Санкт-Петербургский государственный университет

МАЛОЗЁМОВ Василий Николаевич

ТАМАСЯН Григорий Шаликович

ОБ ОДНОЙ ФИЛЬТРОВОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ЧЕТВЁРТОЙ ЗАДАЧЕЙ ЗОЛОТАРЁВА

VIII Московская международная конференция по «Исследованию операций»

г. Москва

17–22 октября 2016 г.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $\mathcal{H}_n^n$ семейство дробно-рациональных функций $H(u)$ вида

$$H(x,u) = \frac{x_0 u^n + x_1 u^{n-1} + \ldots + x_n}{u^n + x_{n+1} u^{n-1} + \ldots + x_{2n}}.$$

При фиксированном векторе коэффициентов $x = (x_0, \ldots, x_{2n})$ функция $H(x,u)$ определена на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Зафиксируем два параметра Δ и τ из интервала $(0,1)$ и рассмотрим фильтровую задачу в следующей постановке:

$$\sup_{|u| \geqslant \frac{1}{\tau}} H(x,u) \to \inf, \tag{1}$$

где инфимум берётся по всем функциям $H \in \mathcal{H}_n^n$, удовлетворяющим ограничениям

$$|H(x,u) - 1| \leqslant \Delta \quad \text{при} \quad u \in [-1,1];$$

$$H(x,u) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |u| \geqslant \frac{1}{\tau}.$$

Задача (1) при всех натуральных n имеет **два решения**

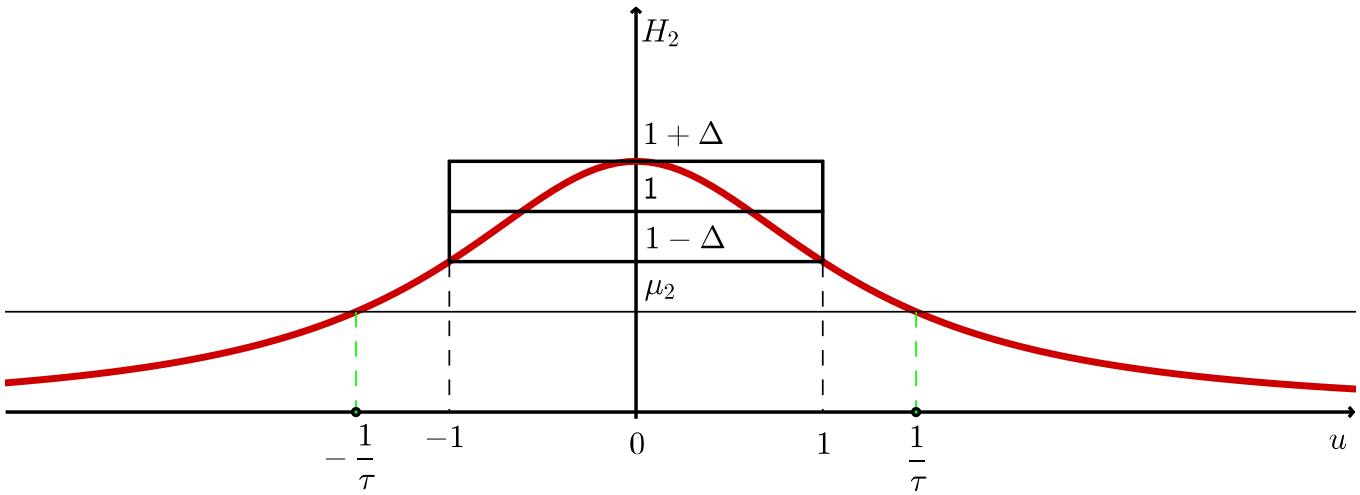
$$H_n(u) \qquad \text{и} \qquad \widehat{H}_n(u),$$

