МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КОНСТРУКТИВНЫЙ НЕГЛАДКИЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Тезисы международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова 22-27 мая 2017 г.

Часть первая



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ 2017

EULER INTERNATIONAL MATHEMATICAL INSTITUTE SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

$\begin{array}{c} \text{CONSTRUCTIVE NONSMOOTH ANALYSIS} \\ \text{AND RELATED TOPICS} \end{array}$

Abstracts of the International Conference «Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics» Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov May $22-27,\,2017$

Part I



St. Petersburg 2017

УДК 519.85 ББК 22.18 Т 77

Т 77 Тезисы докладов международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова. Часть І. — СПб.: Издательство ВВМ, 2017. 268 с.

ISBN 978-5-9651-1058-2

Настоящее издание содержит тезисы докладов, представленных на международную конференцию «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященную памяти профессора В. Ф. Демьянова (CNSA-2017, г. Санкт-Петербург, 22–27 мая 2017 г.).

Сборник состоит из двух частей, разбитых на тематические секции. В первую часть включены тезисы докладов из следующих секций: конструктивные средства негладкого анализа, негладкие задачи вариационного исчисления и теории управления, задачи негладкой механики. Имеется авторский указатель.

Книга представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Конференция проведена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 17-01-20148-г).

УДК 519.85 ББК 22.18

Ответственные за выпуск: В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян

Подготовили оригинал-макет: Г. Ш. Тамасян, М. В. Удот

ISBN 978-5-9651-1058-2

International Conference

CONSTRUCTIVE NONSMOOTH ANALYSIS AND RELATED TOPICS

Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov Saint Petersburg, May 22–27, 2017

ORGANIZERS

The Euler International Mathematical Institute Saint Petersburg State University

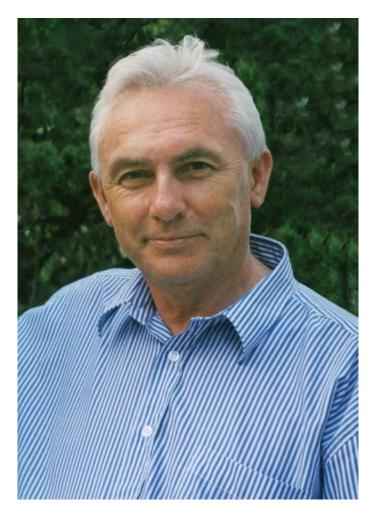
SPONSORED BY

Russian Foundation for Basic Research

Organizers of the conference are: Alexander B. Kurzhanski (Lomonosov Moscow State University, chairman), Vassili N. Malozemov (St. Petersburg State University, co-chair), Lyudmila N. Polyakova (St. Petersburg State University), Co-chair), Anna G. Golovkina (St. Petersburg State University), Vladimir V. Karelin (St. Petersburg State University), Grigoriy Sh. Tamasyan (St. Petersburg State University), Nadia V. Zalesskaya (Euler International Mathematical Institute, secretary), Tatiana V. Vinogradova (Euler International Mathematical Institute, secretary)

The International Program Committee: A.V. Arutyunov (Russia), A. Bagirov (Australia), F.L. Chernous'ko (Russia), S. Dempe (Germany), G. Di Pillo (Italy), S.I. Dudov (Russia), N.V. Egorov (Russia), Y.G. Evtushenko (Russia), M. Gaudioso (Italy), F. Giannessi (Italy), V.V. Gorokhovik (Belarus), J. Gwinner (Germany), A.D. Ioffe (Israel), M.Yu. Khachai (Russia), O.V. Khamisov (Russia), A. Kruger (Australia), A.B. Kurzhanski (Russia), S.S. Kutateladze (Russia), Yu. Ledyaev (USA), G.A. Leonov (Russia), M.M. Makela (Finland), V.N. Malozemov (Russia, chairman), V.V. Mazalov (Russia), B. Mordukhovich (USA), Yu.E. Nesterov (Belgium), D.A. Ovsyannikov (Russia), D. Pallaschke (Germany), L.A. Petrosyan (Russia), E.S. Polovinkin (Russia), B.T. Polyak (Russia), P.I. Stetsyuk (Ukraine), A.S. Strekalovski (Russia), M. Thera (France), V.M. Tikhomirov (Russia), E.I. Veremey (Russia), A.P. Zhabko (Russia), V.I. Zorkaltsev (Russia), V.V. Zhuk (Russia).

Technical Program Committee: L.A. Petrosyan (St. Petersburg State University, Russia, chairman), V.N. Malozemov (St. Petersburg State University, Russia, vice-chairman), L.N. Polyakova (St. Petersburg State University, Russia, vice-chairman), N.V. Egorov (St. Petersburg State University, Russia), A.A. Lisenkov (St. Petersburg State Electrotechnical University «LETI», Russia), V.V. Luchinin (St. Petersburg State Electrotechnical University «LETI», Russia), D.A. Ovsyannikov (St. Petersburg State University, Russia), V.B. Yankevich (St. Petersburg State Electrotechnical University «LETI», Russia).



Владимир Федорович Демьянов (18.08.1938-18.04.2014)

CONTENTS. Part I.

Section 1. Constructive Tools of Nonsmooth Analysis

$Abbasov\ M.$	
Geometric Conditions of Reduction of Coexhausters	12
Arutyunov A., Zhukovskiy S.	
Covering Mappings and Their Applications	15
$Gorokhovik\ V.$	
Demyanov–Rubinov Subdifferentials of Real-Valued Functions	17
Grzybowski J., Pallaschke D., Urbański R. Characterization of Differences of Sublinear Functions on the Plane	20
Ivanov G.	
Well-posedness and Subdifferential Calculus of Optimal Value and Infimal Convolution	24
Lopushanski M.	
Weakly Convex Sets in Asymmetric Normed Spaces	28
Mordukhovich B.	
Critical Multipliers in Variational Systems via Second-Order Generalized Differentiation	33
Polovinkin E.	
Calculation of Subdifferentials for the Difference of Two Convex	
Functions	33
Prudnikov I.	
The Subdifferentials of the Second Orders for Lipschitz Functions $$.	37
Singh Ya., Pandey Yo., Mishra S.	
Lagrange Duality and Saddle Point Optimality Criteria for MPEC via Convexificators	39
$Smirnova\ S.$	
Representation of the Compact-Valued Sublinear Operator by Means of "Basis" Selectors Packet	40
Strekalovsky A.	
Global Optimality Conditions for d.c. Optimization	43
Uteshev A., Goncharova M.	
Metric Problems for Algebraic Manifolds: Analytical Approach $$	47
Баран И.В.	
Adjoint Extremal Problem for Non-Smooth Functionals	51

Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Lagrange Multipliers Theorem for a General Optimization Problem with an Infinite Number of Constraints		
<i>Орлов И.В.</i> Сублинейное расширение алгебраической К-теории Гротендика	58	
Opлoв И.В. Constructing of Subdifferential Calculus on the Base of Sublinear Operator Theory	62	
$Po\partial un\ A.C.$ On the Relationship Between the Structure Superdifferentials Piecewise Smooth Solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation with the Properties of the Singular Set	69	
C тонякин Φ . C . Applications of Subdifferential Calculus to Bochner Integral Theory	72	
Стонякин Ф.С. Subdifferential Calculus in Abstract Convex Cones	76	
Ушаков В.Н., Успенский А.А., Ершов А.А. Alpha Sets in Finite-Dimensional Euclidean Spaces and Their Properties	81	
Хачатрян Р.А. О необходимых условиях экстремума для негладких функций.	84	
Xлопин Д.В. On Transversality Condition for Infinite Horizon Control Problem and Subgradients of the Limit of Smooth Functions	86	
Section 2. Nonsmooth Problems of Calculus of Variations and Control Theory		
Antipin A. Sufficient Saddle-Point Conditions for Terminal Control Problems: Methods for Solving	91	
Averboukh Yu. Nonsmooth Analysis for Control Problem in the Space of Probabilities	95	
Fominyh A. Application of the Steepest Descent Method to Solving Differential Inclusions with Either Free or Fixed Right End	97	

Karelin V., Bure V., Svirkin M.	
Generalization of the Models Maki–Thompson and Dale–Kendall of the Rumour Spreading in Continuous Time	98
Khoroshilova E.	
Optimal Control by Boundary-Value Problem with Minimizing the Sensitivity Function	100
Kvitko A., Firyulina O., Maksina A. Solution of Control Problems for Nonlinear Stationary System	
Taking into Account the Non-Stationary Perturbation	103
Mizintseva M., Ovsyannikov D.	
Minimax Problem of Simultaneous Optimization of Smooth and Non-Smooth Functionals	106
Pilyugin S.	
Clustering in Dynamical Systems	108
$Subbotina\ N.$	
Constructive Nonsmooth Analysis to the Theory of Hamilton-Jacobi	
Equations	110
Taynitskiy V., Gubar E., Zhu Q.	
Optimal Impulse Control in Bi-Virus SIR Epidemic Model	113
Veremey E.	
Issues of H_{∞} -optimization for Marine Ships' Motion Control System	s117
Апанович Д.В., Воронов В.А.	
Discrete Approximation of a Reachable Set for a Nonlinear Impulsive	
Control System	122
Баранов О.В., Смирнов Н.В., Смирнова Т.Е.	
On the Choosing of PID Controller Parameters for a Quadrocopter	125
Барсегян В.Р.	120
On the Problem of Control of Continuous-Discrete Systems with	
Changing Dimensions of Phase Space and Vector of Control	127
Бутырский Е.Ю., Васильев В.В., Понкратова К.И.	121
Suboptimal Administration in the Stochastic Nonlinear Dynamic	
Systems	130
Виноградова Т.К.	100
On Numerical Methods in Optimal Control Problems with Nonsmooth	,
Criterion	133
	100
Vinogradova T.K., Lizunova N.A. Synthesizing Control Design Using a Minimax Method	137
Simulating control Posign comp a minimum montod	101

Вишневский В.Э.	
О свойствах преобразований Ли-Депри (сходимость и аналитическое продолжение)	138
Волошин М.В.	
On the Asymptotic Stability of a Class of Nonlinear Difference	
Switched Systems	140
Екимов А.В., Балыкина Ю.Е., Свиркин М.В.	
On the Question of Zero-Controllability of Nonstationary Bilinear	1 4 4
Systems	144
Жабко А.П., Зараник У.П., Чижова О.Н. The Stabilization of the Linear Differential-Difference Systems with the Linear Increasing Time-Delay by the Piecewise Constant Control	146
Зубов С.В.	
Rated Stability of a First-Order Ordinary Differential Equation	150
Камачкин А.М., Хитров Г.М., Шамберов В.Н.	
Special Matrix Transformations of Essentially Nonlinear Control	
Systems	152
Мышков С.К.	
On the Minimax Approach in a Singularly Perturbed Control Problem	1155
Провоторов В.В., Подвальный $C.Л.$	
Synthesis of Optimal Boundary Control of Parabolic Systems with	157
Distributed Parameters on the Graph	157
Самсонюк О.Н., Старицын М.В. Generalized Solutions of Bounded p-Variation of Nonlinear Control	
Systems and Nonsmooth Optimal Impulsive Control Problems	162
Самсонюк О.Н., Тимошин С.А.	
Impulsive Optimal Control Problems with Hysteresis	166
Смирнов Н.В., Смирнов А.Н., Смирнов М.Н., Смирнова М.А.	
Combined Control Synthesis Algorithm	169
Срочко В.А.	
Numerical Solving of Some Minimax Control Problems	172
Старицын М.В., Сорокин С.П.	
Feedback Necessary Optimality Condition for Nonsmooth Optimal	
Impulsive Control Problems	175
Трофимова И.В., Соколов Б.В., Иванов Д.А.	
Correcting Control Construction for One Supply Chain	179
Xpaues C.M.	
Investigation of Controllability of Polysystems in Discrete Time	100
Based on Properties of Their Invariant Measures	182

Section 3. Problems of Nonsmooth Mechanics

Alawdin P., Urbańska K.	
Bilevel Limit Analysis of Self-Hardening Rod Systems Under Moving Load	187
Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Yu. Error Estimates for Numerical Integration of ODEs in the Minimax Formulation	190
Chernousko F. Dynamics of a Body with Internal Moving Masses in the Presence of Dry Friction	195
	197
Kumar M. Boundary Layer Problems	200
$Matrosov\ A.,\ Goloskokov\ D.$ Analysis of Elastic Systems with Nonsmooth Boundaries	201
$Matrosov\ A.,\ Shirunov\ G.$ Analysis of the Behavior of Stresses on the Edges of a Thick Plate	203
Ovcharova N. Numerical Methods for Nonmonotone Contact Problems in Continuum Mechanics	1 206
Pavilaynen G., Yushin R. An Approximate Solution of Elastic-Plastic Problem of Circular Strength Different (SD) Plates	207
Александров А.Ю., Косов А.А. Stability Analysis of Hybrid Mechanical Systems with Switched Nonlinear Nonhomogeneous Positional Forces	210
Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н. Nonsmooth Problem of Stability for Elastic Rings	213
Бильченко Γ . Γ . The Influence of Mobile Load on the Carrier Dynamics	218
Бильченко Г.Г., Бильченко Н.Г. On the One-Dimensional and Two-Dimensional Inverse Problems of Heat and Mass Transfer on Hypersonic Aircraft Permeable Surfaces	224
Бильченко Г.Г., Бильченко Н.Г. On the Bijectivity of Controls Pairs and Pairs of Heat and Mass Transfer Local Parameters in the Hypersonic Flow Stagnation Point	229

Гончарова Е.В., Старицын М.В. Nonsmooth Mechanical Systems with Impactively Blockable Degrees of Freedom and Active Holonomic Constraints	232
Давыденко А.А., Старков В.Н., Степенко Н.А. Simulation of Particle Motion In the Given Nonsmooth Speed Fields	234
Королев В.С.	
Properties of Solutions of Nonlinear Equations of Mechanics Control Systems	237
Kocob A.A.	
On the Control Problem of a Switched Mechanical System	241
K ривовичев Γ . B ., M арнопольская E . C .	
Optimization of Dispersive and Dissipative Characteristics of Finite- Difference Schemes for Advection Equation	244
Перегудин С.И., Холодова С.Е., Перегудина Э.С. Elements of Non-Smooth Analysis in the Theory of Waves	247
Перегудин С.И., Холодова С.Е., Перегудина Э.С. Methods of Non-Smooth Analysis in Problems of Fluid Dynamic .	250
Tapacos B.H.	
Nonsmooth problems of mechanics of elastic systems	252
Чжао III., Пронина Ю.Г. On the MATLAB Finite Element Modelling of an Elastic Plane with	
a Hole under Tension	256
Шиманчук Д.В.	
On the Coupled Orbit-Attitude Control Motion of a Celestial Body in the Neighborhood of the Collinear Libration Point L1 of the Sun-	
Earth System	261
AUTHOR INDEX	265

12 Abbasov M.

Section 1

Constructive Tools of Nonsmooth Analysis

Geometric Conditions of Reduction of Coexhausters Abbasov M.

abbasov.majid@gmail.com

St. Petersburg State University, SPbSU, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034 Russia

Let $f: X \to \mathbb{R}$ is a continuous function, where $X \subset \mathbb{R}^n$ be an opened set, and let f be directionally differentiable (not necessary differentiable).

The function f is called Dini directionally differentiable at $x \in X$ if for all $g \in \mathbb{R}^n$ there is the finite limit

$$f'_D(x,g) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x + \alpha g) - f(x)}{\alpha}.$$

The quantity $f'_D(x,g)$ is called the Dini derivative of f at x in the direction g. The function f is called Hadamard directionally differentiable at $x \in X$ if for all $g \in \mathbb{R}^n$ there is the finite limit

$$f_H'(x,g) = \lim_{[\alpha,g'] \to [+0,g]} \frac{f(x + \alpha g') - f(x)}{\alpha}.$$

The quantity $f'_H(x,g)$ is called the Hadamard derivative of f at x in the direction g.

Let

$$\mathbb{S} = \{ g \in \mathbb{R}^n \mid ||g|| = 1 \}$$

be a unit sphere centered at the origin. Since functions $h_x(g) = f'_D(x, g)$ and $h_x(g) = f'_H(x, g)$ are positively homogenous (p.h) as functions of g we can consider them only on \mathbb{S} .

For a wide class of nondifferentiable functions optimality conditions can be described via directional derivatives [1], but to formulate these conditions in more constructive way a special representation for these objects is needed.

In [1, 2] the notion of exhausters was introduced. Denote $h_x(g) = f'(x, g)$, rge f'(x, g) is directional derivative in the sense of Dini or Hadamard. Let $h_x(g)$ is contineous and Lipshitz, then for all $g \in \mathbb{S}$ it can be represented (see [3, 4]) in the form

$$h_x(g) = h_1(x,g) = \min_{C \in E^*(x)} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \tag{1}$$

Abbasov M. 13

as well as in the form

$$h_x(g) = h_2(x,g) = \max_{C \in E_*(x)} \min_{v \in C} \langle v, g \rangle, \tag{2}$$

where $E^*(\mathbf{x})$, $E_*(x)$ are families of convex compact sets in \mathbb{R}^n , called upper and lower exhauster of the function f at x respectively.

There is well developed calculus of exhausters [1], optimality conditions were obtained in their terms [5, 6]. This paved a way to build new optimization algorithms. But these families are not unequally defined. So the problem of finding "smaller" exhauster arises. First this problem was considered by V.A. Roshchina [7, 8, 9].

The functions $h_1(x, g)$ and $h_2(x, g)$ in (1) and (2) are discontinuous as functions of x and therefore their application for computational purposes is difficult. To overcome this problem notion of coexhausters was introduced.

We say that at the point x the function f has an upper coexhauster in the sense of Dini iff the following expansion holds:

$$f(x+\Delta) = f(x) + \min_{C \in \overline{E}(x)} \max_{[a,v] \in C} [a+(v,\Delta)] + o_x(\Delta), \tag{3}$$

where $\overline{E}(x)$ is a family of convex compact sets in \mathbb{R}^{n+1} , and $o_x(\Delta)$ satisfies

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{o_x(\alpha \Delta)}{\alpha} = 0, \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}^n.$$
 (4)

If $o_x(\Delta)$ in (3) satisfies

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \frac{o_x(\Delta)}{||\Delta||} = 0, \tag{5}$$

then we say that at the point x the function f has an upper coexhauster in the sense of Hadamard.

The set $\overline{E}(x)$ is called an upper coexhauster of f at the point x.

We say that at the point x the function f has a lower coexhauster in the sense of Dini iff the following expansion holds:

$$f(x + \Delta) = f(x) + \max_{C \in E(x)} \min_{[b,w] \in C} [b + (w, \Delta)] + o_x(\Delta), \tag{6}$$

where $\underline{E}(x)$ is a family of convex compact sets in \mathbb{R}^{n+1} , and $o_x(\Delta)$ satisfies (4). If $o_x(\Delta)$ in (6) satisfies (5), then we say that at the point x the function f has a lower coexhauster in the sense of Hadamard.

The set $\underline{E}(x)$ is called a lower coexhauster of the function f at the point x. The function f is continuous, therefore from (3) and (6) (for $\Delta = 0_n$) it

The function f is continuous, therefore from (3) and (6) (for $\Delta = 0_n$) it follows that

$$\min_{C \in \overline{E}(x)} \max_{[a,v] \in C} a = \max_{C \in \underline{E}(x)} \min_{[b,w] \in C} b = 0.$$

14 Abbasov M.

Let

$$\begin{split} h_x(\Delta) &= h_3(x,\Delta) = \min_{C \in \overline{E}(x)} \max_{[a,v] \in C} [a + (v,\Delta)], \\ h_x(\Delta) &= h_4(x,\Delta) = \max_{C \in \underline{E}(x)} \min_{[b,w] \in C} [b + (w,\Delta)]. \end{split}$$

Note that an upper (lower) coexhauster of a function f at a point x coincides with the upper (lower) coexhauster of the function $h_x(\Delta)$ at 0_n . Therefore we can consider the function $h_x(\Delta)$ at the origin and use designations $h(\Delta)$, \overline{E} , \underline{E} .

The notion of coexhauster was introduced in [2, 1]. There is well developed calculus of coexhausters. Optimality conditions were derived in terms of these families [1, 10]. One can introduce the notion of the class of functions which have continuous upper and lower coexhauster mappings. The usage of continuous coexhauster mappings allows one to guarantee stability and convergence of numerical algorithms. But coexhausters are not uniquely defined too. It is obvious that the smaller the family, the less are computational costs when using optimization algorithms. So again the problem of finding minimal family arises. We will use the definitions of minimality introduced by V.A. Roshchina.

Definition 1. We say that the upper (lower) coexhauster $E_1(h)$ of the function h is smaller by inclusion than the other upper (lower) coexhauster $E_2(h)$ of the same function h, if $E_1(h) \subset E_2(h)$.

Definition 2. We say that the upper (lower) coexhauster E(h) of the function h is the minimal by inclusion if there is no other upper (lower) coexhauster $\widetilde{E}(h)$ of the function h so that $\widetilde{E}(h) \subset E(h)$.

However, it is clear that such a definition does not affect the structure of sets themselves, although the structure plays a major role in many cases.

