Одна задача оптимального управления системы массового обслуживания

В.В. Карелин, Л.Н. Полякова, В.М. Буре
Санкт-Петербургский гос. университет, Санкт-Петербург
e-mail: vlkarelin@mail.ru, vlb310154@gmail.com, lnpol07@mail.ru

Рассматривается детерминированная система массового обслуживания, динамика которой может быть описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Система массового обслуживания содержит одно обслуживающее устройство с двумя очередями 1 и 2. Скорости поступления заявок зависят от номера очереди и времени. Скорости обработки заявок обслуживающим устройством могут выбираться внутри заданных ограничений и рассматриваются как управления. Предполагается, что в каждый момент времени обслуживающее устройство может обрабатывать только одну заявку. То есть, если обрабатывается первая очередь, то скорость обработки второй очереди равна нулю, и наоборот. В качестве управлений (скоростей обработки заявок в очередях 1 и 2) рассматриваются кусочно-постоянные управления. Из сказанного следует, что произведение управлений в каждый момент времени равно нулю. Задачей управления является минимизация суммарной длины очередей в конечный момент времени T. Пусть $a_i(t), (i = 1, 2)-$ скорости поступления заявок в очередях 1 и 2, $d_i, (i = 1, 2)-$ скорости обработки заявок из очередей 1 и 2 соответственно. Скорости изменения поступления заявок в очередях вычисляются по формулам:

$$\dot{q}_1(t) = a_1 - d_1, \quad \dot{q}_2(t) = a_2 - d_2.$$

Положим $u_1 = d_1$ и $u_2 = d_2$. Приведем систему к нормальному виду:

$$x_1 = q_1,\ x_2 = a_1,\ x_3 = q_2,\ x_4 = a_2.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_2 - u_1, \\ \dot{x}_2(t) = & \theta_1(t), \\ \dot{x}_3(t) = & x_4 - u_2, \\ \dot{x}_4(t) = & \theta_2(t), \end{cases}$$

где $\theta_1(t), \theta_2(t)$ - неизвестные ускорения изменения поступления заявок (*при этом ускорения могут менять знак*), u_1, u_2 - управление или скорость обработки заявок. Рассмотрим более общую задачу

$$\dot{x} = f(x, u, t). \tag{1}$$

Обозначим $z = \dot{x}$ и введем множество

$$\Omega_u := \{z \in P_n[0,T], x(t) \in P_n[0,T], \varphi_u(z) = 0\},$$

здесь

$$\varphi_u(z) := \left[\int\limits_0^T \left(z(t) - f\left(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\tau, u(t), t\right)\right)^2 dt\right]^{1/2}.$$

Заметим, что

$$\varphi_u(z) \geq 0 \ \ \forall z \in P_n[0,T], \ \forall u \in U.$$

Если $z \in \Omega_u$, то функция

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\,\tau$$

удовлетворяет (1). Таким образом, задача разыскания решения системы (1) для некоторого фиксированного $u \in U$ эквивалентна задаче нахождения такого $z \in P_n[0,T]$, что $\varphi_u(z) = 0$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Если $\varphi_u(z) > 0$ (т.е. $z \notin \Omega_u$), то функция φ_u дифференцируема по Гато в точке z.*

Теорема 2. *Если $\varphi_u(z) = 0$, то функция φ дифференцируема по направлениям в точке z; она даже субдифференцируема.*

Теорема 3. *Если функция f_0 липшицева по x и u, то найдется такое $\lambda^* \geq 0$, что для любого $\lambda \geq \lambda^*$ множество точек минимума функционала $J(u)$ на множестве U совпадает с множеством точек минимума функции*

$$F(z,u) = \int\limits_0^T f_0\left(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\tau, u(t), t\right) dt +$$

$$\lambda \left\{\int\limits_0^T \left[z(t) - f\left(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\tau, u(t), t\right)\right]^2 dt\right\}^{1/2}$$

на всем пространстве $P_n[0,T] \times \mathbb{R}^m$.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта СПбГУ. 9.38.205.2014