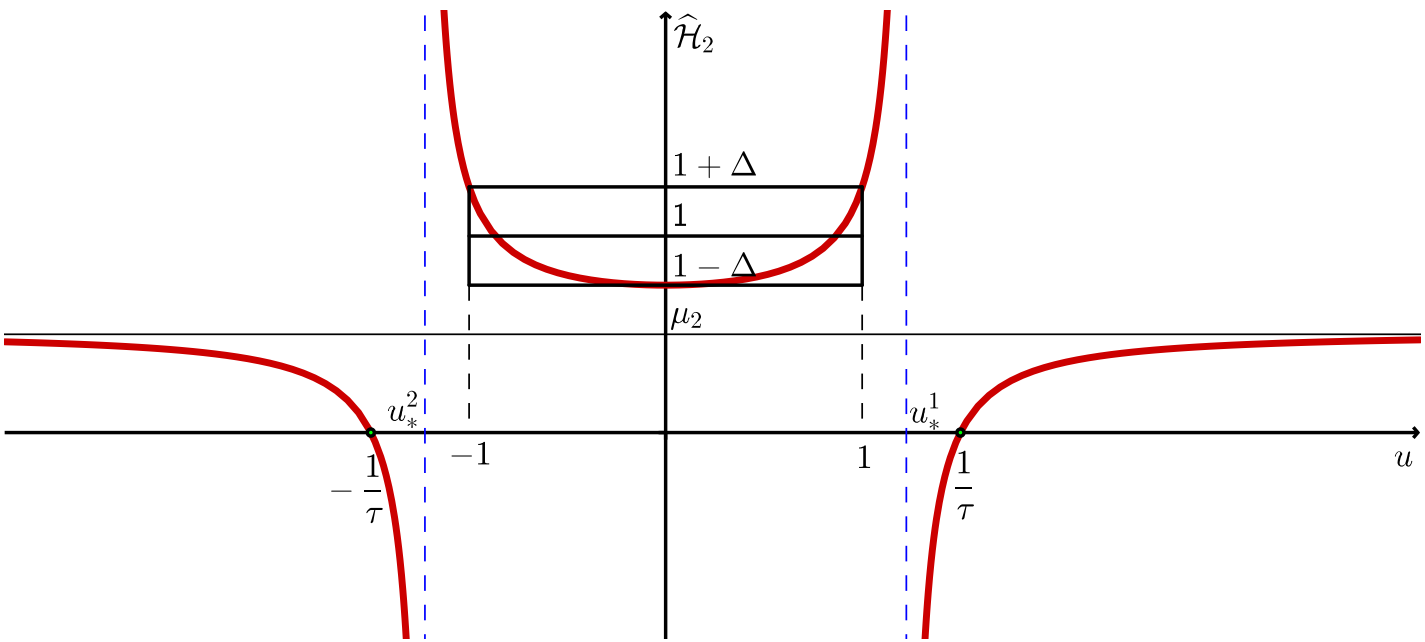
каждое из которых характеризуется наличием **полного** $(2n+2)$-**точечного альтернанса**.

Этой информацией достаточно, чтобы найти оба решения.

Свойства этих решений при чётном n и нечётном n существенно различаются.

СЛУЧАЙ $n = 2$


H_2
$1+\Delta$
1
$1-\Delta$
μ_2
$-\frac{1}{\tau}$
-1
0
1
$\frac{1}{\tau}$
u


$\widehat{\mathcal{H}}_2$
$1+\Delta$
1
$1-\Delta$
μ_2
u_*^2
u_*^1
$-\frac{1}{\tau}$
-1
1
$\frac{1}{\tau}$
u