Definition 3. We say that the upper (lower) coexhauster $E_1(h)$ of the function h is smaller by shape than the other upper (lower) coexhauster $E_2(h)$ of the same function h, if

$$\forall \widetilde{C} \in E_1(h) \; \exists C \in E_2(h) \colon \widetilde{C} \subset C.$$

Definition 4. We say that the upper (lower) coexhauster E(h) of the function h is the minimal by shape if there is no other upper (lower) coexhauster $\widetilde{E}(h)$ of the function h so that

$$\forall \widetilde{C} \in \widetilde{E}(h) \; \exists C \in E(h) \colon \widetilde{C} \subset C.$$

Remark. Note that an coexhauster, minimal by shape, is also minimal by inclusion, but the converse is not true. Therefore, necessary conditions for

the minimality by inclusion are also necessary for the minimality by shape, whereas sufficient conditions for the minimality by shape are also sufficient for the minimality by inclusion.

In this work a problem of reduction of coexhausters is considered. New geometric conditions of minimality are described which allow to reduce coexhausters. Illustrative examples are provided.

References

- [1] V.F. Demyanov, "Exhausters and Convexificators New Tools in Nonsmooth Analysis", In: V. Demyanov and A. Rubinov (Eds.) Quasidifferentiability and related topics, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 85–137 (2000).
- [2] V.F. Demyanov, "Exhausters of a positively homogeneous function", *Optimization*, 45, 13–29 (1999).
- [3] V.F. Demyanov, A.M. Rubinov, Constructive Nonsmooth Analysis, Verlag Peter Land (1995).
- [4] M. Castellani, "A Dual Representation for Proper Positively Homogeneous Functions", Journal of Global Optimization, 16, No. 4, 393–400 (2000).
- [5] M.E. Abbasov, V.F. Demyanov, "Proper and adjoint exhausters in Nonsmooth analysis: Optimality conditions", *Journal of Global Optimization*, 56, 569II-585 (2013).
- [6] V.F. Demyanov, V.A. Roschina, "Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters", Optimization, 55, 525II-540 (2006).
- [7] V.A. Roschina, "Reducing Exhausters", J. Optim. Theory Appl., 136, No. (2), 261–273 (2008).
- [8] V.A. Roschina, "On conditions for minimality of exhausters", J. Convex Anal., 15, No. (4), 859–868 (2008).
- [9] V.A. Roschina, Topics in Optimization: Solving Second-Order Conic Systems with Finite Precision; Calculus of Generalized Subdifferentials for Nonsmooth Functions. Supervisor Prof. Felipe Cucker, City University of Hong Kong (2009).
- [10] M.E. Abbasov, V.F. Demyanov, "Adjoint Coexhausters in Nonsmooth Analysis and Extremality Conditions", Journal of Optimization Theory and Applications, 156, No. 3, 535Ц-553 (2013).

Covering Mappings and Their Applications Arutyunov A., Zhukovskiy S.

arutun@orc.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st, Moscow, Russia, 117198

In the talk, the covering mapping theory and its applications to implicit integral equations are discussed. Recall the definition of covering mapping.

Let (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) be metric spaces, $\alpha > 0$ be given. Denote a closed ball centered at $x \in X$ with radius $R \ge 0$ by $B_X(x, R)$. A mapping $\Psi : X \to Y$ is called α -covering if

$$B_Y(\Psi(x), \alpha r) \subset \Psi(B_X(x, r)) \quad \forall x \in X, \quad \forall r \geqslant 0.$$

The concept of covering plays important role in nonlinear analysis. It is used for obtaining necessary optimality conditions, sufficient conditions for nonlinear equations to have a solution, sufficient solvability conditions for functional equations and control systems (see, for example, [1, 2, 3]).

In the talk, we discuss recent results on solvability of nonlinear equations in metric spaces. Namely, we present conditions for coincidence points existence. Given two mappings $\Psi, \Phi: X \to Y$, recall that a point $\xi \in X$ is called a coincidence point of mappings Ψ and Φ if $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$. We also discuss the stability of coincidence point and stability of covering under Lipschitz perturbation. In addition, we consider applications of the mentioned results to implicit differential and integral-differential equations. The following problem is discussed.

Given functions $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$, $\mathcal{K}:[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, and a vector $x_0\in\mathbb{R}^n$, assume that f is measurable in the first argument $t\in[a,b]$ and continuous in the collection of other arguments $(x,\dot{x},v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, \mathcal{K} is measurable in the collection of the first and the second arguments $(t,s)\in[a,b]\times[a,b]$ and continuous in the third argument $x\in\mathbb{R}^n$. The Cauchy problem

$$f(t,x,\dot{x},\int_{a}^{t}\mathcal{K}(t,s,x)\,ds) = 0, \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

is called *locally solvable* if there exists $\tau > 0$ and an absolutely continuous function $x : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ such that $f(t, \dot{x}(t), x(t), \int_a^t \mathcal{K}(t, s, x(s)) ds) = 0$ for a.a. $t \in [0, \tau]$ and $x(0) = x_0$. Here $\dot{x}(t)$ stands for the derivative of x at t. In the talk, we present sufficient conditions for the Cauchy problem (1) to be locally solvable. These conditions are stated in terms of covering and Lipschitz mappings of metric spaces.

Acknowledgement. The investigation was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01168).

References

[1] B. Mordukhovich, Variational Analysis and Generalized Differentiation, Springer-Verlag (2006). Gorokhovik V. 17

[2] A.V Arutyunov, "Covering mappings in metric spaces and fixed points" Doklady Mathematics, 76, No. 2, 665–667 (2007).

[3] A.V Arutyunov, S.E. Zhukovskiy, "Existence of local solutions in constrained dynamic systems" *Applicable Analysis*, 90, No. 6, 889–898 (2011).

Demyanov-Rubinov Subdifferentials of Real-Valued Functions

Gorokhovik V.

gorokh@im.bas-net.by

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Surganova st., 11, Minsk, 220072, Belarus

In the last years Vladimir Fedorovich Demyanov paid much attention to studies exhaustive families of the upper convex and lower concave approximations of real-valued functions, and objects dual to them, now known as exhausters. He personally and his students and followers have published a great deal of papers on this topic (see [1] and the bibliography therein). This talk is also devoted to the same subject.

The notion of the upper convex approximation of a real-valued function was introduced by Pshenichnyi [2]. In [3, Theorem 2.1] (see also [4, Lemma 4.3) Demyanov and Rubinov proved that a real-valued positively homogeneous function, defined on \mathbb{R}^n , is upper (lower) semicontinuous if and only if it can be represented as a lower envelope of a some family of its sublinear majorants which takes finite values on the whole space \mathbb{R}^n . Such families were called exhaustive families of upper convex (lower concave) approximations. Using this characterization of (semi)continuous positively homogeneous functions and the Minkowski duality, Demyanov [5] introduced dual objects called by him exhausters and thus he extended in fact the Minkowski duality to much more broader classes of functions than sublinear or even difference-sublinear ones. Exhausters being dual counterparts of semicontinuous positively homogeneous functions can effectively be used for global analysis of those. When an arbitrary real-valued function is directionally differentiable in some sense, exhausters corresponding its directional derivative generalize the notions of subdifferentials [2, 6] and quasidifferentials [4] and, hence, are tools of local analysis of such functions. Uderzo [7], following the main idea of the proof given by Demyanov and Rubinov in [4], extended the above characterization of semicontinuity to realvalued positively homogeneous functions defined on uniformly convex Banach spaces.

18 Gorokhovik V.

In this talk we develop the ideas of Demyanov and Rubinov, relating to exhaustive families of upper convex and lower concave approximations, and extend them to sets and functions defined on arbitrary normed spaces.

First of all, for sets belonging to a real vector space, we introduce the notion of the convex component, under which is meant a maximal (by inclusion) convex subset of the given set. The family, consisting of all convex components of a set, forms a covering of this set and, in this sense, it can be considered as an exhaustive family of convex approximations of the set. Moreover, we prove that the recession cone of a nonempty set coincides with the intersection of the recession cones of all its convex components. Since a set is globally epi-Lipschitzian if and only if the interior of its recession cone is nonempty [8], we can use the family of convex components to analyse epigraphs (or hypographs) of Lipschitz continuous functions.

Then, for extended-real-valued functions defined on real vector spaces we introduce the notions of minimal convex majorants and maximal concave minorants, which extend the notion of the convex component to functions. So, the convex components of the epigraph of a function are the epigraphs of minimal convex majorants, while the convex components of the hypograph are the hypographs of maximal concave minorants. It is proved that an extended-real-valued function which doesn't take the value $-\infty$, in particular, any real-valued function, defined on a real vector space, is the exact lower envelope of all its minimal convex majorants, whereas a function which doesn't take the value $+\infty$ is the exact upper envelope of the family of all its maximal concave minorants. The drawback of such representations is that, even when a function is real-valued, among its minimal convex majorants and maximal concave minorants can be functions taking values $-\infty$ or $+\infty$. At the same time the following theorem is true: a real-valued function defined on a real normed space is Lipschitz continuous on the whole space if and only if each its minimal convex majorant (or, equivalently, each its maximal concave minorant) is real-valued and Lipschitz continuous on the whole space. Thus, the class of real-valued functions, defined on a real normed space and admitting the representation as the lower (upper) envelope of the subfamily of Lipschitz continuous on the whole space minimal upper majorants (maximal lower minorants), is nonempty. It is shown that this class contains all bounded above (below) real-valued functions which are upper (lower) semicontinuous on the whole space. If we restrict our cosideration by positively homogeneous functions, the following criterium is true: a real-valued positively homogeneous function defined on a real normed space is upper (lower) semicontinuous on the whole space if and only if it is the lower envelope of the family of all its minimal continuous (equivalently, Lipschitz continuous) sublinear majorants (maximal continuous

Gorokhovik V. 19

superlinear minorants). This criterium extends to arbitrary normed spaces the characterizations of semicontinuity of positively homogeneous functions proved previously by Demyanov and Rubinov [3, 4] in the finite-dimensional setting and Uderzo [7] in the setting of uniformly convex Banach spaces.

For each upper (lower) semicontinuous positively homogeneous function an exhaustive family of upper convex (lower concave) approximations corresponding it is defined nonuniquely. To avoid this non-uniqueness we introduce the following definitions.

By the Demyanov-Rubinov superdifferential (shortly, DR-superdifferential) of an upper semicontinuous positively homogeneous function we call the exhaustive family of upper convex approximations consisting of all minimal continuous sublinear majorants of this function. Likewise, by the Demyanov-Rubinov subdifferential (shortly, DR-subdifferential) of a lower semicontinuous positively homogeneous function we call the exhaustive family of lower concave approximations consisting of all maximal continuous superlinear minorants of this function.

The DR–subdifferential of any continuous sublinear function coincides with its subdifferential in the sense of convex analysis, while the DR–superdifferential of any continuous superlinear function coincides with its superdifferential in the sense of convex analysis. Moreover, for any continuous positively homogeneous function the Frechet subdifferentia is included in the DR–subdifferential and the Frechet superdifferential is a part of the DR–superdifferential. Note, that for each continuous positively homogeneous function both its DR–superdifferential and its DR–subdifferential are nonempty. The relationships between the DR-subdifferential (DR-superdifferential) and the Φ -subdifferential (Φ -superdifferential) introduced by Rolewicz [9] also are discussed.

We give a comprehensive description of characteristic properties of DR-subdifferentials and DR-superdifferentials of different subclasses of continuous positively homogeneous functions. Besides, a method for converting DR-subdifferentials of continuous positively homogeneous functions into DR-superdifferentials and conversely is proposed.

The research was supported by the Belarussian State Research Programm (grant "Conversion -1.04.01").

References

- [1] Gorokhovik V.V., Trafimovich M.F., "Positively homogeneous functions revisited", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 171, No. 2, 481-503 (2016).
- [2] Pshenichnyi B.N., Convex analysis and extremal problems, Moscow: Nauka (1980) (in Russian).

- [3] Demyanov V.F., Rubinov A.M., "Elements of Quasidifferential Calculus", In Demyanov V.F. (Ed.) Nonsmooth problems in the theory of optimization and control, Leningrad: Leningrad Univ. Press, 5–127 (1982) (in Russian).
- [4] Demyanov V.F., Rubinov A.M., Foundations of Nonsmooth Analysis and Quasidifferential Calculus, Moscow: Nauka (1990) (in Russian).
- [5] Demyanov V.F., "Exhausters of a positively homogeneous functions", *Optimization*, 45, No. 1, 13–29 (1999).
- [6] Rockafellar R. T., Convex analysis, Princeton: Princeton University Press (1970).
- [7] Uderzo A., "Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problems", In: Demyanov V.F. and Rubinov A.M. (eds.) Quasidifferentiability and Related Topics, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 297–327 (2000).
- [8] Gorokhovik V.V., Gorokhovik S.Ya., "A criterion of the global epi-Lipschitz property of sets", *Izvestiya Akademii Nauk Belarusi*, Ser. Fiziko-Matematicheskikh Nauk, No. 1, 118–120 (1995) (in Russian).
- [9] Pallaschke D., Rolewicz S., Foundations of Mathematical Optimization, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., (1997).

Characterization of Differences of Sublinear Functions on the Plane

Grzybowski J., Pallaschke D., Urbański R.

jgrz@amu.edu.pl, diethard.pallaschke@kit.edu, rich@amu.edu.pl Adam Mickiewicz University, Umultowska 87, Poznań, 61-614, Poland; University of Karlsruhe (KIT), Kaiserstr. 12, Karlsruhe, D-76128, Germany

We present necessary and sufficient conditions for a positively homogenous function defined on a plane to be a difference of sublinear (convex) functions. In a case of such a function we give the formula for producing two inclusion-minimal compact convex sets such that given function is equal to the difference of support functions of these sets. We also show several examples of application of our results.

Differences of sublinear functions or ds-functions are represented by pairs of closed bounded convex sets, called respectively sub- and superdifferential. Quasidifferential calculus, an important part of nonsmooth analysis, was developed by many authors, especially Demyanov and Rubinov [1, 2]. Minimal representation of quasidifferentials were studied by authors in, for example, [4, 5].

Minimal representation of ds-function as a difference of two support functions Let $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ be a positively homogenous (p.h.) function. Let $\varphi: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ be defined by $\varphi(t) = h(e^{it})$. Here we write $e^{it} = \cos t + i \sin t$ instead of $(\cos t, \sin t)$ for the sake of brevity. We identify the plane \mathbb{R}^2 with the plane of complex numbers \mathbb{C} whenever it is convenient.

We consider right derivative $\varphi'(t) = \lim_{s \to 0^+} \frac{\varphi(t+s) - \varphi(t)}{s}$. We assume that $\varphi'(2\pi) = \varphi'(0)$ so that the domain of φ' is the interval $[0, 2\pi]$. The existence of all directional derivatives of h is equivalent to the existence of right and left derivatives of φ . Namely,

$$h'(x;v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{h(x+tv) - h(x)}{t} = \frac{1}{\|x\|} (\langle v, x \rangle \varphi(\operatorname{Arg} x) + \langle v, ix \rangle \varphi'(\operatorname{Arg} x))$$

for $\langle v, ix \rangle > 0$, where $\langle v, x \rangle$ is the inner product of vectors $(v_1, v_2), (x_1, x_2)$ and $\langle v, ix \rangle$ is the inner product of vectors $(v_1, v_2), (-x_2, x_1)$. Our considerations are limited to the right derivative. Analogous results can be obtained for the left derivative.

Theorem 1. Let $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ be a positively homogenous (p.h.) function. Let $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ be defined by $\varphi(t) = h(e^{it})$. If the function h is continuous and the right derivative φ' of φ exists and has bounded variation then h is a difference of sublinear functions, namely $h = h_A - h_B$, where h_A and h_B are support functions of compact convex sets A and B described as follows. Let

$$f(t) = \int_0^t \varphi(s)ds + \varphi'(t) - \varphi'(0),$$

$$f^+(t) = \frac{1}{2}(V_0^t(f) + f(t) + f(0)), f^-(t) = f^+(t) - f(t),$$

where $V_0^t(f)$ is the variation of f on the interval [0,t]. Denote $b = \int_0^{2\pi} i e^{it} df^+(s)$. Let

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < \operatorname{Arg}(ib) \\ \|b\| & \operatorname{Arg}(ib) \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases},$$

$$F^{+}(t) = \int_{0}^{t} ie^{it}d(f^{+} + g)(s), F^{-}(t) = \int_{0}^{t} ie^{it}d(f^{-} + g)(s)$$

and

$$A = \varphi(0) + i\varphi'(0) + \overline{\operatorname{conv}}F^{+}([0, 2\pi]), B = \overline{\operatorname{conv}}F^{-}([0, 2\pi]).$$

Moreover, (h_A, h_B) is a minimal pair of sublinear functions such that $h = h_A - h_B$. If also (h_1, h_2) is such a minimal pair then $h_1 = h_A + l$, $h_2 = h_B + l$, where l is a linear functional.

Necessary and sufficient conditions for a difference of two sublinear functions

The idea of the following theorem is based on the notion of bounded convexity of functions of one variable [6].

Theorem 2. Let $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ be a positively homogenous (p.h.) function. Let $\varphi:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ be defined by $\varphi(t)=h(e^{it})$. The following statements are equivalent:

- (a) The function h is a difference of sublinear functions.
- The function h is continuous and the right derivative φ' of φ exists and is a function of bounded variation.

and is a function of bounded variation.

(c)
$$\sup_{P=\{0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=2\pi\}} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| < \infty.$$

(d)
$$\lim_{n \to \infty} n \sum_{i=1}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - 2\varphi(t_i) + \varphi(t_{i-1})| < \infty.$$

(d)
$$\lim_{n \to \infty} n \sum_{i=1}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - 2\varphi(t_i) + \varphi(t_{i-1})| < \infty.$$

Moreover, if any of these statements holds true, then $h = h_A - h_B$, where A and B are compact convex sets described above and (A, B) is an inclusionminimal, unique up to translation pair of sets such that $h = h_A - h_B$.

Examples

Max-min functions were first ds-functions studied in quasidifferential calculus [1, 2]. Our examples are not of this type. Several examples are rational functions.

Example 1. Let

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Using notations from Theorem 1 we obtain $\varphi(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$, $\varphi'(t) = \cos 2t$,

$$\int_{0}^{t} \varphi(s)ds = -\frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}, \ f(t) = \frac{3}{4}\cos 2t - \frac{3}{4},$$

$$f^{+}(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{4} & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \frac{3}{2} & t \in (\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{9}{4} & t \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}, f^{-}(t) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos 2t & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{3}{2} & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \frac{9}{4} - \frac{3}{4}\cos 2t & t \in (\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ 3 & t \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}.$$

The image or trajectory of the function $F(t)=\int_0^t ie^{is}df(s)=\int_0^t ie^{is}d(\frac{3}{4}\cos 2s-1)ds$ $\frac{3}{4})=(\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t,\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t-1)=\frac{3}{4}ie^{-it}+\frac{1}{4}ie^{3it}-i$ is an astroid. Trajectories of the functions $F^+(t)$ and $F^-(t)$ produce boundaries, respectively, of the sets A and B.

Example 2. Let $h(x,y)=\inf_{n\in\mathbb{N}}|y\cos\frac{\pi}{n}-x\sin\frac{\pi}{n}|$. The function h is positively homogenous, piecewise linear and nonnegative. We have $\varphi(t)=\inf_{n\in\mathbb{N}}|\sin(t-\frac{\pi}{n})|$. For all $t\in[0,2\pi)$ the right derivative $\varphi'(t)$ exists and belongs to [-1,1]. The function φ is continous and Lipschitzian with a constant 1. Also the function h is continous and Lipschitzian with a constant 1. For all $n\geqslant 2$, we have $\varphi'(\frac{\pi}{n})=1$. Moreover for each $\geqslant 2$ the function φ' is negative in some left neighborhood of $\frac{\pi}{n}$. Hence the variation of φ' is infinite. By Theorem 2 the function h is not a difference of sublinear functions. In [3] Gorokhovik and Trafimovich gave another similar function with more complicated definition.

Example 3. For $t \in \left[\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n-1}\right], n \geqslant 2$ let us define

$$\varphi(t) = \min(\frac{1}{n^2}\sin(t - \frac{\pi}{n}), \frac{1}{(n-1)^2}\sin(\frac{\pi}{n-1} - t)).$$

Let us put $\varphi(t) = \varphi(t - \pi)$ for $t > \pi$ and $\varphi(0) = 0$. We define

$$h(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \varphi(\text{Arg}(x+iy)) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Again the function h is positively homogenous, piecewise linear and nonnegative. Moreover, the right derivative $\varphi'(t)$ exists and belongs to the interval [-1,1]. We can calculate that the variation of φ' is finite and equal to

$$8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 4 = 8\frac{\pi^2}{6} - 4 \approx 9,1594725.$$

By Theorem 2 the function h is a difference of sublinear functions.

References

- [1] V. F. Demyanov and A. M. Rubinov, *Quasidifferential Calculus*, Optimization Software Inc., Springer-Verlag, New York, (1986).
- [2] V. F. Demyanov and A. M. Rubinov, Quasidifferentiability and Related Topics, Nonconvex Optimization and Its Applications, vol. 43, Kluwer, Dordrecht, (2000).
- [3] V. V. Gorokhovik and M. Trafimovich, "Positively homogeneous functions revisited", J. Optimization Theory and Applications, 171, No. 2, 481–503 (2016).
- [4] J. Grzybowski, D. Pallaschke and R. Urbański, "Minimal pairs of bounded closed convex sets as minimal representations of elements of the Minkowski-Rådström-Hörmander spaces", *Banach Center Publications*, 84 No. 1, 31–55 (2009).
- [5] D. Pallaschke and R. Urbański, *Pairs of Compact Convex Sets. Fractional Arithmetic with Convex Sets*, Math. Appl. **548**, Kluwer, Dortrecht–Boston–London, (2002).

