильтровая задача ($n = 3$).