СЛУЧАЙ $n = 3$

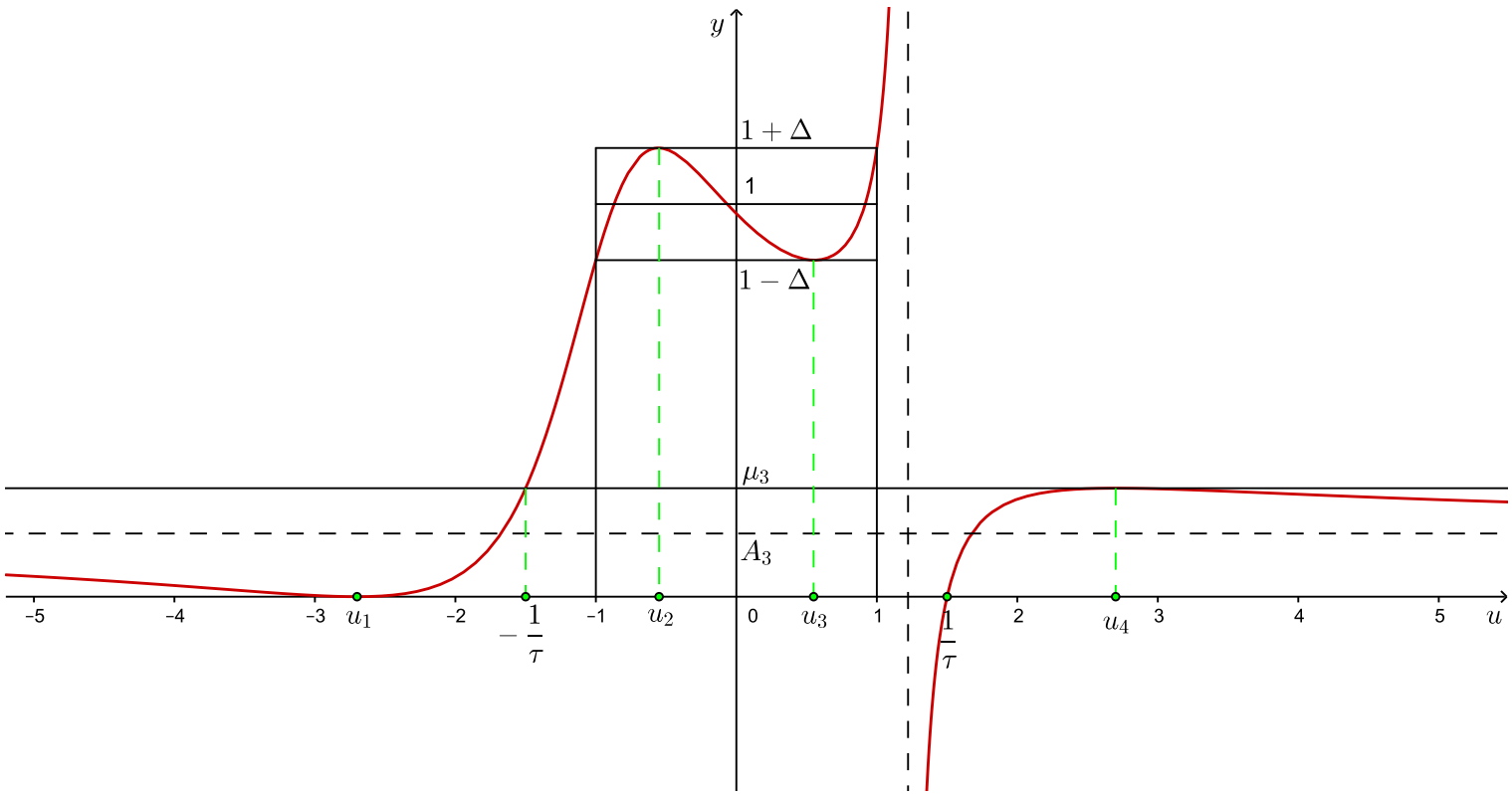


График дроби из семейства $\mathcal{H}_3^3$, обладающей полным альтернансом