24 Ivanov G.

[6] A. W. Roberts and D. E. Varberg, "Functions of bounded convexity", Bull. Amer. Math. Soc., 75, 568–572 (1969).

Well-posedness and Subdifferential Calculus of Optimal Value and Infimal Convolution

Ivanov G.

g.e.ivanov@mail.ru

Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, Moscow region, 141700, Russia

In the present paper we continue research started in [1] and [2]. Let X and P be Banach spaces and $h: X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be a lower semicontinuous function. Consider the problem

$$\mathcal{P}_h$$
: to minimize $h(x,p)$ over $x \in X$

with parameter $p \in P$. The optimal value of \mathcal{P}_h at $p \in P$ is $h_{\inf}(p) = \inf_{x \in X} h(x,p)$ and $x \in X$ is called a solution of \mathcal{P}_h at $p \in P$ if $h(x,p) = h_{\inf}(p) \in \mathbb{R}$. A sequence $\{x_k\} \subset X$ is called minimizing for \mathcal{P}_h at $p \in P$ if $\lim_{h \to \infty} h(x_k, p) = h_{\inf}(p)$.

 $\lim_{k\to\infty} h(x_k,p) = h_{\inf}(p).$ Let \mathcal{P}_h admits at $p_0 \in P$ a unique solution x_0 . Define the function $\Delta_{h,p_0}: P \to [0,+\infty)$ as

$$\Delta_{h,p_0}(p) = \inf_{\{x_k\} \text{ is minimizing sequence for } \mathcal{P}_h \text{ at } p} \quad \liminf_{k \to \infty} \|x_k - x_0\|, \qquad p \in P_h$$

The problem \mathcal{P}_h is called approximately well-posed (AWP) at $p_0 \in P$ if it admits a unique solution at p_0 , $h_{\inf}(p)$ is finite for p in some neighborhood of p_0 and

$$\lim_{p \to p_0} \Delta_{h, p_0}(p) = 0.$$

If, in addition, there exists a constant L > 0 such that $\Delta_{h,p_0}(p) \leq L \|p - p_0\|$ for all p in some neighborhood of p_0 , then the problem \mathcal{P}_h is called Lipschitz approximately well-posed (LAWP) at p_0 with constant L.

We elaborate some subdifferential calculus of the optimal value (marginal) function $h_{\text{inf}}(\cdot)$ provided that \mathcal{P}_h is AWP or LAWP. Then we state some sufficient conditions for \mathcal{P}_h to be AWP and LAWP.

Given a function $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ and $\varepsilon \geqslant 0$, the Fréchet ε -subdifferential of f at $x_0 \in \text{dom } f := \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\}$ is

$$\partial^{F,\varepsilon} f(x_0) = \{ x^* \in X^* : \ \forall \eta > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in B_{\delta}(x_0) \\ \langle x^*, x - x_0 \rangle \leqslant f(x) - f(x_0) + (\varepsilon + \eta) \|x - x_0\| \},$$

Ivanov G. 25

where $B_{\delta}(x_0) = \{x \in X : ||x - x_0|| < \delta\}$. If $\varepsilon = 0$, then $\partial^F f := \partial^{F,\varepsilon} f$ is called the Fréchet subdifferential.

The Mordukhovich limiting subdifferential $\partial^L f(x_0)$ at $x_0 \in \text{dom } f$ is the set of $x^* \in X^*$ such that there exist $\varepsilon_k \downarrow 0$, $x_k \to x_0$ with $f(x_k) \to f(x_0)$, and $x_k^* \to x^*$ weakly star and $x_k^* \in \partial^{F,\varepsilon_k} f(x_k)$ for all $k \in \mathbb{N}$.

We use $\partial^{F,\varepsilon}h(x,p)$ and $\partial^L h(x,p)$ to denote correspondingly the Fréchet ε -subdifferential, and the limiting subdifferential of h at $(x,p) \in \text{dom } h$ with respect to the norm $\|(x,p)\| = \|x\| + \|p\|$ in $X \times P$. We denote by $\partial_x^{F,\varepsilon}h(x,p)$ the Fréchet ε -subdifferential of the function $h(\cdot,p)$ at the point x. We shall use $\partial_x^L h(x,p)$ to denote the set of $x^* \in X^*$ such that there exist $\varepsilon_k \downarrow 0$, $(x_k,p_k) \to (x_0,p_0)$ with $h(x_k,p_k) \to h(x,p)$, and $x_k^* \to x^*$ weakly star and $x_k^* \in \partial_x^{F,\varepsilon_k}h(x_k,p_k)$ for all $k \in \mathbb{N}$. Similarly we define $\partial_p^{F,\varepsilon}h(x,p)$ and $\partial_v^L h(x,p)$.

A function $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is called *lower regular* at a point $x \in \text{dom } f$ (see [4]) whenever $\partial^L f(x) = \partial^F f(x)$.

Theorem 1. Let $x_0 \in X$ be a solution of \mathcal{P}_h at $p_0 \in P$. Then for all $\varepsilon \geqslant 0$

$$\{0\} \times \partial^{F,\varepsilon} h_{\inf}(p_0) \subset \partial^{F,\varepsilon} h(x_0,p_0) \subset \partial_x^{F,\varepsilon} h(x_0,p_0) \times \partial_p^{F,\varepsilon} h(x_0,p_0).$$

If, in addition, \mathcal{P}_h is AWP at p_0 , then

$$\{0\} \times \partial^L h_{\text{inf}}(p_0) \subset \partial^L h(x_0, p_0) \subset \partial^L_x h(x_0, p_0) \times \partial^L_p h(x_0, p_0).$$

Theorem 1 correlates with results of Thibault [7, Proposition 3.1] and those of Ngai, Luc and Théra [8, Theorem 2.5].

We say that the function $h: X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfies mixed second-order condition (MSOC) at $(x_0, p_0) \in X \times P$ if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$h(x_1, p_2) + h(x_2, p_1) \le h(x_1, p_1) + h(x_2, p_2) + \varepsilon ||p_1 - p_2||$$
 $\forall x_1, x_2 \in B_{\delta}(x_0),$ $\forall p_1, p_2 \in B_{\delta}(p_0)$

with usual convention $+\infty + C = C + (+\infty) = +\infty$ for all $C \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

The following lemma gives a sufficient condition for function h to satisfy MSOC.

Lemma 1. Assume that $h_0: X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is continuously differentiable at some neighborhood of $(x_0, p_0) \in \text{dom } h_0$. Let $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ and $g: P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be arbitrary functions such that $x_0 \in \text{dom } f$, $p_0 \in \text{dom } g$. Then the function

$$h(x,p) = h_0(x,p) + f(x) + g(p), \qquad x \in X, \quad p \in P$$

satisfies MSOC at (x_0, p_0) .

26 Ivanov G.

Theorem 2. Assume that $x_0 \in X$ is the solution of \mathcal{P}_h at p_0 , the problem \mathcal{P}_h is AWP at $p_0 \in P$ and h satisfies MSOC at (x_0, p_0) . Then

$$\partial_p^{F,\varepsilon} h(x_0, p_0) = \partial^{F,\varepsilon} h_{\inf}(p_0) \qquad \forall \varepsilon \geqslant 0,$$

$$\partial_p^L h(x_0, p_0) = \partial^L h_{\text{inf}}(p_0).$$

If, in addition, h is lower regular at (x_0, p_0) (or at least $\partial_p^L h(x_0, p_0) = \partial_p^F h(x_0, p_0)$), then $h_{\inf}(\cdot)$ is lower regular at p_0 .

Given a function $\alpha:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, a function $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ is called $\alpha(\cdot)$ -midconvex if

$$f(x_1) + f(x_2) \ge 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 2\alpha(\|x_1 - x_2\|) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

In case $\alpha(t) > 0$ for all t > 0 the class of $\alpha(\cdot)$ -midconvex functions is akin to the class of uniformly convex functions introduced by Levitin and Polyak [3]. In case $\alpha(t) < 0$ for all t > 0 the notion of $\alpha(\cdot)$ -midconvexity is a slight modification of $\alpha(\cdot)$ -paraconvexity due to Rolewicz [6].

The next two theorems provide sufficient conditions for \mathcal{P}_h to be AWP and LAWP.

Theorem 3. Let $x_0 \in X$, $p_0 \in P$ and $\lambda > 0$, $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$ be such that for all p in some neighborhood of p_0 and for all $x \in X$

$$h(x, p) \ge h(x_0, p_0) + \lambda ||x - x_0|| - \mu ||p - p_0||,$$

$$h(x_0, p) \le h(x_0, p_0) + \gamma ||p - p_0||.$$

Then \mathcal{P}_h admits a unique solution x_0 at p_0 and \mathcal{P}_h is LAWP at p_0 with constant $L = \frac{\mu + \gamma}{\lambda}$.

Theorem 4. (i) Let $p_0 \in P$ and the function $h(\cdot, p_0)$ be $\alpha(\cdot)$ -midconvex with $\alpha(t) > 0$ for all t > 0. Let $h(x, \cdot)$ be continuous at p_0 uniformly with respect to $x \in X$, that is

$$\lim_{p \to p_0} \sup_{x \in X} |h(x, p) - h(x, p_0)| = 0.$$

Then \mathcal{P}_h is AWP at p_0 .

(ii) Let $p_0 \in P$ and the function $h(\cdot, p_0)$ be $\alpha(\cdot)$ -midconvex with $\alpha(t) = \alpha_0 t^2$ for all t > 0 and some $\alpha_0 > 0$. Let there is a constant C > 0 such that for all p in some neighborhood of p_0 and for all $x \in X$

$$h(x_0, p) + h(x, p_0) \le h(x, p) + h(x_0, p_0) + C||x - x_0|| \cdot ||p - p_0||.$$

Then \mathcal{P}_h is LAWP at p_0 .

Ivanov G 27

The rest of the paper is devoted to the infimal convolution problem.

The Moreau-type infinal convolution of two functions $f, g: X \to \mathbb{R} \cup$ $\{+\infty\}$ is

$$(f \boxplus g)(p) = \inf_{x \in X} \Big(f(x) + g(p - x) \Big), \qquad p \in X.$$

The infimal convolution problem $\mathcal{P}_{f,g}$ at a point $p \in X$ is the problem \mathcal{P}_h

$$h(x, p) = f(x) + g(p - x), \qquad x, p \in X.$$

From now on we assume that functions f and g are lower semicontinuous, that guarantees lower semicontinuity of h(x, p) = f(x) + g(p - x).

Theorem 5. Let $x_0 \in X$ be a solution of $\mathcal{P}_{f,g}$ at $p_0 \in X$. Then for all $\varepsilon \geqslant 0$

$$\partial^{F,\varepsilon}(f \boxplus g)(p_0) \subset (\partial^{F,\varepsilon}f(x)) \cap (\partial^{F,\varepsilon}g(p_0-x_0)).$$

If, in addition, $\mathcal{P}_{f,g}$ is AWP at p_0 , then

$$\partial^L(f \boxplus g)(p_0) \subset (\partial^L f(x_0)) \cap (\partial^L g(p_0 - x_0)).$$

If, in addition, f is continuously differentiable in some neighborhood of x_0 or g is continuously differentiable in some neighborhood of $(p_0 - x_0)$, then the latter two inclusions are equalities.

Theorem 6. Suppose that $x_0 \in X$ is the solution of $\mathcal{P}_{f,g}$ at $p_0 \in X$ and the problem $\mathcal{P}_{f,g}$ is LAWP at p_0 with constant L. Then for all $\varepsilon \geqslant 0$

$$\Big(\partial^{F,\varepsilon}f(x_0)\Big)\bigcap\Big(\partial^{F,\varepsilon}g(p_0-x_0)\Big)\subset\partial^{F,(2L+1)\varepsilon}(f\boxplus g)(p_0).$$

If, in addition, f and g are lower regular at points x_0 and $(p_0 - x_0)$ correspondingly, then $f \boxplus g$ is lower regular at p_0 .

Theorem 7. Suppose that $x_0, z_0 \in X$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta > 0$, $f: X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ and $g: X \to \mathbb{R}$ are such that for all $x, z \in X$

$$f(x) - f(x_0) \ge \alpha ||x - x_0||,$$
 (1)

$$g(z) - g(z_0) \geqslant \beta ||z - z_0||,$$
 (2)

$$g(z) - g(z_0) \le \gamma ||z - z_0||.$$
 (3)

Then $\mathcal{P}_{f,g}$ admits a unique solution x_0 at $p_0 = x_0 + z_0$ and $\mathcal{P}_{f,g}$ is LAWP at p_0 with constant $L = \frac{|\beta| + \gamma}{\alpha + \beta}$.

If, in addition, f and g are lower regular at points x_0 and z_0

correspondingly, then $f \boxplus g$ is lower regular at p_0 .

Theorem 8. Let the function f be $\alpha_f(\cdot)$ -midconvex and the function g be $\alpha_g(\cdot)$ -midconvex with $\alpha_f(t) + \alpha_g(t) > 0$ for all t > 0 and $\liminf_{t \to +\infty} (\alpha_f(t) + \alpha_g(t)) > 0$. Let f or g be uniformly continuous. Then $\mathcal{P}_{f,g}$ is AWP at any $p_0 \in X$.

Theorems 5-7 improve Theorem 5.5 in [5], Theorems 3.1, 3.2 in [1] and Theorems 3.1, 4.2 in [2].

Acknowledgement. The investigation was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 16-01-00259-a.

References

- [1] G.E. Ivanov, L. Thibault, "Infimal convolution and optimal time control problem I: Fréchet and proximal subdifferentials", Set-Valued and Variational Analysis, doi:10.1007/s11228-016-0398-z (2017).
- [2] G.E. Ivanov and L. Thibault, "Infimal convolution and optimal time control problem II: Limiting subdifferential", Set-Valued Var. Anal, to be published (2017).
- [3] E. S. Levitin, B. T. Polyak, "Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems", Sov. Math. Dokl. 7, 764-767 (1966).
- [4] B. S. Mordukhovich, Approximation Methods in Problems of Optimization and Control, John Wiley & Sons, New York (2005).
- [5] N.M. Nam and D.V. Cuong, "Generalized differentiation and characterizations for differentiability of infimal convolutions", Set-Valued and Variational Analysis, 23, 333-353 (2015).
- [6] S. Rolewicz, "Paraconvex analysis", Control Cybernet., 34, 951-965 (2005).
- [7] L. Thibault, "On subdifferentials of optimal value functions", SIAM J. Control Optim., 29, No. 5, 1019-1036 (1991).
- [8] H. Van Ngai, D. The Luc, M. Théra, "Extensions of Fréchet e-subdifferential calculus and applications", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 268, No. 1, 266-290 (2002).

Weakly Convex Sets in Asymmetric Normed Spaces *Lopushanski M.*

Moscow Institute of Physics and Technology, Institutski str. 9, Dolgoprudny, Moscow region, Russia 141700

Weakly convex sets are often considered in literature under different names – sets with positive reach in \mathbb{R}^n ([1]), proximally smooth sets ([2]), prox-regular sets ([3], [4]). The term "weakly convex sets" was introduced by Vial [5]. The motivation for studying weakly convex sets is that the class of weakly convex sets is much wider than the class of convex sets, but shares many useful properties with the latter. The weakly convex sets may be used,

for example, in differential inclusions (see, e.g. [6]), in the gradient projection method ([7]), in differential games ([8]), set valued mappings theory ([9]).

We consider weakly convex sets with respect to (w.r.t.) a quasiball in a Banach space. A quasiball is a convex closed (may be unbounded) set that contains a neighbourhood of zero. Such an approach allows us to apply the methods of proximal analysis to the epigraphs of functions and to obtain the conditions of well-posedness for optimization problems of the infimal convolution type (see [10], [11], [12], [8]).

A quasiball in a Banach space E is a convex closed set $M \subset E$ such that $0 \in \text{int } M \text{ and } M \neq E.$

The Minkowski functional $\mu_M(x) = \inf\{t > 0 | x \in tM\}$ of the quasiball is the asymmetric seminorm.

The *M*-distance from a set *C* to a set *A* is $\varrho_M(C,A) = \inf_{c \in C, \ a \in A} \mu_M(c-a)$.

The *M*-projection of x onto A is the set $P_M(x, A) = A \cap (x - \varrho_M(x, A)M)$. The Minskowski sum of sets $A \subset E$ and $B \subset E$ is A + B = $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}.$

The ball with center a and radius r is $\mathfrak{B}_r(a) = \{x \in E : ||x - a|| \leq r\}$.

The set $C \subset E$ is called strongly convex w.r.t. a quasiball $M \subset E$ if C is convex, closed and there exists a set $C_1 \subset E$ such that $C + C_1 = M$.

A set $A \subset E$ is called *weakly convex* with respect to the quasiball $M \subset E$ if

$$a \in P_M(a+z, A), \quad \forall a \in A, \quad \forall z \in N_M^1(a, A),$$

where $N_M^1(a,A) = \{z \in \partial M \mid \exists t > 0 : a \in P_M(a+tz,A)\}.$ A set $M \subset E$ is called *parabolic*, if for any vector $b \in E$ the set $(b + \frac{1}{2}M) \setminus A$ M is bounded.

A set $M \subset E$ is called boundedly uniformly convex, if it is convex and $\lim_{t\to +0} \delta_M(t,R) = 0$ for any R > 0, where $\delta_M(t,R) =$

$$\sup \left\{ \|a - b\| \mid a, b \in M \cap \mathfrak{B}_R(0), \inf_{x \in \partial M} \left\| \frac{a + b}{2} - x \right\| < t \right\}, \quad t \geqslant 0.$$

The problem $\min_{x \in E} f(x)$ is called well posed, if every sequence $\{x_k\} \subset E$ such that

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \inf_{x \in E} f(x).$$

converges to the solution of this problem.

In [10] we proved the well-posedness of the nearest points problem of two sets, one of which is weakly convex w.r.t. the quasiball M, and the other one is strongly convex w.r.t. -rM.

Theorem 1. Let the quasiball M in a Banach space E be parabolic and boundedly uniformly convex. Let the set $A \subset E$ be closed and weakly convex

w.r.t. the quasiball M. Let the set $C \subset E$ be strongly convex w.r.t. the quasiball -rM, where 0 < r < 1. Let $0 < \varrho_M(C,A) < 1-r$. Then the problem $\min_{a \in A, c \in C} \mu_M(c-a)$ is well posed.

A set A is called M-quasibounded, if for any point $x \in E \setminus A$ we have $\varrho_M(x,A) > 0$ and for any R > 0 the inequality

$$\sup_{a\in\partial A\cap\mathfrak{B}_R(0)}\ \sup_{z\in N^1_M(a,A)}\|z\|<+\infty$$

holds.

Theorem 2. Let the quasiball M in a Banach space E be parabolic and boundedly uniformly convex. Let the set $A \subset E$ be M-quasibounded and weakly convex w.r.t. M. Let the set $C \subset E$ be strongly convex w.r.t. the quasiball -rM, where $r \in (0,1)$ and int $C \neq \varnothing$. Let $\varrho_M(C,A) < 1-r$, $A \cap C = \varnothing$. Then the problem $\min_{a \in A, c \in C} \mu_M(c-a)$ is well posed.

The Hahn–Banach theorem on the separation of two convex disjoint sets with a hyperplane is well-known in functional analysis. The duality theory, based on this theorem, has many applications in optimization and other branches of mathematics. It is easy to see that two non-convex disjoint sets in a general case can't be separated by a hyperplane. But, under some additional assumption, we may separate a weakly convex from strongly convex w.r.t. a quasiball M, using its boundary [14].

The quasiball $M \subset E$ is called boundedly uniformly smooth, if

$$\lim_{t \to +0} \frac{\beta_M(t, R)}{t} = 0 \qquad \forall R > \sigma_M, \tag{1}$$

where σ_M is such that $\mathfrak{B}_{\sigma_M}(0) \subset M$ and for any $t \geq 0$ and $R > \sigma_M$

$$\beta_M(t,R) = \sup \left\{ \frac{\mu_M(x+ty) + \mu_M(x-ty)}{2} - 1 : x \in \partial M \cap \mathfrak{B}_R, y \in \mathfrak{B}_1 \right\}.$$
(2)

Theorem 3. Let E be a Banach space and the quasiball $M \subset E$ be parabolic and boundedly uniformly convex. Let 0 < r < R, the sets $A, C \subset E$ be closed, A be weakly convex with respect to the set RM, C be strongly convex with respect to the set (-rM), A + R int $M \neq E$. Let at least one of the following statements hold

- 1) $\varrho_M(C,A) > 0$ or
- 2) int $C \neq \emptyset$, $A \cap$ int $C = \emptyset$ and the quasiball M is boundedly uniformly smooth, the set A is M-quasibounded.

Then there exist $a,c\in E$ such that int $C\subset c-$ int $rM\subset a-$ int $RM\subset E\setminus A.$

Further we studied the normal regularity of weakly convex sets w.r.t. a quasiball M [15]. The applications of regularity of sets in Hilbert spaces may be found in [6]. In a Banach space the normal regularity may be used, for example, to prove the necessary conditions for the existence of the linearly suboptimal solution of multiobjective problems [16].