СЛУЧАЙ $n = 3$

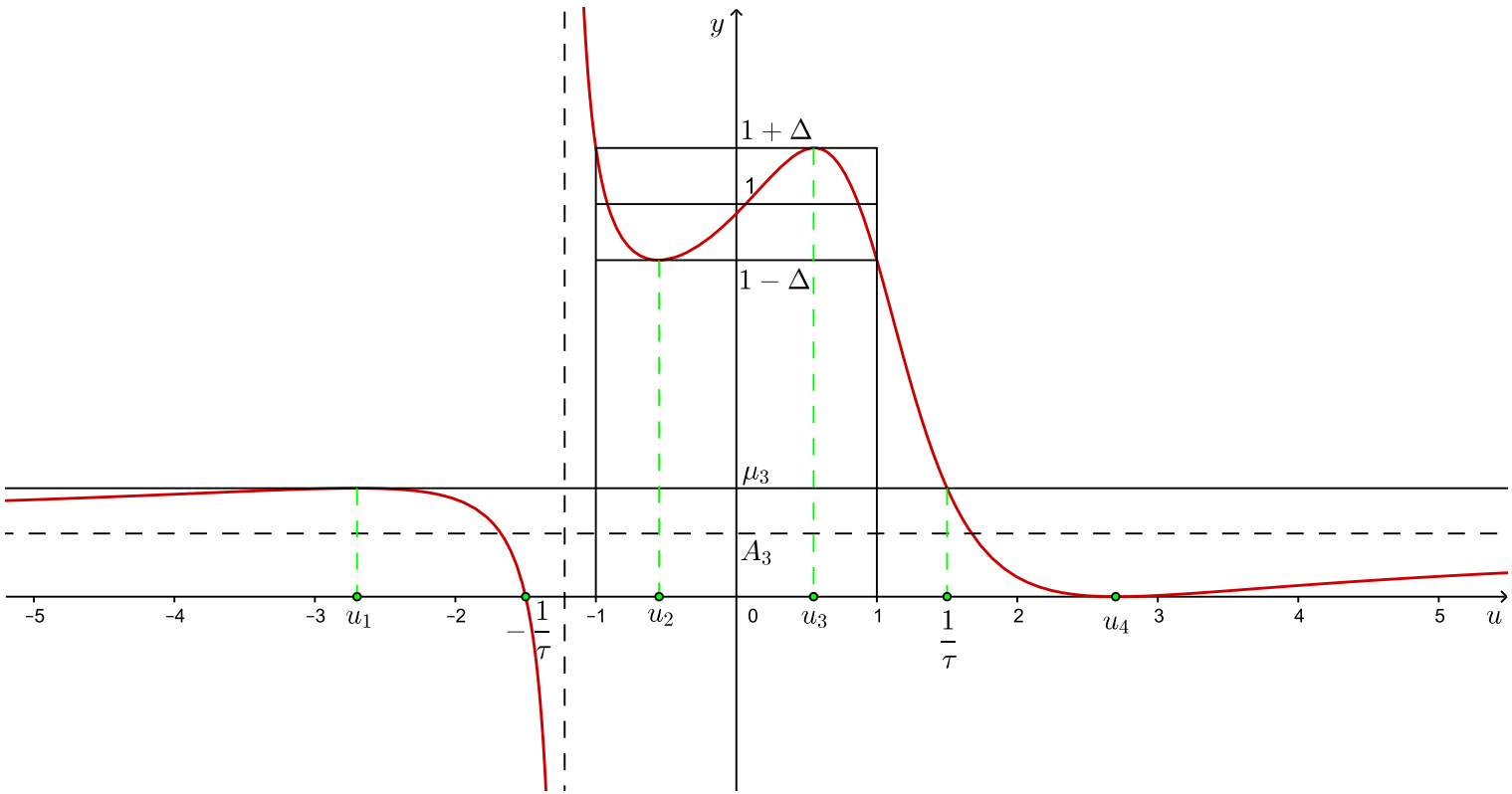


График второй дроби из семейства $\mathcal{H}_3^3$, обладающей полным альтернансом

Обозначим

$$\mu_n = \inf \varphi(x).$$

Полный альтернанс состоит из $2n+2$ точек

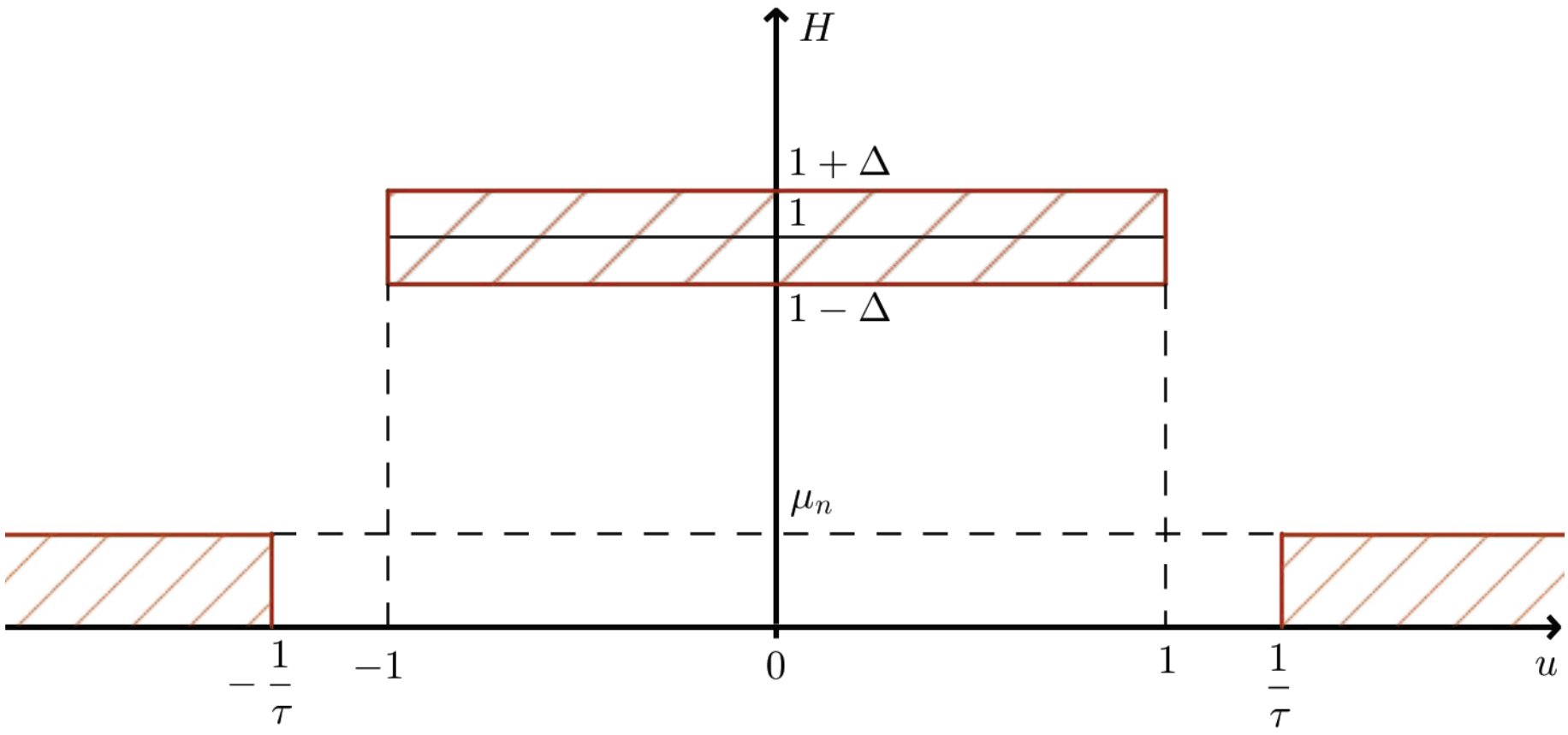
$$u_1 < u_2 < \ldots < u_{2n+2},$$

расположенных на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Каждая точка альтернанса u_k принадлежит одному из трёх множеств:

- $|u_k| \geqslant \frac{1}{\tau}$ и $H(x, u_k) = \mu_n$;
- $u_k \in [-1, 1]$ и $|H(x, u_k) - 1| = \Delta$;
- $|u_k| \geqslant \frac{1}{\tau}$ и $H(x, u_k) = 0$.

На рисунке выделено множество, содержащее контролируемую часть графиков двух оптимальных дробей



ИНФОРМАЦИЯ О РАСПОЛОЖЕНИИ ТОЧЕК АЛЬТЕРНАНСА

(a) при фиксированном x обе оптимальные дроби имеют одинаковые точки альтернанса;

(b) точки альтернанса расположены на $\overline{\mathbb{R}}$ симметрично относительно начала координат;

(c) отрезок $[-1, 1]$ содержит ровно $n+1$ точек альтернанса, включая концы отрезка;

(d) остальные $n+1$ точек альтернанса по модулю не меньше $\frac{1}{\tau}$, причём граничные точки $\frac{1}{\tau}$ и $-\frac{1}{\tau}$ являются точками альтернанса.

Свойство (b) позволяет искать только неотрицательные точки альтернанса. Согласно свойствам (b) и (d) при чётном n точками альтернанса будут $u = 0$ и $u = \infty$.

Случай чётного n,

$$n = 2s$$

И здесь приходится различать два подслучая: когда s — чётное и когда s — нечётное.

СЛУЧАЙ $n = 4$

$$H(x,u) = \frac{x_0 u^4 + x_2 u^2 + x_4}{u^4 + x_6 u^2 + \frac{x_4}{1-\Delta}}.$$

Известно:

- $u = \infty$ — точка альтернанса, поэтому $x_0 = \mu_4$.
- $u = 0$ — точка альтернанса, поэтому $x_8 = \frac{x_4}{1-\Delta}$.
- Известны ещё 4 точки альтернанса $u_2 = -\frac{1}{\tau}$, $u_3 = -1$, $u_7 = 1$, $u_8 = \frac{1}{\tau}$.