The Fréchet normal cone to the set A at $x \in A$ is

$$N^F(x,A) =$$

$$= \{ \xi \in E^* | \forall \gamma > 0 \quad \exists \delta > 0 : \langle \xi, a - x \rangle \leqslant \gamma \| a - x \| \forall a \in \mathfrak{B}_{\delta}(x) \cap A \}.$$

The support function of the set $M \subset E$ is

$$s(p, M) = \sup_{x \in M} \langle p, x \rangle, \quad p \in E^*.$$

Given a functional $p \in E^*$, if $p \in b(M) \setminus \{0\}$ we define

$$J_M^*(p) = \{ x \in E : \langle p, x \rangle = s(p, M) \mu_M(x), \quad s(p, M) = \mu_M(x) \},$$

otherwise we put $J_M^*(p) = \{0\}.$

The proximal M-normal cone to the set A at a point $a \in \partial A$ is

$$N_M^P(a, A) = \{ p \in b(M) | \exists z \in J_M^*(p), \exists t > 0 : a \in P_M(a + tz, A) \}.$$

The Mordukhovich limiting cone is

$$N_M^L(x,A) = {^{w^*-seq}} \limsup_{y \to x} N_M^P(y,A) =$$

$$= \{ w^* - \lim_{n \to \infty} x_n^* : \quad x_n^* \in N_M^P(x_n, A), x_n \in A, x_n \to x, n \to \infty \},$$

where w^* – \lim means the limit with respect to weak* topology.

Theorem 4. Let E be a reflexive Banach space. Let the quasiball M be boundedly uniformly smooth, boundedly uniformly convex and parabolic. Let the set $A \subset E$ be M-quasibounded and weakly convex w.r.t. M. Then

$$N^F(x,A) = N_M^P(x,A) = N_M^L(x,A), \quad \forall x \in A.$$

The results were obtained under the supervision of professor G.E. Ivanov. The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 16-01-00259.

References

[1] H. Federer, "Curvature measures", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93, 418–491 (1959) .

 F. H. Clarke , R. J. Stern, P. R. Wolenski, "Proximal Smoothness and Lower-C² Property", J. Convex Analisys, 2, No. 1,2, 117–144 (1995).

- [3] R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar, "Prox-regular functions in variational analysis", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348 1805–1838 (1996).
- [4] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, "Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces", J. Convex Analysis, 13, 525–559 (2006).
- [5] J.-P. Vial, "Strong and weak convexity of sets and functions", *Math. Ops. Res.*, 8, No. 2, 231–259 (1983).
- [6] L. Thibault, "Sweeping process with regular and nonregular sets", *J. Differential Equations*, 193, 1–26 (2003).
- [7] M. V. Balashov, "About the Gradient Projection Algorithm for a Strongly Convex Function and a Proximally Smooth Set", *J. of Convex Analysis*, 24, No. 2, n.a. (2017).
- [8] G.E. Ivanov, Weakly Convex Sets and Their Properties, Mathematical Notes, 79, No. 1 (2006) 55–78.
- [9] M. V. Balashov, G. E. Ivanov, Properties of the metric projection on weakly Vial-convex sets and parametrization of set-valued mappings with weakly convex images, *Mathematical Notes*, 80, No. 3, 461–467 (2006).
- [10] G. E. Ivanov, M. S. Lopushanski, "Well-Posedness of Approximation and Optimization Problems for Weakly Convex Sets and Functions", J. Mathematical Sciences, 209, No. 1, 66–87 (2015).
- [11] G. E. Ivanov "Continuity and selections of the intersection operator applied to nonconvex sets", J. Convex Analysis, 22, No. 4, 932–962 (2015).
- [12] G. E. Ivanov "Weak Convexity of Sets and Functions in a Banach Space", J. Convex Analysis, 22, No. 2, 365–398 (2015).
- [13] G. E. Ivanov "Weak Convexity of Functions and the Infimal Convolution" // J. of Convex Analysis, 23, 719–732 (2016).
- [14] G. E. Ivanov, M. S. Lopushanski, "Separation theorems for nonconvex sets in spaces with non-symmetric seminorm", *J. Math. Ineq. and Applications*, accepted in 2016.
- [15] M. S. Lopushanski, "Normal Regularity of Weakly Convex Sets in Asymmetric Normed Spaces", J. of Convex Analysis, accepted in 2017.
- [16] B.S. Mordukhovich, Variational Analysis and Generalized Differentiation II. Applications, Springer, Berlin (2006).

Mordukhovich B. 33

Critical Multipliers in Variational Systems via Second-Order Generalized Differentiation

Mordukhovich B.

boris@math.wayne.edu

Wayne State University, Detroit, MI 48202, USA

We introduce the notions of critical and noncritical multipliers for subdifferential variational systems extending to a general framework the corresponding notions by Izmailov and Solodov developed for classical KKT systems. It has been well recognized that critical multipliers are largely responsible for slow convergence of major primal-dual algorithms of optimization. The approach of this paper allows us to cover KKT systems arising in various classes of smooth and nonsmooth problems of constrained optimization including composite optimization, minimax problems, etc. Concentrating on a polyhedral subdifferential case and employing recent results of second-order subdifferential theory, we obtain complete characterizations of critical and noncritical multipliers via the problem data. It is shown that noncriticality is equivalent to a certain error bound for a perturbed variational system and that critical multipliers can be ruled out by full stability of local minimizers in problems of composite optimization. For the latter class we establish the equivalence between noncriticality of multipliers and robust isolated calmness of the associated solution map and then derive explicit characterizations of these notions via appropriate second-order sufficient conditions. It is finally proved that the Lipschitz-like/Aubin property of solution maps yields their robust isolated calmness.Based on joint work with Ebrahim Sarabi (Miami University, USA)

Calculation of Subdifferentials for the Difference of Two Convex Functions

Polovinkin E.

polovinkin.es@mipt.ru

Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutsky per., 9, Dolgoprudny, 141700, Russia

In the study of non-smooth continuous functions $f: X \to \mathbb{R}^1$ at a local minimum at some point $x_0 \in X$ the necessary extremum condition takes the form of inclusion $0 \in \partial_C f(x_0)$, where $\partial_C f(x_0)$ is the Clarke subdifferential ([1, 2]). In more complicated problems of mathematical control theory sometimes it is necessary to calculate subdifferentials of Clarke's type [2, 3, 4]. However, the calculation of these subdifferentials for non-smooth and non-convex function is not a very simple task. In this paper we obtain fairly simple formulas for calculation of various directional derivatives, and

34 Polovinkin E.

consequently subdifferentials, including Clarke subdifferential for nonsmooth functions which can be represented as the difference of two locally Lipschitz continuous convex functions.

Note that the differential calculus for functions, which include the class of functions under study, were created by V. F. Demyanov and A. M. Rubinov [5]. They introduced the concept of the quasidifferential of the function, which can be represented as a pair of convex compact sets, the first of which is the subdifferential (in the sense of convex analysis) of the first convex function, and the second is the hypodifferential of the second concave function. However, we need to calculate Clarke subdifferential for the difference of convex functions.

Let X be real Banach spaces. We denote by $B_r(x_0)$ the open ball of the radius r > 0 with the centre x_0 in the space X. As usual, the classical directional derivative of a function $f: X \to \mathbb{R}^1$ at the point x_0 in the direction $u \in X$ is defined by the following expression

$$f'(x_0, u) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} (f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)).$$

Also let us consider following definitions of derivatives of locally Lipschitz continuous function $f\colon X\to \overline{\mathbb{R}^1}$ at the point x_0 in the direction $u\in X$, where "U" means upper [4, 5, 6], "L" - lower [4, 5, 7], "C" - Clarke [1, 2, 4], "AL" - asymptotic lower [4, 7], "MP" - Michel - Penot [8, 4].

Definition 1. The M - derivatives (where $M \in \{U, L, C, AL, MP\}$) of a function f at the point $x_0 \in \text{dom } f$ in the direction $u \in X$ are defined as follows

$$D_U^+ f(x_0)(u) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} (f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)), \tag{1}$$

$$D_L^+ f(x_0)(u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} (f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)), \tag{2}$$

$$D_C^+f(x_0)(u) = \limsup_{\substack{\lambda, x:\\ \lambda \downarrow 0, x \to x_0}} \lambda^{-1}(f(x+\lambda u) - f(x)), \tag{3}$$

$$D_{AL}^{+}f(x_0)(u) = \sup_{w \in X} (D_L^{+}f(x_0)(u+w) - D_L^{+}f(x_0)(w)), \tag{4}$$

$$D_{MP}^{+}f(x_0)(u) \doteq \sup_{w \in X} \{ \limsup_{\lambda \downarrow 0} (\lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda(u + w)) - f(x_0 + \lambda w))) \}.$$
 (5)

Definition 2. The M- subdifferential of a function $f: X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ at the point $x_0 \in \text{dom } f$ (for any $M \in \{C, MP, AL\}$) is the subset of the dual space X^* defined by the formula

$$\partial_M^+ f(x_0) \doteq \{ p \in X^* \mid \langle p, x \rangle \leqslant D_M^+ f(x_0)(x) \quad \forall x \in X \}$$

Polovinkin E. 35

Lemma 1. Let $f: X \to \mathbb{R}^1$ be a locally Lipschitz continuous at the point $x_0 \in \text{dom } f$ function. Suppose that for all vectors $u \in X$ there exist finite classical directional derivatives at the point x_0 , that is

$$f'(x_0, u) = D_L^+ f(x_0)(u) = D_U^+ f(x_0)(u), \quad \forall u \in X.$$

Then the M- derivatives D_M^+ $f(x_0)(u)$ for $M \in \{MP, AL\}$ coincide for all $u \in X$, and the following formula holds

$$D_M^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X} (f'(x_0, u + w) - f'(x_0, w)).$$
 (6)

Theorem 1. Let $f: B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ be a function such that there exist two continuous convex functions $f_1, f_2: B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ that $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ for all $x \in B_r(x_0)$ and for which, for some $u \in X$, one of the functions $f_k, k \in \overline{1,2}$, satisfies the following condition $f'_k(x_0, u) + f'_k(x_0, -u) = 0$ (for example this function is Gateaux differentiable at the point x_0). Then, for such $u \in X$ and for any $M \in \{C, MP, AL\}$, the M- derivatives $D_M^+ f(x_0)(u)$ coincide and the following formula is true

$$D_M^+ f(x_0)(u) = f_1'(x_0, u) + f_2'(x_0, -u). \tag{7}$$

Definition 3. For a continuous function $f: B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, which has finite classical directional derivatives at the point $x_0 \in X$, we define functions g and φ by formulas

$$g(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0, x - x_0), \quad \varphi(x) \doteq f(x) - g(x),$$
 (8)

that is the function f in the neighborhood $B_r(x_0)$ of the point x_0 is represented as a sum of its quasilinear part g and a remainder φ . It is obvious that the functions g and φ at the point x_0 have classical directional derivatives, and besides

$$q'(x_0, u) = f'(x_0, u), \quad \varphi'(x_0, u) = 0 \quad \forall u \in X.$$

hence for all $u \in X$ the following inequlities hold

$$D_C^+f(x_0)(u) \geqslant D_{AL}^+f(x_0)(u) = D_{AL}^+g(x_0)(u) = D_C^+g(x_0)(u) \geqslant f'(x_0, u),$$

$$D_{MP}^+\varphi(x_0)(u) = 0,$$

from which, in particular, the inequality follows $0 \leq D_C^+ \varphi(x_0)(u)$ for all $u \in X$, which is equivalent to the inclusion $0 \in \partial_C^+ \varphi(x_0)$.

Definition 4. A continuous function $f: B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ is called semiregular at the point $x_0 \in X$, if it has finite classical directional derivatives

36 Polovinkin E.

along any vector at the point x_0 , corresponding function φ defined by (8) is Lipschitz continuous in some neighborhood of the point x_0 and the equality is true $\partial_C^+\varphi(x_0) = \{0\}$, that is $D_C^+\varphi(x_0)(u) = 0$ for all $u \in X$.

Here are some classes of semiregular functions.

- 1) Any positively homogeneous Lipschitz continuous function is semiregular at the point $0 \in X$, as $\varphi(u) = 0$.
- 2) A function which has finite directional derivatives along any vector at the point x_0 , and for which corresponding function φ from (8) is convex and bounded in some neighborhood of the point x_0 , is semiregular.
- 3) A convex function f is semiregular at the point x_0 , if the equalities holds $f'(x_0, u) + f'(x_0, -u) = 0$ for all $u \in X$. In particular, every convex Gateaux differentiable at the point x_0 function f is semiregular at this point.
- 4) For non-convex function $f: X \to \mathbb{R}^1$ to be semiregular at the point x_0 it is sufficient that it is strictly differentiable at the point $x_0 \in X$.

At the same time non-convex differentiable function can be not semiregular. For example, function $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ of the form $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ for $x \neq 0$ and f(0) = 0 is differentiable, but it is not semiregular at zero. Here f'(0, u) = 0, $\varphi(x) = f(x)$ and $D_C^+ \varphi(0)(u) = |u|$ for all $u \in \mathbb{R}^1$.

Also we show that not every Lipschitz continuous function, which is regular by Clarke at some point, is semiregular at this point.

Theorem 2. Let $f: B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ be a semiregular at the point x_0 function. Then all M- derivatives of the function f coincide, that is $\forall M \in \{C, MP, AL\}$

$$D_M^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X} (f'(x_0, u + w) - f'(x_0, w)), \quad \forall u \in X,$$

which is equivalent to coincidence of all subdifferentials $\partial_C^+ f(x_0) = \partial_{MP}^+ f(x_0) = \partial_{AL}^+ f(x_0)$.

Theorem 3. Let a function $f: X \to \mathbb{R}^1$ be a difference of two convex semiregular at the point x_0 functions f_1 and f_2 , that is $f = f_1 - f_2$. Then all M-derivatives of the function f coincide, that is $(\forall M \in \{C, MP, AL\})$

$$D_M^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X} (f'(x_0, u + w) - f'(x_0, w)), \quad \forall u \in X,$$

which is equivalent to coincidence of all subdifferentials $\partial_C^+ f(x_0) = \partial_{MP}^+ f(x_0) = \partial_{AL}^+ f(x_0)$.

Some examples of calculations of M- subdifferentials of functions representable as a difference of two convex functions are considered.

Acknowledgement. The investigation was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 16-01-00259-a.

Prudnikov I. 37

References

[1] Clarke F. H. Generalized gradients and applications. J. Trans. Amer. Math. Soc., 205, 247–262 (1975).

- [2] Clarke F. H. Optimization and nonsmooth analysis. Wiley-Interscience, New York, (1983).
- [3] Polovinkin E. S. Differential inclusions with measurable-pseudo-Lipschitz right-hand side. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 283, 116–135 (2013).
- [4] Polovinkin E. S. Setvalued Analysis and Differential Inclusions . M.: Fizmatlit, (2014) (in Russian).
- [5] Demyanov V. F., Rubinov A. M. Nonsmooth Analysis and Quasidifferentiable Calculus. M.: Nauka (1990) (in Russian).
- [6] Aubin J.-P. Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions. Advances in Math. Suppl. Studies, Acad. Press, 160–272 (1981).
- [7] Aubin J.-P., Frankovska. H. Set-Valued Analisys. Boston-Basel-Berlin, Birkhäuser (1990).
- [8] Michel P., Penot J.-P. Calcul sous-différentiel pour les fonctions lipschitziennes et non-lipschitziennes. C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I., 298, 269–272 (1984).

The Subdifferentials of the Second Orders for Lipschitz Functions

Prudnikov I.

pim 10@hotmail.com

Smolensk Branch of Sanct Petersburg Railway Institute, Krupskaya 39, Smolensk, 214000, Russia

Construction of an united theory of the subdifferentials of the first and second orders is interesting for many specialists in optimization. In this paper the rules for construction of the subdifferentials of the first and second orders are introduced. The constructions are done with the help of the Steklov integrals of Lipschitz functions over the images of set-valued mappings. It is proved that the subdifferential of the first order, consisting of the average integral limit values of the gradients of a Lipschitz function, calculated along the curves from an introduced set of the curves, coincides with the subdifferential of the first order, introduced by the author, constructed using the Steklov integral. If a function is twice differentiable at some point, then the subdifferentials of the first and second orders coincide with the gradient and the matrix of the second mixed derivatives of this function at the same point. The generalized gradients and matrices are used for formulation of

38 Prudnikov I.

the necessary and sufficient conditions of optimality. The calculus for the subdifferentials of the first and second orders is constructed. The examples are given. The main results are published in [1].

Define the function $\varphi(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) := \frac{1}{\mu(D(x))} \int_{D(x)} f(x+y) dy, \tag{1}$$

where $D(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a continuous set-valued mapping (SVM) in the Hausdorff metric with convex and compact images, $0 \in \text{int } D(x), \mu(D(x)) > 0$ is the measure of D(x). The function $\varphi(\cdot)$ depends on the chosen SVM $D(\cdot)$. Let us consider SVM $D(\cdot)$ satisfying the following conditions.

- 1. $x_0 \in \text{int}(x + D(x))$ for all $x \in S$, $S \subset \mathbb{R}^n$, is a neighborhood of x_0 ;
- 2. the diameter of D(x) which we denote by $\operatorname{diam} D(x) = d(D(x))$, tends to zero as $x \to x_0$ and satisfies the inequality $d(D(x)) \le k \|x x_0\|$ for some constant k:
- 3. for some sequence $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i \downarrow 0$, as $i \to \infty$ SVM $D(\cdot)$ is constant for all x from the set $\varepsilon_{2i+1} < ||x x_0|| < \varepsilon_{2i}$;
- 4. the boundary of D(x) for all $x \in S$, $x \neq x_0$, is defined by continuously differentiable function of x.

We will consider SVM $D(\cdot)$ satisfying the above mentioned conditions for any sequences $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i \downarrow 0$, and constants k. Denote the defined set of SVM by Ξ . $D(\cdot)$ is constant SVM, i.e. $D(x) \equiv D_{2i}$, for any x, satisfying $\varepsilon_{2i+1} < ||x-x_0|| < \varepsilon_{2i}$. The derivative $\varphi'(\cdot)$ is a Lipschitz function with a constant $L_{2i}(D_{2i})$.

We will consider the function $\psi(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\psi(x) := \frac{1}{\mu(D(x))} \int_{D(x)} \varphi(x+y) dy$$

to construct the subdifferential of the second order, where $\varphi(\cdot)$ was defined before for SVM $D(\cdot) \in \Xi$. The function $\psi(\cdot)$ depends on the chosen SVM $D(\cdot) \in \Xi$.

Introduce the set of the matrices

$$\partial^2 \psi_D(x_0) := \operatorname{co} \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = \lim_{x_i \to x_0} \psi''(x_i) \},$$

where the points x_i belong to the regions of constancy of SVM $D(\cdot) \in \Xi$.

Lemma 1. $\partial^2 \psi_D(x_0)$ is a convex and closed set.

Define SVM $\Psi^2 f(\cdot): \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ with the images

$$\Psi^2 f(x_0) := \operatorname{co} \bigcup_{D(\cdot)} \partial^2 \psi_D(x_0),$$

where the union for all SVM $D(\cdot) \in \Xi$ is taken. The set $\Psi^2 f(x_0)$ is called the subdifferential of the second order of the function $f(\cdot)$ at the point x_0 .

Remark. Remark, that the sets $\partial^2 \psi_D(x_0)$ and $\Psi^2 f(x_0)$ may be unbounded without some additional assumptions for the function $f(\cdot)$.

The following theorem can be a sufficient condition of optimality.

Theorem. If the necessary condition for the minimum of $f(\cdot)$ at x_0 is true and there exists $\beta(g) > 0$ for all suspicious directions $g \in G$ that the inequality

$$(Ag,g) \geqslant \beta(g) \|g\|^2 \quad \forall A \in \Psi^2 f(x_0)$$

is true, then x_0 is the minimum of $f(\cdot)$.

Example 1. Let be $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$. Then

$$\Phi f(0) = Df(0) = [-1, 1] = \partial_{CL} f(0).$$

The functions $\psi(\cdot)$ are convex for any constant SVM $D(\cdot)$ according to the qualities of such functions proved before. During decreasing of the diameters of the images D(x) the functions $\psi(\cdot), \psi'(\cdot)$ tend to the functions $f(\cdot), f'(\cdot)$ uniformly on any compact set. Therefore, the second derivatives $\psi''(x)$ tend to $+\infty$ when $x \to 0$. From here we have $\Psi^2 f(0) = \{0, +\infty\}$.

Example 2. Let be $f(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with a graph lying between two curves $y = x^2$ and $y = -x^2$ and consisting from slopes ± 1 with the limit point at zero. Then

$$Df(0) = \{0\}, \quad \Psi^2 f(0) = [-2, 2].$$

We can conclude from here that the point zero is not the optimal point.

References

[1] Proudnikov I.M. The Subdifferentials of the First and Second Orders for Lipschitz Functions // J. of Optimization Theory and Application. 2016. V. 171. No.3. P. 906-930.

Lagrange Duality and Saddle Point Optimality Criteria for MPEC via Convexificators

Singh Ya., Pandey Yo., Mishra S.

ysinghze@gmail.com, pandeyiitb@gmail.com,

bhu.skmishra@gmail.com

Department of Mathematics, Institute of Science, Banaras Hindu University, Varanasi-221005, India; Indian Institute of Technology, Kanpur, India

In this paper, we consider a mathematical programming problem with equilibrium constraints (MPEC). We formulate Lagrange type dual model for MPEC and establish weak and strong duality results under convexity assumptions in terms of convexificators. Further, we investigate the saddle 40 Smirnova S.

point optimality criteria for the mathematical programming problem with equilibrium constraints. We also illustrate our results by an example. Keywords: Mathematical programming problems with equilibrium constraints, Nonsmooth analysis, Duality, Convexity.