Неизвестные:

$$x = (x_2, x_4, x_6),$$

$$0 < u_6 < 1, \quad \frac{1}{\tau} < u_9,$$

$$\mu_4 \in (0, 1 - \Delta).$$

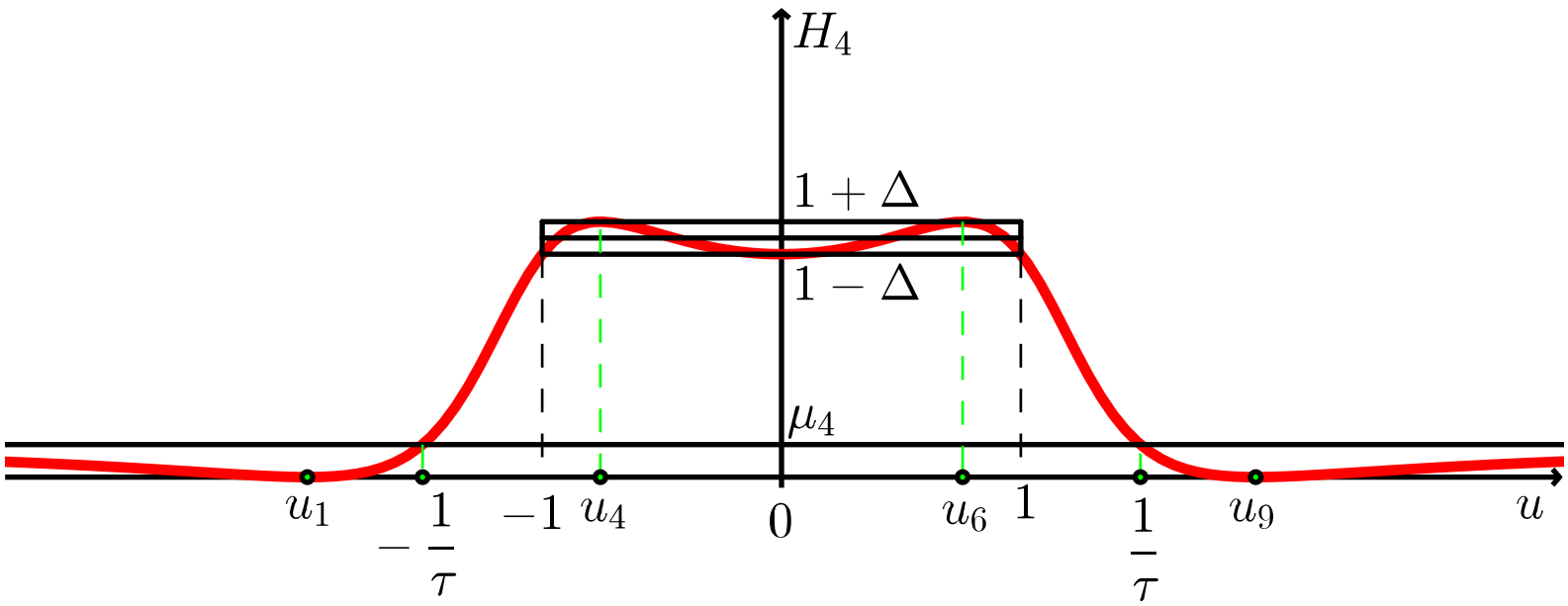


График дроби из семейства $\mathcal{H}_4^4$, обладающей полным альтернансом

Альтернансные условия (6 неизвестных):

$$\boxed{H(x,1) = 1-\Delta}, \qquad H(x,\tfrac{1}{\tau}) = \mu_4,$$

$$H(x,u_6) = 1+\Delta, \qquad \boxed{H(x,u_9) = 0},$$

$$\boxed{H'_u(x,u_6) = 0}, \qquad \boxed{H'_u(x,u_9) = 0}.$$

Численное решение нелинейной системы

$$
\begin{aligned}
P'_u(x, u_6) &= (1+\Delta)\, Q'_u(x, u_6), \\
P(x, u_9) &= 0, \\
P(x, 1) &= (1-\Delta) Q(x, 1), \\
P'_u(x, u_9) &= 0, \\
P(x, \tfrac{1}{\tau}) &= \mu_4\, Q(x, \tfrac{1}{\tau}), \\
P(x, u_6) &= (1+\Delta)\, Q(x, u_6).
\end{aligned}
$$

Основная проблема: Построение «хорошего» начального приближения.