References

- Demyanov, V. F., and Jeyakumar, V. "Hunting for a Smaller Convex Subdifferential", J. Global Optim. 10, 305–326 (1997)
- [2] Ardali, A. A., Movahedian, N., Nobakhtian, S., "Optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems with equilibrium constraints", using convexificators, Optimization, 65, 67-85 (2014)
- [3] Pandey, Y., Mishra, S.K. "Duality for nonsmooth optimization problems with equilibrium constraints, using convexificators", J. Optim. Theory Appl. (2016) doi 10.1007/s10957-016-0885-2.

Representation of the Compact-Valued Sublinear Operator by Means of "Basis" Selectors Packet

Smirnova S.

si_smirnova@mail.ru

Crimean Federal V. Vernadsky University, Academician Vernadsky Ave., 4 Simferopol, Republic Crimea, Russia, 295007

Introduction

In the problems of modern nonsmooth analysis and nonsmooth optimization, the multivalued sublinear operators play, as is known, ever more important role. In particular, the concepts of the subdifferential and the subsmoothness are jointly connected to multivalued sublinear operators, that take convex compact values.

The questions on the nonsmooth form of the implicite function and on the inverse function theorems are very actual for any kind of subdifferential calculus and this question was researched long ago in the nonsmooth analysis. However, in order to obtain developed tools of the nonsmooth invertibility, it seems that first an adequate invertibility theory for multivalued operators should be constructed.

The present work represents an outline of such theory. We describe the compact-valued sublinear operators by means of the packets of single-valued so-called basis selectors. This makes it possible to introduce a concept of the multivalued sub-invertibility through the concept of the corresponding selectors. The construction and the properties of sub-invertible multioperators are described explicitly. Special attention is given to the

Smirnova S. 41

problem of extremal points of selector representation and corresponding application of the Krein–Milman theorem.

Sublinear K-operators and their simplest properties

Definition 1. Let F be a real normed space. Denote by F_K the convex cone consisting of all non-empty convex compacts in F, equipped with elementwise addition, non-negative scalar multiplication and the cone-norm:

$$||C|| = \sup_{y \in C} ||y|| \quad (C \subset F).$$

This norm generates in F_K a locally convex cone-topology by means of the following ε -neighborhoods:

$$U_{\varepsilon} = \{C' | C \subset C' \subset C + D, \text{ where } ||D|| < \varepsilon\}.$$

Definition 2. Let E and F be the real normed spaces, $A: E \to F_K$. We say that A is a *sublinear K-operator* if the following properties

- (i) $A(h+k) \subset Ah + Ak$ (subadditivity);
- (ii) $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah \ (\lambda \ge 0)$ (positive homogeneity);

are satisfied. The cone–norm for K–operator is introduced in the standard way:

$$||A|| = \sup_{||h|| \le 1} ||Ah||.$$

We say that the K-operator A is bounded if $||A|| < \infty$. The normed cone of all bounded K-operators $A: E \to E_K$ is denoted by $L_K(E; F)$.

Constructing of the packet of basis selectors for a given K-operator

In what follows, $H = \{h_i\}_{i \in I}$ is a fixed normed Hamel basis in a real Banach space E.

Definition 3. Let $A \in L_K(E; F)$. Choose an arbitrary element $a_i \in Ah_i$ for each $i \in I$ and set

$$A^sh_i=a_i\,(\forall\,i\in I),\quad A^sh=\sum_{k=1}^n\lambda_ka_{i_k}\quad \left(h=\sum_{k=1}^n\lambda_kh_{i_k}\in E\right).$$

Let us call the set $A_K = \{A^s\}$ the packet of basis selectors (or s-representation) of a sublinear K-operator A.

Theorem 1. Let E and F be the real Banach spaces, H be a Hamel basis in E and $A \in L_K(E; F)$. Then for every selector $A^s \in A_K$ the following properties:

$$A^{s} \in L(E; F); \quad ||A|| \leqslant \sup_{A^{s} \in A_{K}} ||A^{s}|| \leqslant C \cdot ||A||;$$
 (1)

42 Smirnova S.

are valid. Here the constant C = C(H) in the right-hand side of (1) depends only on the choice of a Hamel basis H in E.

Remark 1. It is possible to identify the packet of basis selectors $A_K = \{A^s\}$ and the K-operator $A_K h = \{A^s h | A^s \in A_K\}$. Then estimate (1) can be rewritten in the form of norm equivalence for the K-operators A and A_K :

$$||A|| \leq ||A_K|| \leq C_H \cdot ||A|| \quad (\forall A \in L_K(E; F)),$$

where the constant C_H depends only on the choice of a Hamel basis H. In addition, $Ah \subset A_K h$ ($\forall h \in E$) and the correspondence $A \mapsto A_K$ is sublinear. Note that, under such representation, $A_K \in L_K(E; F)$.

Note also that the packet of basis selectors A_K forms a convex compact.

Theorem 2. For every K-operator $A_K \in L_K(E; F)$ its packet of basis selectors A_K is a convex compact in L(E; F).

K-invertibility of K-operators

In what follows, E and F are real Banach spaces, $E \cong F$, Isom(E; F) is the set of all isomorphisms between E and F, $A \in L_K(E; F)$, H is a fixed Hamel basis in E and all s-representations of the K-operators $E \to F_K$ are considered with respect to H.

Definition 4. We say that the K-operator A is K-invertible if $A_K \subset \text{Isom}(E;F)$. In this case, we introduce K-inverse K-operator A_K^{-1} as follows:

$$A_K^{-1} = \overline{\operatorname{co}}\,\left\{(A^s)^{-1}|\,A^s \in A_K\right\} \quad \left(A_K^{-1}k = \left\{B^\sigma k|\,B^\sigma \in A_K^{-1}\right\}\right).$$

The set of the all K-invertible K-operators $A: E \to F_K$ is denoted by $\operatorname{Isom}_K(E; F)$.

Consider some properties of K-invertible K-operators.

Theorem 3. If a K-operator A is K-invertible, then A_K^{-1} forms a convex compact in L(E; F).

Finally, let us explain the question on the repeated K-invertibility.

Theorem 4. If $A \in \text{Isom}_K(E; F)$ then $A_K^{-1} \in \text{Isom}_K(F; E)$. Moreover

$$A_K h \subset (A_K^{-1})_K^{-1} \cdot h \quad (\forall h \in E).$$

Extremal points of the packets of linear selectors

Theorem 5. Let $A \in L_K(E; F)$, $A_K = \{A^s\}$ be its s-representation. Then

$$(A^s \in \operatorname{Extr}(A_K)) \Leftrightarrow (\forall h_i \in H : A^s h_i \in \operatorname{Extr}(Ah_i)).$$
 (2)

Corollary 1. Denote by A_K^e the set of all basis selectors from A_K , that satisfy the condition in the right-hand side of (2). Then

$$A_K = \overline{\operatorname{co}}(A_K^e).$$

Theorem 6. If $A \in \text{Isom}(E; F)$, then the following inclusion

$$(\operatorname{Extr} A_K)^{-1} \subset \operatorname{Extr}(A_K^{-1}).$$

takes place.

Now let us consider a question on sufficient condition of K-invertibility, namely, on K-analogue of the classical von Neumann theorem.

Theorem 7. Let $A \in L_K(E)$. If A = I - B, where $||B_K|| < 1$, then A is K-invertible. Moreover, the following estimate

$$A_K^{-1}h \subset (I + \sum_{n=1}^{\infty} B_K^n)h \quad (\forall h \in E)$$
(3)

takes place. Here in (3) the power of the K-operator is meant with respect to the K-product (see [1]), and the convergence of the power series in (3) is meant with respect to the cone-norm in $L_K(E)$.

By applying the Krein-Milman theorem, now it is easy to obtain **Theorem 8.** Let, under the assumptions of Theorem 7, the inequality

$$||A_e - I|| \le 1 - \varepsilon$$

hold for all extremal points $A_e \in \operatorname{Extr} A_K$. Then A is K-invertible.

References

[1] I. V. Orlov, S. I. Smirnova, "Invertibility of Multivalued Sublinear Operators", Eurasian Math. J., 6, No. 4, 44–58 (2015).—2015. — Vol. 6, no.4. — P. 44–58.

Global Optimality Conditions for d.c. Optimization Strekalovsky A.

strekal@icc.ru

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, 134 Lermontov St., Irkutsk, 664033, Russia

Consider the optimization problem:

$$(\mathcal{P}): \qquad f_0(x) \downarrow \min_{x}, \quad x \in S \subset \mathbb{R}^n, f_i(x) \leqslant 0, \quad i \in \mathcal{I} := \{1, \dots, m\}, f_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} := \{m + 1, \dots, l\},$$

$$(1)$$

where all $f_i(x) = g_i(x) - h_i(x)$, $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E} \cup \{0\}$ with nonsmooth convex functions $g_i(\cdot)$, $h_i(\cdot)$, g_i , $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E} \cup \{0\}$ [1, 2, 3, 6, 13, 14, 15].

Let introduce the following penalty function [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17]

$$W(x) := \max\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\} + \sum_{j \in \mathcal{E}} |f_j(x)|.$$
 (2)

Further, consider the penalized problem as follows ($\sigma > 0$)

$$(\mathcal{P}_{\sigma}): \qquad \Theta_{\sigma}(x) := f_0(x) + \sigma W(x) \downarrow \min_{x}, \quad x \in S.$$
 (3)

As well-known [1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 16], if $z \in Sol(\mathcal{P}_{\sigma})$, and $z \in \mathcal{F} := \{x \in S : f_i(x) \leq 0, f_j(x) = 0, i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{E}\}$, then $z \in Sol(\mathcal{P})$. On the other hand, if $z \in Sol(\mathcal{P})$, then under supplementary conditions [2, 5, 7] for some $\sigma_* > 0$, $\sigma_* \geqslant \|\lambda_z\|_1 + \|\mu_z\|_{\infty}$ (where (λ_z, μ_z) is the KKT-multiplier vector corresponding to z), the inclusion $z \in Sol(\mathcal{P}_{\sigma})$ holds. Moreover [14, 15], $Sol(\mathcal{P}) = Sol(\mathcal{P}_{\sigma})$, so that Problems (\mathcal{P}) and (\mathcal{P}_{σ}) turn out to be equivalent $\forall \sigma \geqslant \sigma_*$.

It can be readily seen that the penalized function $\Theta_{\sigma}(\cdot)$ is a d.c. function, since the functions $f_i(\cdot)$, $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E} \cup \{0\}$, are as such. Actually, since $\sigma > 0$, (assume, for simplicity, $\mathcal{E} = \emptyset$)

$$\Theta_{\sigma}(x) = G_{\sigma}(x) - H_{\sigma}(x), \tag{4}$$

$$H_{\sigma}(x) := h_0(x) + \sigma \sum_{i \in \mathcal{I}} h_i(x), \tag{5}$$

$$G_{\sigma}(x) := \Theta_{\sigma}(x) + H_{\sigma}(x) = g_0(x) +$$

$$+ \sigma \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} h_i(x); \max_{i \in \mathcal{I}} [g_i(x) + \sum_{j \in \mathcal{I}}^{j \neq i} h_j(x)] \right\}. \quad (6)$$

It is clear that $G_{\sigma}(\cdot)$ and $H_{\sigma}(\cdot)$ are convex functions.

For $z \in \mathcal{F}$ denote $\zeta := \Theta_{\sigma}(z) = f_0(z)$.

Theorem 1. Suppose $z \in Sol(\mathcal{P})$ and $\sigma \geqslant \sigma_* > 0$, where σ_* is the threshold value of exact penalty parameter σ .

Then, for all pair (y, β) such that

$$H_{\sigma}(y) = \beta - \zeta,\tag{7}$$

and for any collection of subgradients $h'_i(y) \in \partial h_i(y)$, $i \in \{0\} \cup \mathcal{I}$, the following inequality holds

$$G_{\sigma}(x) - \beta \geqslant \langle h'_{0}(y) + \sigma \sum_{i \in I} h'_{i}(y), x - y \rangle \quad \forall x \in S.$$
 (8)

It can be readily seen that Theorem 1 reduces nonconvex (d.c.) Problem (\mathcal{P}_{σ}) to a solving the family of convex linearized problems of the form $(H'_{\sigma}(y) \in \partial H_{\sigma}(y))$

$$(\mathcal{P}_{\sigma}L(y)): \quad G_{\sigma}(x) - \langle H'_{\sigma}(y), x \rangle \downarrow \min_{x}, \quad x \in S,$$

$$(9)$$

depending on the parameters (y, β) fulfilling the equation (7).

If for such a pair (y, β) and some $u \in S$ (u may be a solution to $(\mathcal{P}_{\sigma}L(y))$) the inequality (8) is violated, i.e. for some $H'_{\sigma}(y) \in \partial H_{\sigma}(y)$

$$G_{\sigma}(u) < \beta + \langle H'_{\sigma}(y), u - y \rangle,$$
 (10)

then due to convexity of $H_{\sigma}(\cdot)$ we obtain with the help of (7) that

$$G_{\sigma}(u) < \beta + H_{\sigma}(u) - H_{\sigma}(y) = H_{\sigma}(u) + \zeta.$$

The latter implies that $\Theta_{\sigma}(u) = G_{\sigma}(u) - H_{\sigma}(u) < \zeta := \Theta_{\sigma}(z)$, so that $u \in S$ is better than z, i.e. $z \notin Sol(\mathcal{P}_{\sigma})$.

It means that Global Optimality Conditions (7), (8) of Theorem 1 possess the constructive (algorithmic) property allowing to construct local and global search methods for solving Problem (\mathcal{P}_{σ}) [18, 19, 20, 21].

In particular, they enable us to escape a local pit of (\mathcal{P}_{σ}) and to reach a global solution. The question arise about the existence of such a tuple (y, β, u) . The answer is given by following result.

Theorem 2. Let for a point $z \in S$ there exist $v \in \mathbb{R}^n$ such that

$$(\mathcal{H})$$
: $\Theta_{\sigma}(v) > \Theta_{\sigma}(z)$.

If z is not a solution to Problem (\mathcal{P}_{σ}) , then one can find a pair $(y,\beta) \in \mathbb{R}^{n+1}$, satisfying (7), and a point $u \in S$ such that the inequality (10) holds for some $H'_{\sigma}(y) \in \partial H_{\sigma}(y)$.

Now let us set y = z in (9). Then from (8) it follows that

$$\beta = \Theta_{\sigma}(z) + H_{\sigma}(z) = G_{\sigma}(z).$$

Furthermore, from (9) we derive $(H'_{\sigma}(y) \in \partial H_{\sigma}(y))$

$$G_{\sigma}(x) - G_{\sigma}(z) \geqslant \langle H'_{\sigma}(z), x - z \rangle \quad \forall x \in S,$$

that yields that z is a solution to the convex linearized problem

$$(\mathcal{P}_{\sigma}L(z))$$
: $G_{\sigma}(x) - \langle H'_{\sigma}(z), x \rangle \downarrow \min_{x}, \quad x \in S.$

As well-known [3, 6, 18], due to the presentation (6) the latter problem amounts to the next one

$$g_{0}(x) - \langle H'_{\sigma}(z), x \rangle + \sigma t \downarrow \min_{\substack{(x,t) \\ j \neq i}}, \quad x \in S, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} h_{i}(x) \leqslant t, \quad g_{i}(x) + \sum_{j \in \mathcal{I}}^{j \neq i} h_{i}(x) \leqslant t, \quad i \in \mathcal{I}.$$

$$(11)$$

Moreover, one can show that the KKT-conditions to Problem (11) provide for the KKT-conditions at z for the original Problem (\mathcal{P}) .

So, the Global Optimality Conditions (7), (8) of Theorems 1 and 2 are connected with classical optimization theory [1, 2, 3, 6, 13, 14, 18, 20].

This research is supported by the Russian Science Foundation (project No. 15-11-20015).

References

- R.T. Rockafellar, R.J.-.B. Wets, Variational Analysis, Springer, New York (1998).
- [2] V.F. Demyanov, A.M. Rubinov, Constructive Nonsmooth Analysis, Peter Lang, Frankfurt a/M (1995).
- [3] J. Nocedal, S.J. Wright, Numerical Optimization, Springer, New York (2006).
- [4] R.H. Byrd, J. Nocedal, R.A.Waltz, "Steering exact penalty methods for nonlinear programming", *Optimization Methods & Software* 23, No. 2, 197–213 (2008).
- [5] R.H. Byrd, G. Lopez-Calva, J. Nocedal, "A line search exact penalty method using steering rules", *Mathematical Programming, Ser. A* 133, No. 1, 39–73 (2012).
- [6] J.-F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal, C.A. Sagastizábal, Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin (2006).
- [7] G. Di Pillo, S. Lucidi, F. Rinaldi, "A Derivative-free algorithm for constrained global optimization based on exact penalty functions", *Journal of Optimization Theory and Applications* 164, No. 3, 862–882 (2015).
- [8] G. Pillo, S. Lucidi, F. Rinaldi, "An approach to constrained global optimization based on exact penalty functions", *Journal of Global Optimization* 54, No. 2, 251–260 (2012).
- [9] G. Di Pillo, L. Grippo, "Exact penalty functions in constrained optimization", SIAM Journal on Control and Optimization 27, 1333–1360 (1989).

- [10] A.F. Izmailov, M.V. Solodov, Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems, Springer, New York (2014).
- [11] I.I. Eremin, "The penalty method in convex programming", Soviet Math. Dokl. 8, 459–462 (1966).
- [12] W.I. Zangwill, "Nonlinear programming via penalty functions", Manage. Sci. 13, 344–358 (1967).
- [13] F.H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley-Interscience, New York (1983).
- [14] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, Convex Analysis and Minimization Algorithms, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [15] J.-B. Hiriart-Urruty, "Generalized differentiability, duality and optimization for problems dealing with difference of convex functions", In: Ponstein, J. (ed.) Convexity and Duality in Optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 256, 37–70, Springer, Heidelberg (1985).
- [16] J.V. Burke, "An exact penalization viewpoint of constrained optimization", SIAM J. Control and Optimization, 29, No. 4, 968–998 (1991).
- [17] A.J. Zaslavski, "Existence of Exact Penalty and Its Stability for Nonconvex Constrained Optimization Problems in Banach Spaces", Set-Valued Analysis 16, 673–691 (2008)
- [18] A.S. Strekalovsky, "On Solving Optimization Problems with Hidden Nonconvex Structures", Optimization in Science and Engineering (ed. by T.M. Rassias, C.A. Floudas, S. Butenko), Springer, New York, 465–502, (2014).
- [19] A.S. Strekalovsky, "Minimizing sequences in problems with d.c. constraints", Computational Mathematics and Mathematical Physics 45, No. 3, 418–429 (2005).
- [20] A.S. Strekalovsky, *Elements of nonconvex optimization*, Nauka, Novosibirsk (2003) [in Russian].
- [21] A.S. Strekalovsky, "Global Optimality Conditions in Nonconvex Optimization", Journal of Optimization Theory and Applications (2017), DOI: 10.1007/s10957-016-0998-7.

Metric Problems for Algebraic Manifolds: Analytical Approach

Uteshev A., Goncharova M.

alexeiuteshev@gmail.com, marina.yashina@gmail.com

The problem of finding the value of the geometric (i.e., Euclidean) distance from a given point X_0 to a given manifold in \mathbb{R}^n is of great importance for several branches of mathematics, statistical data analysis, astronomy, particle physics and image processing. Considering the case of an algebraic manifold G(X) = 0, we are looking for an analytical solution to the problem, i.e. we

need the expression of the distance as a function of the involved problem parameters (coefficients of the polynomial and coordinates of the point). The problem in such a statement arises in image processing, multi-object movement simulation and in the scattered data approximation problems (such as, for instance, ellipse or ellipsoid fitting problems).

We develop an algebraic approach consisting first in computation of the so-called distance equation [1], i.e. an algebraic univariate equation $\mathcal{F}(z) = 0$ whose zero set coincides with that of critical values of the objective function of the stated constrained optimization problem. Since the latter is an essentially algebraic one, the required equation can be obtained in the framework of Elimination Theory methodology involving computation of the resultant \mathcal{R}_x and the discriminant \mathcal{D}_x of the polynomials [2] (the subscript denotes the variable w.r.t. which the argument polynomials are treated).

We mostly concern ourselves with the problems involving quadrics due to their importance for the image processing in 2D and 3D spaces. Consider an ellipsoid in \mathbb{R}^n given by the equation in X:

$$G(X) := X^T \mathbf{A} X + 2 B^T X - 1 = 0$$
 where $\mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{A}^T$ and $B \in \mathbb{R}^n$. (1)

Theorem 1. Let $G(X_0) \neq 0$. The square of the distance from X_0 to the ellipsoid coincides with the minimal positive zero z_* of the distance equation

$$\mathcal{F}(z) := \mathcal{D}_{\mu}(\Phi(\mu, z)) = 0 \tag{2}$$

where

$$\Phi(\mu,z) := \det \left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & B \\ B^T & -1 \end{array} \right] + \mu \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{I} & X_0 \\ X_0^T & z - X_0^T X_0 \end{array} \right] \right)$$

provided that this zero is not a multiple one. Under the last condition, the nearest to X_0 point in the ellipsoid is

$$X_* = (\mu_* \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (B + \mu_* X_0). \tag{3}$$

Here μ_* stands for the multiple zero of the polynomial $\Phi(\mu, z_*)$ and **I** is the $n \times n$ - identity matrix.

Remark 1. Under the condition of Theorem 1, the multiple zero $\mu = \mu_*$ of the polynomial $\Phi(\mu, z_*)$ can be expressed as a rational function of the coefficients of this polynomial.

Corollary 1. The leading term of $\mathcal{F}(z)$ in (2) equals generically $z^{2n}(\det \mathbf{A})^2 \mathcal{D}_{\mu}(\det(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}))$.

Example 1. For the point $X_0 = [x_0, y_0]$ and the ellipse $G(x, y) := x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ one has $\Phi(\mu, z) = \mu^3 + A_1(z)\mu^2 + A_2(z)\mu + A_3(z)$ where

$$A_1(z) = T - z$$
, $A_2(z) = a^2 b^2 \left\{ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) z - G_0 \right\}$, $A_3(z) = -a^2 b^2 z$.

The distance equation (2) takes the form

$$\begin{split} 0 &= L^2 z^4 - 2 \, L \bigg\{ L (a^2 + b^2 + x_0^2 + y_0^2) + a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 \bigg\} z^3 \\ &+ \bigg\{ 6 \, L [a^4 y_0^2 + a^2 y_0^4 - b^4 x_0^2 - b^2 x_0^4 + L (a^2 b^2 + x_0^2 y_0^2)] + [L^2 - (a^2 x_0^2 + b^2 y_0^2)]^2 \bigg\} z^2 \\ &- 2 \, a^2 b^2 \bigg\{ a^2 b^2 M G_0^2 - \bigg[(a^2 + b^2) M^2 + 3 \, a^2 b^2 M - 6 \, a^4 b^4 S_4 \bigg] G_0 + 2 \, a^2 b^2 M^2 S_4 \bigg\} z + \\ &+ a^4 b^4 G_0^2 \left(M^2 + 4 \, a^2 b^2 G_0 \right) \; . \end{split}$$

Here $L:=a^2-b^2$, $G_0:=G(x_0,y_0)$, $M:=x_0^2+y_0^2-a^2-b^2$, $S_4:=x_0^2/a^4+y_0^2/b^4$. If z_* denotes the least positive zero of the distance equation and this zero is not a multiple one then the nearest to X_0 point in the ellipse is

$$X_* = \left[\frac{a^2x_0}{a^2 - \mu_*}, \ \frac{b^2y_0}{b^2 - \mu_*}\right] \quad \text{where } \mu_* = \frac{9\,A_3(z_*) - A_1(z_*)A_2(z_*)}{2\,A_1^2(z_*) - 6\,A_2(z_*)}\,.$$

We next focus on resolving the distance equation, i.e. at finding approximate but explicit expressions for its zero providing the squared distance value. On representing the latter as the formal series $z_* = \sum_{j=1}^{\infty} \ell_j G^j(X_0)$ in powers of the algebraic distance $G(X_0)$ (which can be treated as a small parameter in a vicinity of the considered quadric), we substitute it into the distance equation (like the one given in Example 1) and equate to zero the coefficients of successive powers of $G(X_0)$. This procedure results in the following approximations for the distance value:

Theorem 2. For the distance from the point $X_0 \neq -\mathbf{A}^{-1}B$ to the quadric (1), the first approximation formula is given by

$$d_{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|G(X_0)|}{\sqrt{(\mathbf{A}X_0 + B)^T (\mathbf{A}X_0 + B)}},$$
 (4)

while the second one by

$$d_{(2)} = d_{(1)} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\mathbf{A}X_0 + B)^T \mathbf{A}(\mathbf{A}X_0 + B)}{[(\mathbf{A}X_0 + B)^T (\mathbf{A}X_0 + B)]^2} G(X_0)}$$
 (5)

provided that the radicand is nonnegative.

Formula (4) is known as Sampson's approximation [3]. Our next aim consists in establishing the tolerances of the discovered approximations. This is carried out via evaluation of the deviations of the manifolds $\{d_{(j)} = h\}_{j=1,2;h\in\mathbb{R}_+}$ from the approximated quadric. The problem can be reduced to the general problem of distance evaluation between the point and algebraic manifold of an arbitrary order. The treatment of the planar case is performed via the construction of an appropriate distance equation.

Theorem 3. Let $G(0,0) \neq 0$ and the G(x,y) be an even polynomial in y. Expand G in powers of y^2 and denote $\widetilde{G}(x,y^2) \equiv G(x,y)$. Equation G(x,y) = 0 does not have real zeros if

- (a) the equation G(x,0) = 0 does not possess real zeros and
- (b) the equation

$$\mathcal{F}(z) := \mathcal{D}_x(\widetilde{G}(x, z - x^2)) = 0 \tag{6}$$

does not possess positive zeros. If any of these conditions fails then the squared distance from $X_0 = [0,0]$ to the curve G(x,y) = 0 equals either the square of the minimal in absolute value real zero of the equation G(x,0) = 0 or the minimal positive zero of the equation (6) provided that this zero is not a multiple one.

The treatment of the general case of an arbitrary polynomial G(x, y) can be reduced to the just treated one via artificial *evenization* of the problem:

Theorem 4. Let $G(0,0) \neq 0$ and G(x,y) be not an even polynomial in y. Split G into the sum of even and odd parts of this variable: $G(x,y) \equiv G_1(x,y^2) + yG_2(x,y^2)$. Denote $\widetilde{G}(x,y^2) := G(x,y)G(x,-y) \equiv G_1^2(x,y^2) - y^2G_2^2(x,y^2)$ and compute the polynomial $\mathcal{F}(z)$ by (6). The latter can be factorized over \mathbb{R} as

$$\mathcal{F}(z) \equiv \mathcal{F}_1(z)\mathcal{F}_2^2(z)$$
 where $\mathcal{F}_2(z) := \mathcal{R}_x(G_1(x, z - x^2), G_2(x, z - x^2))$.

Equation G(x,y) = 0 does not define a real curve if

- (a) the equation G(x,0) = 0 does not possess real zeros and
- (b) the equation $\mathcal{F}_1(z) = 0$ does not possess positive zeros.

If any of these conditions fails then the squared distance from $X_0 = [0, 0]$ to the curve G(x, y) = 0 equals either the square of the minimal in absolute value real zero of the equation G(x, 0) = 0 or the minimal positive zero of the equation $\mathcal{F}_1(z) = 0$ provided that this zero is not a multiple one.

Remark. Generically, one has: $\deg \mathcal{F}_1 = (\deg G)^2$.

Example 2. For the cubic $-2x^3 + 6xy^2 + y^3 - 13x^2 - 24xy - 7y^2 + 3x + 9y - 6 = 0$, the polynomial $\mathcal{F}_1(z)$ from Theorem 4 has the form

$$\mathcal{F}_1(z) := 234000 z^9 - 16231720 z^8 + 424939357 z^7 - 5350750701 z^6 +$$

Баран И.В. 51

$$+34854257973 z^5 - 113424352224 z^4 + 148842276936 z^3 - 13100614064 z^2 - 25191108960 z - 7233825600$$
.

Its minimal positive zero $z_* \approx 0.737416$. Distance to the cubic from the origin equals $\sqrt{z_*} \approx 0.858729$.

The approach outlined in the present paper can also be extended for solution of the quadric-to-linear-manifold and the quadric-to-ellipsoid distance evaluation problems in \mathbb{R}^n [1].

References

- A. Yu. Uteshev, M. V. Yashina, "Metric problems for quadrics in multidimensional space", J. Symbolic Comput., 68, No. 1, 287-315 (2015).
- [2] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms, Springer, (2007).
- [3] P. D. Sampson "Fitting conic sections to very scattered data: an iterative refinement of the Bookstein algorithm", Comput. Gr. Image Process. 18, 97–108 (1982)

Adjoint Extremal Problem for Non-Smooth Functionals $Eapan \ \textit{U.B.}$

matemain@mail.ru

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, пр. Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Россия

Сопряженная экстремальная задача для негладких функционалов

В данной работе ставится и исследуется так называемая сопряженная экстремальная задача поиска «оптимального» направления (в некотором смысле), вдоль которого функционал переходит через точку уже найденного ранее экстремума. Понятие оптимальности мы связываем с двумя локальными характеристиками функционала, которые являются локальными аналогами известных в теории вероятности понятий асимметрии и эксцесса распределения случайной величины [3].

Пусть E — банахово пространство, $\Phi: E\supset U(y)\to \mathbb{R}$ непрерывный функционал, который достигает локального экстремума в точке $y,\,h\in E$ — любое направление в $E(\|h\|=1)$. Назовем локальной асимметрией Φ в точке y по направлению h следующий предел:

$$A\Phi(y,h) = \lim_{t \to +0} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} \frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau} \right).$$

52 Баран И.В.

Оказывается, что это понятие тесно связано с понятием симметрической производной по направлению, а также симметрического субдифференциала по направлению. Заметим, что некоторое время назад было введено понятие компактного субдифференциала, которое нашло серьезные приложения в теории векторного интегрирования и в вариационном исчислении [1]. В дальнейшем естественной стала задача обобщения теории компактных субдифференциалов на симметрических случай [2].

Теорема. Если Φ *симметрически дифференцируем* в точке x по паре направлений (h,-h), то

$$A\Phi(y,h) = \partial^{[\prime]}\Phi(y,h).$$

Таким образом, первую сопряженную экстремальную задачу в этом случае можно сформулировать следующим образом: отыскать направления h, вдоль которых $|A\Phi(y,h)| \to \min$, либо отыскать последовательность направлений $\{h_n\}$, вдоль которых $|A\Phi(y,h)| \to \inf$.

Заметим, что в гладком случае (когда Φ сильно дифференцируем в точке), в силу леммы Φ ерма, $A\Phi(y,h)\equiv 0$. Таким образом, задача является нетривиальной лишь в негладком случае. В этом случае мы исследуем понятие симметрического субдифференциала (соответствующее понятие многозначного субпредела изучено в [1]–[2]):

$$\partial_{sub}^{[\prime]} \Phi(y,h) = \underset{t \to +0}{\text{sublim}} \ \frac{\Phi(y+th) - \Phi(y-th)}{2t}$$

и соответственно понятие многозначной суб-асимметрии

$$A_{sub}\Phi(y,h) = \underset{\delta \to +0}{\text{sublim}} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} \frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right).$$

Справедлива теорема.

Теорема. Если Φ симметрически субдифференцируем в точке y по направлению h, то

$$A_{sub}\Phi(y,h)\subset \partial_{sub}^{[\prime]}\Phi(y,h)\subset [\underline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h);\overline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)].$$

Под первой сопряженной экстремальной задачей в этом случае мы будем понимать задачу отыскания оптимального направления или последовательности направлений, вдоль которых минимизируется $\max |A_{sub}\Phi(y,h)|$.

Рассмотрен ряд примеров поиска оптимального направления для субгладких вариационных функционалов с негладкими интегрантами различного типа. При этом мы рассматриваем случаи, когда негладкость создается либо модуляцией, либо осцилляцией, либо их комбинацией. Баран И.В. 53

Рассмотрим, например, модулированный гармонический осциллятор вида

$$\Phi(y) = \int_{0}^{\pi/2} |y'^{2} - y^{2}| dx \qquad \left(y(0) = 0, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right).$$

На экстремали $(y_0 \in C^1[0; \frac{\pi}{2}])$

$$y_0(x) = \begin{cases} \sin x, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-\pi}{4}} \cdot e^x, \ \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

функционал достигает строгого локального минимума (см. [1], пример 5.4).

Непосредственные вычисления приводят к тому, что $|A\Phi(y,h)|$ достигает нулевого минимума при $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

Назовем теперь локальным эксиессом функционала Φ в точке минимума y по направлению $h \in E$ следующий предел:

$$E\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t \to +0} \left(\frac{1}{t} \int_{-t}^{t} \frac{\Phi(y+\tau h) - \Phi(y)}{\tau^2} d\tau\right).$$

Вторую сопряженную экстремальную задачу можно сформулировать следующим образом: отыскать направления h, вдоль которых $|E\Phi(y)(h)^2| \to \min$, либо отыскать последовательность направлений $\{h_n\}$, вдоль которых $|E\Phi(y)(h)^2| \to \inf$.

Заметим, что в силу необходимого условия минимума второго порядка, $\Phi''(y)(h)^2\geqslant 0\ (\forall\ h)$. Таким образом, в C^2 -гладком случае задача сводится к отыскания направлений $h\ (\|h\|=1)$, вдоль которых минимизируется $\Phi''(y)(h)^2$.

В частности, при выполнении достаточного условия $\Phi''(y)(h)^2 \geqslant \gamma^2 \|h\|^2$, задача сводится к отысканию направлений, вдоль которых минимизируется константа γ^2 .

В негладком случае мы рассмотрим две ситуации. Первая состоит в том, что существует $\Phi^{[\prime\prime]}(y)(h)^2$. Тогда $E\Phi(y)(h)^2=\Phi^{[\prime\prime]}(y)(h)^2$ и задача сводится к минимизации константы положительной определенности для $\Phi^{[\prime\prime]}(y)(h)^2$.

В рассмотренном выше примере можно показать, что

$$\inf_{\|h\|=1} E\Phi(y)(h)^2 = 0.$$

Во второй ситуации существует второй симметрический субдифференциал

$$\partial_{sub}^{[\prime\prime]} \Phi(y)(h)^2 = \underset{t \to +0}{\text{sublim}} \ \frac{\Phi(y+2th) - 2\Phi(y) + \Phi(y-2th)}{t^2}.$$

В этом случае мы рассматриваем понятие многозначного локального суб-эксцесса:

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \underset{\delta \to +0}{\text{sublim}} \left(\frac{1}{t} \int_{-t}^{t} \frac{\Phi(y+\tau h) - \Phi(y)}{\tau^2} d\tau\right).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если функционал Φ симметрически субдифференцируем в точке y по направлению $h \in E$, то

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \partial_{sub}^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2 \subset [\underline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2; \overline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2].$$

В этом случае под второй сопряженной экстремальной задачей мы понимаем задачу отыскания оптимального направления, вдоль которого минимизируется $\max E_{sub}\Phi(y)(h)^2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов И.В., "Введение в сублинейный анализ", Современная математика. Фундаментальные направления, 53, 64–132 (2014).
- [2] Орлов И.В., Баран И.В. "Введение в сублинейный анализ 2: Симметрический вариант", Современная математика. Фундаментальные направления, 57, 108-161 (2015).
- [3] Баран И.В. "Симметрические характеристики и сопряженная экстремальная задача", Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VI, 13-14 (2016).

Lagrange Multipliers Theorem for a General Optimization Problem with an Infinite Number of Constraints

Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.

dmitruk@member.ams.org, osmolovski@uph.edu.pl ЦЭМИ РАН, Россия 117418, Москва, Нахимовский проспект, 47; Университет технических и гуманитарных наук, Польша, г. Радом, ул. Мальчевского, 20-а

Правило множителей Лагранжа для общей задачи на экстремум с бесконечным числом ограничений

Пусть X,Y, и $Z_i,$ $i=1,\ldots,\nu,$ есть банаховы пространства, $\mathcal{D}\subset X$ — открытое множество, $K_i\subset Z_i,$ $i=1,\ldots,\nu,$ — замкнутые выпуклые конусы с непустой внутренностью. Пусть заданы отображения $F_0:\mathcal{D}\to\mathbb{R},\;g:\mathcal{D}\to Y\;$ и $f_i:\mathcal{D}\to Z_i,\;i=1,\ldots,\nu.$ Рассмотрим следующую задачу на экстремум:

$$F_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \in K_i, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad g(x) = 0.$$

Через $K_i^0:=\{z_i^*\in Z_i^*:\ \langle z_i^*,K_i\rangle\leqslant 0\}$ обозначим полярный конус к K_i , $i=1,\ldots,\nu$.

Отметим, что обычное ограничение неравенства $f_i(x) \leq 0$, где $f_i: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — заданные функционалы, также можно представить в виде $f_i(x) \in K_i$, если положить $K_i = \mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$. Тогда $K_i^0 = \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$. С другой стороны, все ограничения неравенства $f_i(x) \in K_i$ можно записать как одно ограничение $f(x) \in K$, если задать отображение $f: X \to Z = Z_1 \times \ldots \times Z_{\nu}, \ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{\nu}(x))$. Однако мы рассматриваем задачу в виде (1), чтобы сохранить визуальную связь с традиционными постановками.

Предположения. 1) Целевая функция F_0 и отображения f_i дифференцируемы по Фреше в некоторой точке $x_0 \in \mathcal{D}$; оператор g строго дифференцируем в x_0 (предположения гладкости), 2) образ производной $g'(x_0)$ замкнут в Y (ослабленная регулярность ограничения равенства).

Несмотря на то, что все отображения здесь дифференцируемы, задача (1) не является стандартной гладкой задачей, так как каждое ограничение $f_i(x) \in K_i$ может задаваться бесконечным числом скалярных неравенств (ибо пространства Z_i могут быть бесконечномерными). По этой причине задачу (1) можно назвать nonyenadkoù.

Теорема. Пусть x_0 есть точка локального минимума в задаче (1). Тогда найдутся множители Лагранжа $\alpha_0\geqslant 0,\ z_i^*\in Z_i^*,\ i=1,\ldots,\nu,$ и $y^*\in Y^*,$ не все равные нулю, такие что $z_i^*\in K_i^0$ и $\langle z_i^*,\ f_i(x_0)\rangle=0,\ i=1,\ldots,\nu$ (т.е. каждый z_i^* есть внешняя нормаль к конусу K_i в точке x_0), и при этом функция Лагранжа $\mathcal{L}(x)=\alpha_0F_0(x)+\sum_{i=1}^{\nu}\langle z_i^*,\ f_i(x)\rangle+\langle y^*,\ g(x)\rangle$ стационарна в x_0 :

$$\mathcal{L}'(\bar{x}) = \alpha_0 F_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{\nu} z_i^* f_i'(x_0) + y^* g'(x_0) = 0.$$
 (2)

Последнее равенство называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

Эту теорему удобно использовать, например, в задачах оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями неравенства

 $\Phi(t,x(t)) \leqslant 0$ и $\varphi(t,x(t),u(t)) \leqslant 0$. Их можно трактовать как принадлежность $\Phi(t,x(t))$ и $\varphi(t,x(t),u(t))$ конусам неположительных функций в пространствах C и L_{∞} соответственно (см. [3]).

Доказательство проведем по схеме Дубовицкого-Милютина [1]. Она состоит из двух шагов. На первом шаге делается переход от локального минимума к несовместности системы (суб)линейных аппроксимаций всех ограничений и целевого функционала задачи, а на втором шаге эта несовместность переписывается в виде соответствующего уравнения Эйлера-Лагранжа.

Без нарушения общности считаем, что все ограничения неравенства активны в точке x_0 , т.е. все $f_i(x_0) \in \partial K_i$. Для каждого i введем конус внутренних направлений к конусу K_i в точке $z_i = f_i(x_0)$:

$$C_i = \{\bar{z} \in Z_i \mid \exists \alpha > 0 : f_i(x_0) + \alpha \bar{z} \in \text{int } K_i \}.$$

Нетрудно видеть, что $C_i=\operatorname{int} K_i-\mathbb{R}_+x_0$, и этот конус непустой, выпуклый и открытый. Введем также выпуклый открытый конус $\Omega_i=\{\bar x\in X\mid f_i'(x_0)\,\bar x\in C_i\}$ — прообраз конуса C_i при линейном отображении $f_i'(x_0):X\to Z_i$.

Рассмотрим систему аппроксимаций для задачи (1) в точке x_0 :

$$f_0'(x_0)\,\bar{x} < 0, \quad \bar{x} \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, \nu, \qquad g'(x_0)\,\bar{x} = 0.$$
 (3)

Лемма о несовместности системы аппроксимаций. Пусть в точке x_0 имеется локальный минимум, и $g'(x_0)X = Y$ (условие регулярности Люстерника). Тогда не существует $\bar{x} \in X$, для которого выполнялась бы система (3).

Доказательство. Допустим, такой \bar{x} есть. Рассмотрим точку $x_0+\varepsilon \bar{x}$ при $\varepsilon\to 0$. Для нее $g(x_0+\varepsilon \bar{x})=g(x_0)+g'(x_0)\varepsilon \bar{x}+o(\varepsilon)=o(\varepsilon)$, и тогда по теореме Люстерника об оценке расстояния до множества нулей нелинейного оператора [2] существует поправка $r_\varepsilon=o(\varepsilon)$, такая что $g(x_0+\varepsilon \bar{x}+r_\varepsilon)=0$.

Далее, для всех i имеем $f_i(x_0) \in K_i$ и $f_i(x_0) + \alpha f_i'(x_0) \bar{x} \in \operatorname{int} K_i$ при некотором $\alpha > 0$, поэтому весь полуинтервал $(f_i(x_0), f_i(x_0) + \alpha f_i'(x_0) \bar{x}]$ лежит в $\operatorname{int} K_i$. Отсюда $f_i(x_0 + \varepsilon \bar{x} + r_\varepsilon) = f_i(x_0) + \varepsilon f_i'(x_0) \bar{x} + o(\varepsilon) \in \operatorname{int} K_i$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Аналогично, $F_0(x_0 + \varepsilon \bar{x} + r_\varepsilon) < F_0(x_0)$ для малых $\varepsilon > 0$, так как $F_0'(x_0) \bar{x} < 0$ и $||r_\varepsilon|| = o(\varepsilon)$.