Построение начального приближения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2u_9^2 \\ u_9^2 & 1 & 0 & u_9^4 \\ 1 & 0 & -(1-\Delta) & 1 \\ 1 & 0 & -(1+\Delta) & 2u_6^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\Delta \\ 2u_6^2(1+\Delta) \end{pmatrix}.$$

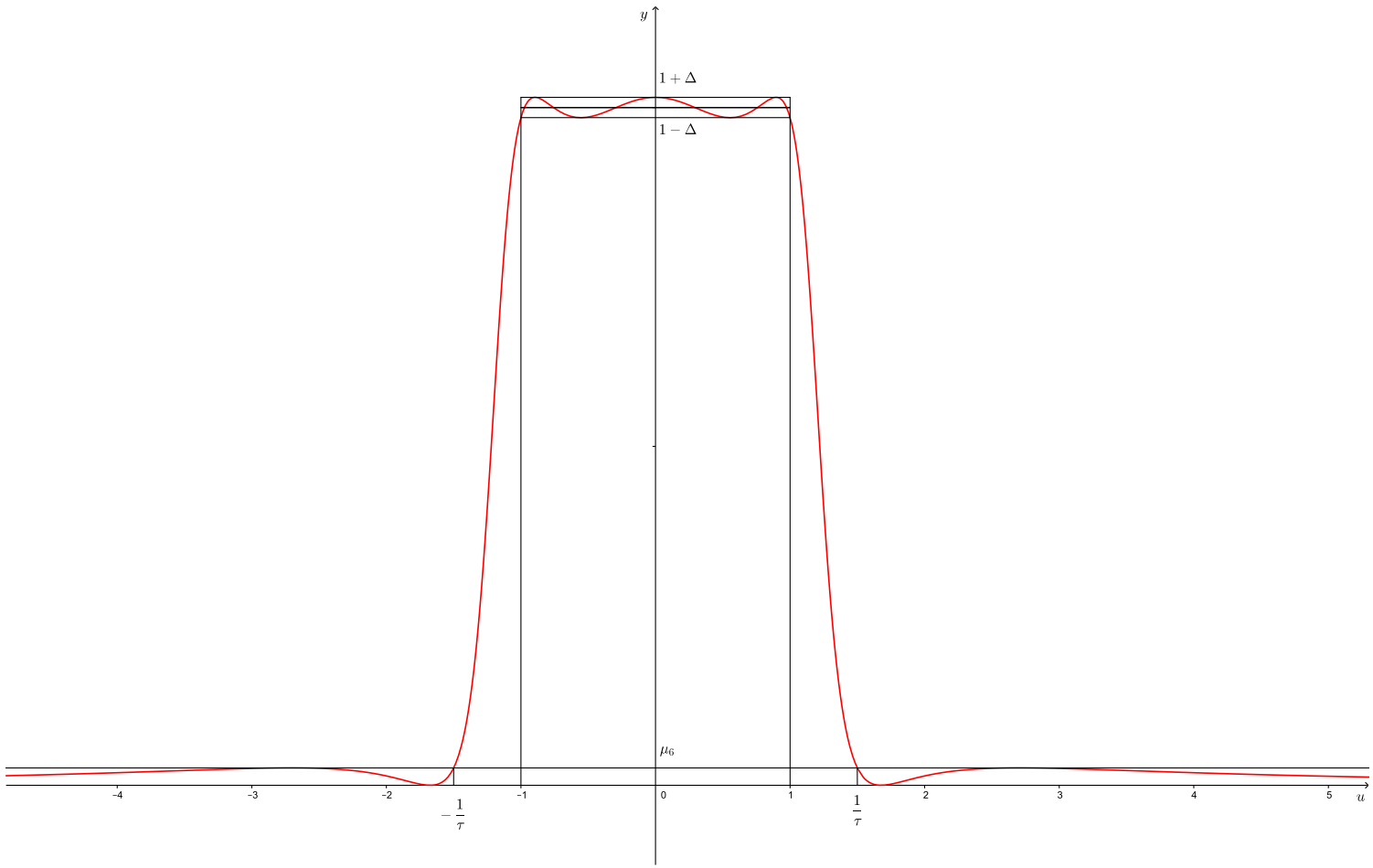
Решение системы линейных уравнений:

$$\mu_4 = \frac{(1-\Delta^2)(2u_6^2-1)}{4\Delta u_9^2 + 2u_6^2 - 1 - \Delta(2u_6^2+1)},$$

$$x_2 = -2u_9^2\mu_4, \qquad x_4 = u_9^4\mu_4, \qquad x_6 = \frac{1-2u_9^2}{1-\Delta}\mu_4 - 1.$$

Пример. $\tau = \frac{3}{2}$, $\Delta = 0.068$, $\mu_4 = 0.1360$.