Таким образом, при достаточно малых $\varepsilon>0$ точка $x_0+\varepsilon\bar{x}+r_\varepsilon$ удовлетворяет всем ограничениям задачи (1) и дает меньшее значение функционала, чем x_0 , что противоречит локальному минимуму в x_0 .

Переход к уравнению Эйлера—Лагранжа. Рассмотрим сначала регулярный случай, когда $g'(x_0)X=Y$. Пусть, кроме того, $F'_0(x_0)\neq 0$ и Im $f'_i(x_0)\cap C_i\neq\emptyset$ для всех $i=1,\ldots,\nu$ (основной, невырожденный случай). Тогда все конусы в системе (3) непусты. По теореме Дубовицкого—Милютина о непересечении конусов [1] найдется опорный функционал x_0^* к полупространству $\Omega_0=\{\bar x:F'_0(x_0)\bar x<0\}$, опорные функционалы x_i^* в точке x_0 к конусам Ω_i , $i=1,\ldots,\nu$, и опорный функционал x^* к подпространству $\Omega=\{\bar x:g'(x_0)\bar x=0\}$, не все из которых равны нулю, сумма которых равна нулю: $x_0^*+x_1^*+\ldots+x_\nu^*+x^*=0$. Как известно, $x_0^*=-\alpha_0F'_0(x_0)$ при некотором $\alpha_0\geqslant 0$, по теореме Фаркаша—Минковского каждый $x_i^*=z_i^*f'_i(x_0)$ при некотором $z_i^*\in K_i^*$ таком, что $\langle z_i^*,f_i(x_0)\rangle=0$, и по лемме об аннуляторе ядра сюрьективного оператора $x^*=y^*g'(x_0)$ при некотором $y^*\in Y^*$. Таким образом, получаем равенство

 $-\alpha_0 F_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{\nu} z_i^* f_i'(x_0) + y^* g'(x_0) = 0.$

Ясно, что $\alpha_0+\sum \|z_i^*\|+\|y^*\|>0$ (иначе все опорные функционалы равны нулю). Заменив теперь все z_i^* на $-z_i^*\in K_i^0$ и y^* на $-y^*$, получаем уравнение Эйлера–Лагранжа в требуемом виде (2).

Рассмотрим вырожденные случаи. Если $F_0'(x_0)=0$, положим $\alpha_0=1$ а все остальные функционалы возьмем нулевыми. Если $\exists i$ для которого $\mathrm{Im}\, f_i'(x_0)\cap C_i=\emptyset$, найдется ненулевой z_i^* , разделяющий подпространство $\mathrm{Im}\, f_i'(x_0)$ и открытый конус C_i . Тогда $\langle z_i^*\, K_i\rangle\leqslant 0$ и $\langle z_i^*\, , f_i(x_0)\rangle=0$. Полагая все остальные функционалы нулевыми, получим (2). Наконец, если $g'(x_0)X\neq Y$, то, поскольку подпространство $g'(x_0)X$ замкнуто в Y, имеется ненулевой функционал $y^*\in Y^*$ зануляющийся на этом подпространстве, т.е. $y^*g'(x_0)=0$. Полагая все остальные функционалы нулевыми, получаем опять (2).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. "Задачи на экстремум при наличии ограничений", $\mathcal{K}BM$ и $M\Phi$, т. 5, N 3, 395–453 (1965).
- [2] А.В. Дмитрук, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский. "Теорема Люстерника и теория экстремума", $\mathit{УMH}$, т. 35, № 6, 11–46 (1980).
- [3] A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii. "Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations subject to state and mixed constraints", SIAM J. on Control and Optimization, v. 52, No. 6, 3437–3462 (2014).

Сублинейное расширение алгебраической К-теории Гротендика

Орлов И.В.

igor_v_orlov@mail.ru

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского, проспект Вернадского, 4, Симферополь, 295007, РФ

Сублинейное расширение алгебраической К-теории Гротендика

Строится коммутативная диаграмма, связывающая три базовых объекта коммутативной алгебра (абелевы полугруппы, регулярные абелевы полугруппы, абелевы группы) с тремя базовыми объектами коммутативного анализа (выпуклые конусы, регулярные выпуклые конусы, линейные пространства) с помощью пяти типов канонических вложений. Тем самым возникает расширение алгебраической К-теории Гротендика, включающее базовые объекты не только линейного, но и сублинейного анализа.

Базовые объекты: терминология, обозначения, вспомогательные результаты

Абелева полугруппа: $X = \{x\}$. Для удобства мы рассматриваем абелевы полугруммы с нулем (моноиды). Терминология аддитивная. Обозначение категории: (S).

Регулярная (абелева) полугруппа: абелева полугруппа с законом сокращения (cancellation law): $(x + y = x + z) \Rightarrow (y = z)$. Обозначение категории: (RS).

Абелева группа. Обозначение категории: (G).

Выпуклый конус: абелева полугруппа по сложению векторов, образующая модуль над \mathbb{R}_+ по умножению скаляров из \mathbb{R}_+ на векторы. Обозначение категории: (Con).

Регулярный выпуклый конус: выпуклый конус, удовлетворяющий закону сокращения. Обозначение категории: (RCon).

Линейное пространство над \mathbb{R} : Обозначение категории: (Lin).

Теорема о вложении. Абелева полугруппа может быть изоморфно (инъективно и аддитивно) вложена в абелеву полугруппу тогда и только тогда, когда она регулярна.

Следствие. Выпуклый конус может быть изоморфно (инъективно и \mathbb{R}_+ -линейно) вложен в линейное пространство (над \mathbb{R}) тогда и только тогда, когда он регулярна.

Определение. Минимальная абелева группа, содержащая данную регулярную полугруппу X, называется *группой Гротендика* для полугруппы X и обозначим Gr(X). Соответственно, минимальное линейное пространство, содержащее данный регулярный выпуклый конус X, назовем *пространством Гротендика* для конуса X и обозначим $Gr_L(X)$.

Промежуточные объекты: терминология, обозначения, вспомогательные результаты

Делимая абелева полугруппа: абелева полугруппа, удовлетворяющая условию

$$\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} \exists y \in X : \underbrace{y + \dots + y}_n := \sum_n y = x.$$

Обозначение категории: (DS) (соответственно, (DRS), (DG)).

Однозначно делимая абелева полугруппа: делимая абелева полугруппа, удовлетворяющая условию: $\forall x_1, x_2 \in X, \ \forall n \in \mathbb{N} (\sum_n x_1 = \sum_n x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2).$

 $\mathbb{N}\left(\sum_{n} x_{1} = \sum_{n} x_{2}\right) \Rightarrow (x_{1} = x_{2}).$ Следствие: $\left(\left(\sum_{m} x = \sum_{n} x, x \neq 0\right) \Rightarrow (m = n)\right)$. Обозначение категории: (US) (соответственно, (URS), (UG)).

Теорема. Любая абелева полугруппа (регулярная абелева полугруппа, абелева группа) может быть изоморфно вложена в делимую абелеву полугруппу (регулярную абелеву полугруппу, абелеву группу).

Основные вложения

Регуляризация: $R:(S) \to (RS), (DS) \to (DRS), (US) \to (URS), (Con) \to (RCon).$

 $\left\|\#\right\|$ Введем фактор-отношение в $X=\{x\}: (y_1Ry_2)\Leftrightarrow (\exists x\in X: x+y_1=x+y_2).$ Пусть $X_R=\{\widehat{x}\}=X_{/R}$ — фактор-полугруппа (группа) с соответствующими фактор-операциями, тогда $R:X\to \widehat{X}$ — каноническое вложение: $x\ni X\stackrel{R}{\longrightarrow}\widehat{x}\in X_R.$

Формальная разность: $F:(RS)\to (G),\ (DRS)\to (DG),\ (URS)\to (UG),\ (RCon)\to (Lin).$

Введем фактор-отношение в $X \times X = \{y, z | y, x \in X\}$:

$$((y_1, z_1)F(y_2, z_2)) \Leftrightarrow (y_1 + z_2 = y_2 + z_1).$$

Пусть $X_F = X \times X_{/R}$ –регулярная фактор-полугруппа с соответствующими фактор-операциями сложения и умножения на неотрицательные скаляры.

Введем операцию вычитания в X_F через инволюцию:

$$-(y,z) = (z,y).$$

Каноническое вложение: $F_X \to X_F$ определим равенством

$$Rx = (x, 0) = \{(y, z) | x + y = z\}; \quad \widehat{X} = \{(x, 0)\}.$$

Таким образом, $X_F = \widehat{X} - \widehat{X}$ – формальная разность \widehat{X} с собой. $\boxed{\#}$

Делимость: $D:(S) \to (DS), (RS) \to (DRG), (G) \to (DG).$

Введем фактор-отношение в $X \times \mathbb{N}$:

$$((x_1, n_1)D(x_2, n_2)) \Leftrightarrow \left(\sum_{n_2} x_1 = \sum_{n_1} x_2\right).$$

Пусть $X_D = X \times \mathbb{N}_{/D}$ – фактор-полугруппа с соответствующими фактороперациями, тогда каноническое вложение $D:X\to X_D$ определяется равенством:

$$Dx = (x, 1) = \{(y, n) | x = \sum_{n} y\}.$$

Однозначная делимость: U : (DS) \rightarrow (US), (DRS) \rightarrow $(URG), (DG) \rightarrow (UG).$

| Введем фактор-отношение в $X = \{x\}$: $(x_1Ux_2) \Leftrightarrow$

 $(\exists n \in \mathbb{N}: \sum_n x_1 = \sum_n x_2)$. Пусть $X_U = X_{/U}$ – делимая фактор-полугруппа с соответствующими фактор-операциями; тогда каноническое вложение $U:X \to X_U$ определяется равенством:

$$Ux = \widehat{x} = \{y \in X | \exists n \in \mathbb{N} : \sum_{n} x = \sum_{n} y\}. \boxed{\#}$$

Модуляция: $M:(US) \to (Con), \ (URS) \to (RCon), \ (UG) \to (Lin).$ # Введем в точно делимой абелевой полугруппе X "аддитивное умножение" неотрицательных скаляров на векторы, вначале для рациональных скаляров.

- 1. Если $x\in X,\ r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}_+,$ то положим $(y=r*x)\Leftrightarrow (\sum_m x=\sum_n y).$ 2. Если $\gamma\in\mathbb{R}_+$ определяется сечением Дедекинда A/B в $\mathbb{Q}_+,$ то поло-

$$\gamma * x = (A * x/B * x).$$

3. Определим X_M как аддитивную оболочку множества $\mathbb{R}_+ * X$ относительно сложения по Минковскому:

$$X_M = \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k * x_k \middle| \gamma_k \in \mathbb{R}_+, \ x_k \in X, \ n \in \mathbb{N} \right\};$$

при этом модуляция продолжается на X_{M} очевидным образом:

$$\alpha * (\sum_{k=1}^{n} \gamma_k * x_k) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha \gamma_k) * x_k.$$

Каноническое вложение X в X_M определяется равенством:

$$Mx = 1 * x = ([0,1]_{\mathbb{Q}} * x | (1,+\infty)_{\mathbb{Q}} * x).$$

Свойства основных вложений

Теорема: Вложение R-аддитивный гомоморфизм ("на"); при этом: $R:(S) \to (RS), \; (DS) \to (DRS), \; (US) \to (URS), \; (Con) \to (RCon).$

Теорема: Вложение F-аддитивный изоморфизм ("в")(в случае $(RCon) \to (Lin)$ – линейный изоморфизм); при этом: $F: (RS) \to (G), (DRS) \to (DG), (URS) \to (UG), (RCon) \to (Lin).$

Теорема: Вложение D-аддитивный изоморфизм ("в"); при этом: $D:(S) \to (DS), \ (RS) \to (DRG), \ (G) \to (DG).$

Теорема: Вложение *U*-аддитивный гомоморфизм ("на"); при этом: $U:(DS)\to (US),\ (DRS)\to (URG),\ (DG)\to (UG).$

Теорема: Вложение M-аддитивный изоморфизм ("в"); при этом: $M:(US) \to (Con), \; (URS) \to (RCon), \; (UG) \to (Lin).$

Замечание: Теоремы 4.1 и 4.2 (по цепочке: полугруппы – регулярные полугруппы – группы) составляют классическую теорию Гротендика.

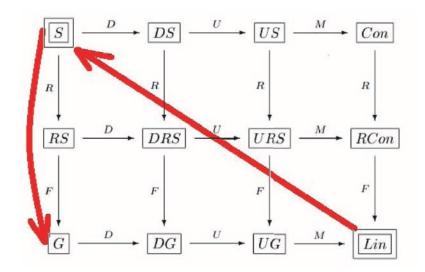
Основной результат

Теорема. Следующая диаграмма коммутативна.

Замечание. Красными стрелками на диаграмме обозначена классическая схема построения группы Гротендика для заданного пространства.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Орлов И.В.* О вложении однозначно делимой абелевой полугруппы в выпуклый корнус.// Матем. Заметки., —2017(в печати).
- [2] Ch. Weibel The K-book: an introdution to algebraic K-theory.//Grad. Studies in Math., 145pp, AMS, 2013.



Constructing of Subdifferential Calculus on the Base of Sublinear Operator Theory

Орлов И.В.

igor_v_orlov@mail.ru

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского, проспект Вернадского, 4, Симферополь, 295007, РФ

Построение субдифференциального исчисления на базе теории сублинейных операторов

Введение

Активное развитие, начиная, в основном, с 60х-70х гг. прошлого века, методов недифференцируемой оптимизации привело к различным конструкциям субдифференциального исчисления. При этом многообразие подходов не закрыло некоторые существенные моменты, такие, например, как отсутствие полномасштабного субдифференциального исчисления высшего порядка. С целью применения в векторном интегрировании, некоторое время назад нами был введен в совместных работах с Ф.С. Стонякиным подробно изучен так называемый компактный субдифференциал. Переход к случаю векторного аргумента (инспирированный негладкими вариационными задачами) естественным образом привел нас от субдифференциала как компактного выпуклого множества к сильному субдифференциалу как многозначному сублинейному оператору с компактными выпуклыми значениями (см. наши совместные с З.И. Хали-

ловой, И.В. Баран, работы). Таким образом, обрисовались рамки нового подхода, в котором место сильного субдифференциала (линейного ограниченного оператора) занимет сильный субдифференциал (сублинейный многозначный ограниченный оператор), а место банаховых пространств – так называемые банаховы конусы.

Примененный подход позволил не только построить основные конструкции исчисления первого порядка — от общих свойств сильных субдифференциалов и теоремы о среднем до негладкой версии теоремы о неявной функции, теоремы об обратной функции, но и позволил, без особых затруднений, дать индуктивное определение сильных субдифференциалов высших порядков (как полисублинейных компактнозначных операторов) и построить основные конструкции исчисления высшего порядка — от теоремы Юнга до формулы Тейлора, теории субквадратичных форм и теории негладких экстремумов.

Приложения к негладким экстремальным задачам, в особенности к вариационным, проявили важную роль ассоциированного с субдифференцируемостью понятия субгладкости (соответствующего порядка). Условие субгладкости позволяет, как выяснилось, перейти от классических условий экстремума в терминах частных производных к соответствующим оценкам в терминах нижних и верхних частных производных.

Резюмируя, отметим взаимосвязанные роли развитой сублинейной теории операторов и развитого субдифференциального исчисления. Демонстрация полезности построения негладкого математического анализа и негладкой теории оптимизации на базе сублинейного многозначного функционального анализа является главной целью настоящей лекции.

Ниже представлен подробный план лекции, вместе с формулировками важнейших понятий, результатов, примеров.

План лекции.

Субнормированный конус

Выпуклый конус $X = \{x\}$, снабженный субнормой $||x|| \le 0$ с условиями: $(||x|| = 0) \Leftrightarrow (x = 0), ||x + y|| \le ||x|| + ||y||, ||\lambda x|| = \lambda \cdot ||x|| \ (\lambda \ge 0).$

Вводятся соответствующие понятия субфундаментальности и суб-полноты. Банахов конус — субполный субнормированный конус.

 $\mathit{Пример}\colon$ конус выпуклых компактов в банаховом пространстве с субнормой $\|C\| = \sup_{y \in C} \|y\|.$

Сублинейные операторы

Пусть X, Y – банаховы конусы, Y упорядочен. Оператор $A: X \to Y$ сублинеен, если $A(x_1 + x_2) \leq Ax_1 + Ax_2$, $A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$ ($\lambda \leq 0$). A

ограничен, если его субнорма $\|A\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$ конечна. $L_{sub}(X,Y)$ – конус ограниченных сублинейных операторов.

Теорема 1. Если Y – банахов конус, то $L_{sub}(X,Y)$ – также банахов конус.

Субоператоры и субфункционалы

Пусть Y – конус выпуклых компактов над банаховым пространством $E:Y=\mathcal{C}(E)$. Тогда операторы $A\in L_{sub}(X,\mathcal{C}(E))$ назовем субоператорами, а операторы $f\in L_{sub}(X,\mathcal{C}(\mathbb{R}))=X_{sub}^*$ — субфункционалами.

В случае $X \stackrel{A}{\to} Y \stackrel{B}{\to} Z$, $Y = \mathcal{C}(E)$, $Z = \mathcal{C}(F)$, введем субкомпозицию:

$$(B \cdot A)_{sub}(x) = \overline{conv}(\underset{y \in Ax}{\cup} By).$$

Теорема 2. $(A \in L_{sub}(X,Y), B \in L_{sub}(Y,Z)) \Rightarrow ((B \cdot A)_{sub} \in L_{sub}(X,Z); ||(B \cdot A)_{sub}|| \leq ||B|| \cdot ||A||).$

Теорема 3. $(f \in X^*_{sub}) \Leftrightarrow (f(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)],$ где \underline{f} надлинеен, \overline{f} сублинеен).

Бисублинейные и полисублинейные операторы

Оператор $B: X_1 \times X_2 \to Y$ бисублинеен, если операторы $B(\cdot,x_2)$ ($\forall x_2 \in X_2$) и $B(x_1,\cdot)$ ($\forall x_1 \in X_1$) сублинейны. Субнорма: $\|B\| = \sup_{\|x_1\| \le 1, \|x_2\| \le 2} \|B(x_1,x_2)\|$. B ограничен, если $\|B\| < \infty$. $L_{sub}(X_1,X_2;Y)$ – соответствующий конус.

Теорема 4. $(Y - банахов конус) \Rightarrow (L_{sub}(X_1, X_2; Y) - банахов конус).$

Теорема 5. Имеет место каноническая изометрия:

$$L_{sub}(X_1, L_{sub}(X_2, Y)) \cong L_{sub}(X_1, X_2; Y).$$

Бисублинейная форма: $p \in L_{sub}(X_1, X_2; \mathcal{C}(\mathbb{R}))$. Субквадраичная форма: $q(x) = p(x, x), \ p \in L_{sub}(X_1, X_2; \mathcal{C}(\mathbb{R}))$. Положительная субопределенность:

$$(q \stackrel{sub}{\gg} 0) \Leftrightarrow (q(x) = [q(x); \overline{q}(x)]; \ q(x) \geqslant \gamma^2 \cdot ||x||^2).$$

Отрицательная субопределенность:

$$(q \stackrel{sub}{\ll} 0) \Leftrightarrow (\overline{q}(x) \leqslant -\gamma^2 \cdot ||x||^2).$$

Базисные селекторы и субобратимость

Пусть E, F — банаховы пространства, $A \in L_{sub}(E, \mathcal{C}(F))$ — субоператор, $H = \{h_i\}$ — базис Гамеля в E. Выберем произвольно $a_i \in Ah_i$, положим $A_sh_i = a_i$ и продолжим A_s по линейности. Операторы A_s назовем базисными селекторами для $A, A_{sub} = \{A_s\}_{s \in S}$ — пакет базисных селекторов.

Теорема 6. (i) $(A \in L_{sub}(E, \mathcal{C}(F))) \Rightarrow (\text{ все } A_s \in (E; F));$ (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ пакет } A_{sub} = \{A_s\}_{s \in S} : Ah \subset A_{sub}h \subset \mathcal{O}_{\varepsilon}(Ah) \ (\forall ||h|| \leqslant 1).$

(Суб-ператор A суб-обратим) \Leftrightarrow ($\exists A_{sub}$: все $A_s \in Isom(E;F)$). Суб-обратный оператор: $A_{sub}^{-1} = \overline{conv}\{A_s^{-1}: A_s \in A_{sub}\}$.

Субпределы и субдифференциалы первого порядка

Пусть E, F — банаховы пространства, $\Psi : E \supset \mathcal{O}(x_0) \to exp(F)$ — многозначное отображение, h — направление в E. Скажем, что $C \subset E$ есть субпредел Ψ в точке x_0 :

$$C = \underset{x \to x_0}{\text{sublim}} \Psi(x),$$

если:

- 1. C непустой выпуклый компакт;
- 2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (0 < \|x x_0\| < \delta) \Rightarrow (C \subset \overline{conv}(\cup_{x \in \mathcal{O}_{\delta}(x_0)} \Psi(x) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon}(C))).$

Компактный субдифференциал $\Phi: E \supset \mathcal{O}(x_0) \to F$ в точке x по направлению h есть субпредел

$$\partial_{sub}\Phi(x,h) = \underset{t \to +0}{\text{sublim}} \frac{\Phi(x+th) - \Phi(x)}{t}.$$
 (1)

Если существует $\partial_{sub}\Phi(x,h)$ по любому направлению, оператор $\partial_{sub}\Phi(x):h\to\partial_{sub}\Phi(x,h)$ сублинеен по h, и субпредел (1) сходится равномерно по $\|h\|\leqslant 1$, то суб-оператор $\partial_{sub}\Phi(x)$ назовем сильным субдифференциалом Φ в точке x.