СЛУЧАЙ $n = 6$



Пример. $\tau = \frac{3}{2}$, $\Delta = 0.0138$, $\mu_6 = 0.0276$.

НЕКОТОРЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Перенумеруем точки альтернанса:

при $n = 2s - 1$

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_s = -\frac{1}{\tau},$$
$$-1 = u_{s+1} < \ldots < u_{n+s+1} = 1,$$
$$\frac{1}{\tau} = u_{n+s+2} < \ldots < u_{2n+2};$$

при $n = 2s$

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_s = -\frac{1}{\tau},$$
$$-1 = u_{s+1} < \ldots < u_{n+1} = 0 < u_{n+2} < \ldots < u_{n+s+1} = 1,$$
$$\frac{1}{\tau} = u_{n+s+2} < \ldots < u_{2n+1} < u_{2n+2} = \infty.$$

(I) При $n = 2s - 1$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} u_j u_{n+2-j} &= \frac{1}{\tau}, \quad j \in 1:s; \\ u_{n+1+j} u_{2n+3-j} &= \frac{1}{\tau}, \quad j \in 1:s. \end{aligned}$$

При $n = 2s$

$$\begin{aligned} u_j u_{n+1-j} &= \frac{1}{\tau}, \quad j \in 1:s; \\ u_{n+1+j} u_{2n+2-j} &= \frac{1}{\tau}, \quad j \in 1:s. \end{aligned}$$

(II) Порядок N полной нелинейной системы уравнений равен

$$N = \begin{cases} 4n & \text{при нечетном } n, \\ 2(n-1) & \text{при четном } n. \end{cases}$$

(III) При нечётном n у оптимальной дроби

$$H_n(x,u) = \frac{P_n(x,u)}{Q_n(x,u)}$$

коэффициенты полиномов P_n и Q_n при одинаковых степенях u имеют одинаковые знаки. Кроме того,

$$|x_{2j-1}| < |x_{n+2j-1}|, \qquad j \in 1:s.$$

С возрастанием n

$$\frac{x_{2j-1}}{x_{n+2j-1}} \longrightarrow 1 \ \ \forall\, j \in 1:s; \qquad H_n(x,0) \longrightarrow 1.$$

Здесь $s = \frac{1}{2}(n+1)$.

(IV) Все точки альтернанса, найденные при $n = k$, являются точками альтернанса и при $n = 2k$, $k \in 1 : 7$.

Все точки альтернанса, найденные при $n = 3$, являются точками альтернанса и при $n = 3k$, $k \in 1 : 5$.

(V) При поиске хорошего начального приближения для полной системы уравнений необходимо указать приближенные значения для точек альтернанса. Наиболее трудоёмкий случай возникает при простом n.

Семинар по конструктивному негладкому анализу

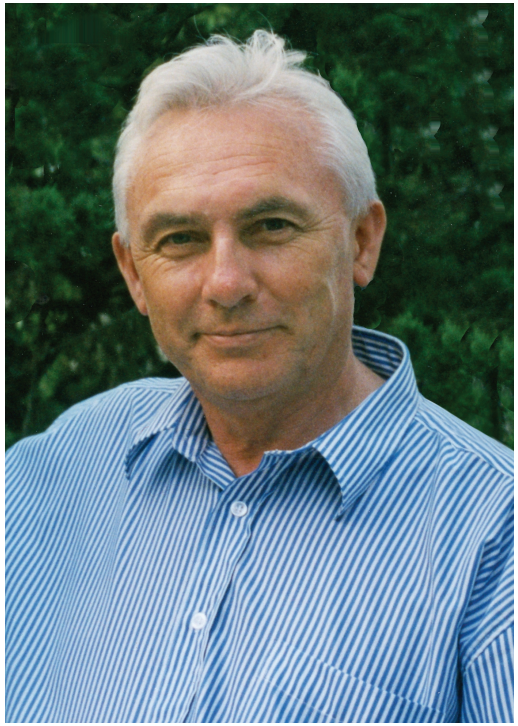
и недифференцируемой оптимизации

http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/

Euler International Mathematical Institute

INTERNATIONAL CONFERENCE

Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics



Dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov

St. Petersburg, RUSSIA

22–27 May, 2017

ССЫЛКА НА САЙТ

http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2017/CNSA/index.html