Заметим, что, с соответствующими изменениями, определение переносится на отображения в банаховых конусах.

Субдифференцируемость, субгладкость, дифференцируемость, гладкость

Пусть $\Phi: E \supset \dot{\mathcal{O}}(x_0) \to F$ субдифференцируемо в $\dot{\mathcal{O}}(x_0)$. Назовем Φ субгладким в точке x ($\Phi \in C^1_{sub}(x_0)$), если существует $\underset{x \to x_0}{\text{sub}} \Phi(x)$.

Теорема 7. $(\Phi \in C^1_{sub}(x_0)) \Rightarrow (существует \partial_{sub}\Phi(x_0)).$

Теорема 8. Пусть $\Phi: E\supset U(x_0)\to \mathbb{R}$. Тогда $(\Phi\in C^1_{sub}(x_0))\Leftrightarrow (\underline{\partial}\Phi(x,\cdot)$ полунепрерывна снизу, $\overline{\partial}\Phi(x,\cdot)$ полунепрерывна сверху в точке x_0).

При этом $\partial_{sub}\Phi(x_0)h \subset [\underline{\partial}\Phi(x_0,h); \overline{\partial}\Phi(x_0,h)]$. В частности, при $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ (\Phi \in C^1_{sub}(x_0)) \Leftrightarrow (\text{все } \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \ \text{полунепрерывны снизу,}$ $\frac{\overline{\partial \Phi_i}}{\partial x_j}$ полунепрерывны сверху).

При этом

$$\partial_{sub}\Phi(x_0,h)\subset\prod_{i=1}^n([\underline{\nabla}\Phi(x_0),\overline{\nabla}\Phi(x_0)],h).$$

Отметим, что в этом случае $C^1 \subset C^1_{sub} \subset Lip$.

Теорема 9. (i) $(\exists \partial \Phi(x)) \Leftrightarrow (\exists \partial_{sub} \Phi(x) = \{\partial \Phi(x)\}) \Leftrightarrow (\exists \partial_{sub} \Phi(x) = \{\partial \Phi(x)\})$ $\{y\}$).

- (ii) Обратно, если $\Phi: \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$ непрерывно на [a;b] и (компактно) субдифференцируемо почти всюду на [a;b], то Φ почти всюду дифференцируемо на [a;b] в обычном смысле.
- (ii) Если $\Phi: \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$ непрерывно субдифференцируемо в точке $x \in [a; b]$, to $(\partial_{sub}\Phi(x) = {\partial \Phi(x)})$.

Общие свойства сильных субдифференциалов

- (i) $\partial_{sub}(f_1+f_2)(x)h \subset \partial_{sub}(f_1)(x)h + \partial_{sub}(f_2)(x)h;$
- (ii) $\partial_{sub}(\lambda f)(x)h = \lambda \cdot \partial_{sub}(f)(x)h;$

- (iii) $\partial_{sub}(f_1, f_2)(x)h \subset (\partial_{sub}f_1(x)h) \times (\partial_{sub}f_2(x)h);$ (iv) $\partial_{sub}f(x_1, x_2)(h_1, h_2) \subset \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{sub}(x_1, x_2)h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{sub}(x_1, x_2)h_2;$ (v) Если $f: \prod_{i=1}^n E_i \to \prod_{j=1}^m F_j,$ то $\partial_{sub}f(x_1, \dots, x_n)(h_1, \dots, h_n) \subset \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{sub}(x_n, x_n)$ $\prod_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{j}}{\partial x_{i}} \right)_{sub} (x_{1}, \dots, x_{n}) h_{i};$ (vi) $\partial_{sub}(g \circ f)(x) h \subset (\partial_{sub}g(f(x)) \cdot \partial_{sub}f(x))_{sub}h$.

Теорема о среднем и лемма Ферма для сильных субдифференциалов

Теорема 10. Пусть $f: E \supset \mathcal{O}([x; x+th]) \to F$ непрерывно на [x; x+th]и (сильно) субдифференцируемо на (x; x + th), тогда

$$f(x+th) - f(x) \in \overline{conv} \left(\bigcup_{0 < \theta < 1} \partial_{sub} f(x+\theta \cdot h) \cdot h \right).$$

В частности

$$||f(x+th) - f(x)|| \le ||\sup_{0 \le \theta \le 1} \partial_{sub} f(x+\theta h)|| \cdot ||h||.$$

Теорема 11.

Если $f:E\supset \mathcal{O}(x)\to \mathbb{R}$ субдифференцируемо в точке x и достигает экстремума в этой точке, то

$$0 \in \partial_{sub} f(x) h \ (\forall h \in E).$$

Субгладкая форма теорем об обратной и неявной функции

Далее E и F – изоморфные банаховы пространства, $f:E\supset \mathcal{O}(x)\to \mathcal{O}(y)\subset F.$

Теорема 12. Если $f \in C^1_{sub}(\mathcal{O}(x))$ и суб-оператор $\partial_{sub}f(x)$ суб-обратим, то f обратимо в некоторой окрестности $\mathcal{O}'(x) \subset \mathcal{O}(x)$. При этом $f^{-1} \in C^1_{sub}(\mathcal{O}'(y))$ и $\partial_{sub}(f^{-1})(y)h \subset (\partial_{sub}f(x))^{-1}h$.

Пусть теперь E,F и G – банаховы пространства, $F\cong G, \ \Phi: E\times F\supset \mathcal{O}(x_0,y_0)\to \mathcal{O}(0)\subset G, \ F(x_0,y_0)=0.$

Теорема 13. Если $\Phi \in C^1_{sub}(\mathcal{O}(x_0,y_0))$ и суб-оператор $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{sub}(x_0,y_0)$ суб-обратим, то уравнение $\Phi(x,y)=0$ задает в некоторой окрестности $\mathcal{O}'(x_0,y_0)\subset \mathcal{O}(x_0,y_0)$ неявную функцию y=y(x). При этом $y(\cdot)\in C^1_{sub}(\mathcal{O}(x_0))$ и

$$\partial_{sub}y(x_0)h \subset \left[\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{sub} (x_0, y_0) \right)_{sub}^{-1} \cdot \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{sub} (x_0, y_0) \right)_{sub} \right]_{sub} h.$$

Сильные субдифференциалы высших порядков

Далее E,F – банаховы конусы, $\Phi: E \supset \mathcal{O}(x) \to F$ сильно субдифференцируемо в U(x). Если отображение $\partial_{sub}\Phi: E \supset \mathcal{O}(x) \to L_{sub}(E;F)$ субдифференцируемо в точке x, то полагаем

$$\partial_{sub}^2 \Phi(x) := \partial_{sub}(\partial_{sub} \Phi)(x) \in L_{sub}(E; L_{sub}(E; F)).$$

Аналогично, по индукции,

$$\partial_{sub}^n \Phi(x) := \partial_{sub}(\partial_{sub}^{n-1} \Phi)(x).$$

Теорема 14. (Теорема Юнга). C точностью до канонической изометрии, можно считать, что $\partial_{sub}^2\Phi(x)\in L_{sub}(E,E;F)$. При этом $\partial_{sub}^2\Phi(x)(h,k)=\partial_{sub}^2\Phi(x)(k,h)$. Аналогично, $\partial_{sub}^n\Phi(x)\in L_{sub}(\underbrace{E,\ldots E}_r;F)$.

Отметим важный частный случай.

Теорема 15. Если Φ дифференцируемо (n-1) раз в $\mathcal{O}(x)$, то

$$\partial_{sub}^n \Phi(x) = \partial_{sub}(\partial^{n-1} \Phi(x)).$$

В частности, если при этом Φ – функционал, то

$$\partial_{sub}^n \Phi(x) \subset \left[\frac{d^n \Phi}{dx^n} (x) (h)^n; \frac{\overline{d^n \Phi}}{dx^n} (x) (h)^n \right].$$

Субгладкость высших порядков

Пусть $\Phi: E \supset \mathcal{O}(x_0) \to F$ n раз субдифференцируемо в $\mathcal{O}(x_0)$. Тогда $(\Phi \in C^n_{sub}(x_0)) :\Leftrightarrow (\exists \underset{x \to x_0}{\text{sublim}} \partial^n_{sub} \Phi(x)).$

Теорема 16. (i) $(\Phi \in C^n_{sub}(x_0)) \Rightarrow (\exists \partial^n_{sub} \Phi(x_0)).$ (ii) B случае $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : (\Phi \in C^n_{sub}(x_0)) \Leftrightarrow ($ все $\frac{\partial^n \Phi(x)}{\partial x_{i_1} \cdots x_{i_n}}$ полунепрерывны снизу; все $\frac{\overline{\partial^n \Phi(x)}}{\partial x_{i_1} \cdots x_{i_n}}$ полунепрерывны сверху в x_0).

Формула Тейлора

Пусть $\Phi: E \supset \mathcal{O}(x) \to F \ (n-1)$ раз дифференцируемо в $\mathcal{O}(x)$ и n раз субдифференцируемо в точке x. Тогда:

$$\Phi(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^k \Phi(x)}{k!} (h)^k \in \frac{1}{n!} \partial_{sub}^n \Phi(x) (h)^n + o(\|h\|^n).$$

Исследование на экстремум

- (A) Локальный экстремум, $\Phi: E \supset \mathcal{O}(x) \to \mathbb{R}$
 - 1. Необходимое условие 1-го порядка (лемма Ферма): $0 \in \partial_{sub} \Phi(x) h$
 - 2. Необходимое условие 2-го порядка (минимум): $\max \partial^2_{sub} \Phi(x) h^2 \geqslant 0$ $(\forall h \in E)$
 - 3. Достаточное условие 2-го порядка (минимум): $\min \partial^2_{sub} \Phi(x) h^2 \geqslant$ $\gamma^2 \|h\|^2 \ (\forall h \in E)$
- (B) Условный экстремум: $\Phi(x,y) \to extr., \ G(x,y) = 0. \ (\Phi: E \times F \to F)$ $\mathbb{R}, G: E \times F \to G \cong F$).

Необходимое условие (лемма Ферма для функции Лагранжа):

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{sub} \subset \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{sub} + \lambda \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{sub}\right]; \\ \\ 0 \in \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub} \subset \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{sub} + \lambda \left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}\right]; \\ \\ G = 0. \end{array} \right.$$

где $F(x,y) = \Phi(x,y) + \lambda [G(x,y)], (\lambda \in G^*).$

Родин А.С.

Вариационные приложения к задачам с субгладким интегрантом

- (i) Случай неподвижной границы (вложение Эйлера-Лагранжа, простое условие Лежандра, достаточные условия Лежандра-Якоби).
- (ii) Случай подвижной границы (обобщенные условия трансверсальности).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов И.В., "Введение в сублинейній анализ", Совреманная математика. Фундаментальніе направления, т. 53, 64–132 (2014).
- [2] Orlov I.V., Smirnova S.I., "Invertibility of multivalued sublinear operators", Eurasian. Math. J., 6, № 1, 6–25 (2015).
- [3] Orlov I.V., "Inverse and impact function theorems in the class of subsmooth maps", Math. Notes., № 99, 619–622 (2016).

On the Relationship Between the Structure Superdifferentials Piecewise Smooth Solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation with the Properties of the Singular Set

Родин А.С.

alexey.rodin.ekb@gmail.com

ИММ УрО РАН, ул. Софьи Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620219, Россия

О связи структуры супердифференциалов кусочно-гладкого решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана со свойствами сингулярного множества

Рассмотривается краевая задача Коши для уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + H(t, D_x \varphi(t,x)) = 0, \quad \varphi(T,x) = \sigma(x), \tag{1}$$

где
$$t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n, D_x \varphi(t,x) = \left(\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_n}\right) = s.$$
 Обозначим $\Pi_T = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n\}.$

Задача (1) рассматривается при следующих предположениях:

- A1) функция H(t, x, s) непрерывна по t, непрерывно дифференцируема по переменным x, s и вогнута по переменной s;
- А2) функция $D_sH(t,x,s)$ является локально липшицевой по переменной s, для любого компакта $D \subset R^n$ существует константа L:

$$||D_{s}H(t,s^{'})-D_{s}H(t,s^{''})||\leqslant L(||s^{'}-s^{''}||)$$

для любых $s^{'},\, s^{''} \in D,\, \forall t \in [0,T];$

70 Родин А.С.

А3) выполнено условие подлинейного роста: существует такая константа $\alpha>0,$ что

$$||D_sH(t,s)|| \leqslant \alpha(1+||s||),$$

для любой точки $(t,s) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Здесь символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму конечномерного вектора.

A4) функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема;

При этих предположениях существует обобщенное, минимаксное, вязкостное решение задачи (1)(см. [1]). В дальнейшем предполагаем, что это решение содержится в следующем классе кусочно-гладких функций.

Определение 1 Функция $\varphi(\cdot):\Pi_T\to R$ называется кусочно-гладкой в $\Pi_T,$ если

(1) Область определения этой функции Π_T имеет следующую структуру

$$\mathrm{int}\Pi_T = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad M_i \bigcap M_j = \varnothing, \quad \mathrm{ec}$$
ли $i \neq j, \quad i,j \in I, \quad I = \{1,2,...N\}\,,$

где M_i — дифференцируемые подмногообразия в Π_T .

(2) Сужение кусочно-гладкой функции $\varphi(\cdot,\cdot)$ на $\overline{M}_j,\,j\in J,$ является непрерывно дифференцируемой функцией, где

$$J := \{i \in I : M_i - (n+1) - \text{мерное многообразие}\},$$

символ \overline{M}_i означает замыкание множества M_i .

(3) Для любых $i\in I,\; (t_1,x_1),\; (t_2,x_2)\in M_i$ выполнено $J(t_1,x_1)=J(t_2,x_2),$ где

$$J(t,x) := \{ j \in J : (t,x) \in \overline{M}_i \}.$$

Это решение $\varphi(\cdot)$ может быть построено с помощью метода характеристик Коши. Выпишем характеристическую систему с краевыми условиями при t=T для задачи (1):

$$\dot{\tilde{x}} = D_s H(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \ \dot{\tilde{s}} = -D_x H(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \ \dot{\tilde{z}} = \langle \tilde{s}, D_s H(t, \tilde{x}, \tilde{s}) \rangle - H(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \ (2)$$

$$\tilde{x}(T,\xi) = \xi, \quad \tilde{s}(T,\xi) = D_x \sigma(\xi), \quad \tilde{z}(T,\xi) = \sigma(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$
 (3)

Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение.

Определение 2 Сингулярным множеством Q для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1) называется множество точек $(t,x) \in \Pi_T$, в которых функция φ недифференцируема.

В данном сообщении представленны результаты исследований связи структуры супердифференциала [2, 3] и сингулярного множества.

Зафиксируем многообразие $M_i, i \in I$, размерности n+1-k, где $k \in \overline{1,n}$, и обозначим его, для простоты изложения, следующим образом $M_{[k]}$.

Родин А.С. 71

Пусть $L_{[k]}(t,x)$ будет касательным подпространством к многообразию $M_{[k]}$ в точке (t,x).

Зафиксируем точку $(t,x) \in Q$. Символом Index (t,x) обозначим множество содержащее два или более параметров $\xi \in \mathbb{R}^n$ такое, что для любой пары ξ^* , $\xi^{**} \in \operatorname{Index}(t,x)$ выполнено следующее условие:

$$\tilde{x}(t,\xi^*) = \tilde{x}(t,\xi^{**}) = x, \quad \tilde{z}(t,\xi^*) = \tilde{z}(t,\xi^{**}) = \varphi(t,x),$$

$$\tilde{s}(t,\xi^*) \neq \tilde{s}(t,\xi^{**}), \quad \xi^* \neq \xi^{**}.$$
(4)

Справедливы следующие утверждения

Теорема 1 Вектор $l \in L_{[k]}(t,x)$, где $l \in R^{n+1}$, тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие

$$\langle D\varphi_i(t,x), l \rangle = \langle D\varphi_i(t,x), l \rangle$$
,

 $\forall i, j \in J(t, x).$

Теорема 2 Пусть в задаче (1) выполнены условия (A1)–(A4) и $(t,x) \in Q$. Тогда для того чтобы $(t,x) \in M_{[k]}$, где $\dim M_{[k]} = n+1-k, \ k \in \overline{1,n}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали решения $\tilde{x}(\cdot,\xi_i^*)$, $\tilde{s}(\cdot,\xi_i^*)$ и $\tilde{z}(\cdot,\xi_i^*)$ характеристической системы (2), (3), $\xi_i^* \in \operatorname{Index}(t,x)$, $i \in \overline{1,k+1}$, такие, что выполнено (4) и $k \times (n+1)$ -матрица D вида

$$D = \begin{pmatrix} -(H_2 - H_1) & s_2^1 - s_1^1 & s_2^2 - s_1^2 & \dots & s_2^n - s_1^n \\ -(H_3 - H_1) & s_3^1 - s_1^1 & s_3^2 - s_1^2 & \dots & s_3^n - s_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(H_{k+1} - H_1) & s_{k+1}^1 - s_1^1 & s_{k+1}^2 - s_1^2 & \dots & s_{k+1}^n - s_1^n \end{pmatrix}$$
(5)

имела ранг k. Здесь $(s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^n) = \tilde{s}(t, \xi_i)$ и $H_i = H(t, \tilde{x}(t, \xi_i), \tilde{s}(t, \xi_i))$. If one adds any row of the form

$$(-(H_{k+2}-H_1) \quad s_{k+2}^1-s_1^1 \quad s_{k+2}^2-s_1^2 \quad \dots \quad s_{k+2}^n-s_1^n),$$

где $(s_{k+1}^1,s_{k+1}^2,\ldots,s_{k+1}^n)=\tilde{s}(t,\xi_{k+1}),\ H_{k+1}=H(t,\tilde{x}(t,\xi_{k+1}),\ \tilde{s}(t,\xi_{k+1})),$ $\xi_{k+1}\in \mathrm{Index}\,(t,x).$

Теорема 3 Если выполнены условия (A1)–(A4), $(t,x) \in Q$ и H = H(s), тогда суперградиенты

$$(-H(\tilde{s}(\xi^*)), \tilde{s}(\xi^*)), \quad \xi^* \in \operatorname{Index}(t, x), \quad \forall (t, x) \in Q,$$

являются угловыми точками выпуклого множества $D^+\varphi(t,x)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Субботин А.И., Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации., М.; Ижевск: Ин-т комп. исследований, (2003).

72 Стонякин Φ .С.

[2] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М., Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление., М.: Наука, (1990).

[3] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ., М.: Мир, (1973).

Applications of Subdifferential Calculus to Bochner Integral Theory

Cтонякин $\Phi.C$.

fedyor@mail.ru

КФУ им. Вернадского, пр-т Вернадского, 4, Симферополь, 295007, РФ

Приложения субдифференциального исчисления к теории интеграла Бохнера

В докладе будет рассмотрено новое понятие субдифференциала отображений в бесконечномерных пространствах, а также его приложения к теории векторного интегрирования. Тематика доклада основана на исследованиях, проведённых нами в период с 2007 по 2016 годы, которые подробно описаны, в частности, в [1].

В случае скалярного аргумента, мы связали новый тип субдифференциала с известной проблемой Радона—Никодима для интеграла Бохнера. Хорошо известно, что наиболее эффективный аналог интеграла Лебега в бесконечномерном случае — интеграл Бохнера — не сохраняет, вообще говоря, одно из принципиальных свойств интеграла Лебега: не всякое абсолютно непрерывное отображение является неопределённым интегралом Бохнера [2]. Наиболее известный подход к этой проблеме заключается в выделении специального класса пространств со свойством Радона—Никодима (RNP), в которых всякое абсолютно непрерывное отображение является неопределённым интегралом Бохнера [3]. Таковы, например, все рефлексивные банаховы пространства. Однако свойством Радона—Никодима не обладают пространства c_0 , $L_1[a;b]$ и C[a;b]. Это означает, что класс таких пространств недостаточно широк для многих конкретных задач анализа.

Мы подходим к указанной проблеме на базе нового понятия компактного субдифференциала отображений вещественного отрезка в произвольные отделимые локально выпуклые пространства (далее — $\Pi B \Pi$).

Далее под субпределом убывающей системы замкнутых выпуклых подмножеств некоторого ЛВП F мы понимаем предел в метрике Хаусдорфа при условии непустоты и компактности пересечения, под $\overline{co}A$ мы будем понимать выпуклое замыкание множества A в ЛВП E.

Определение 1. Если субпредел

$$\partial_{sub}F(x) = \underset{\delta\downarrow 0}{\text{sublim}} \left(\overline{co}\left\{\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \mid 0 < |h| < \delta\right\}\right)$$

существует, то он называется компактным субдифференциалом (или K-субдифференциалом) отображения F в точке $x \in I$. Если $\partial_{sub}F(x)$ существует, то отображение F называется компактно субдифференцируемым (или K-субдифференцируемым) в точке x.

Если F дифференцируемо в точке x, то $\partial_{sub}F(x) = \{F'(x)\}$. В то же время нетрудно построить примеры компактно субдифференцируемых отображений, не имеющих обычной производной. Например, такой будет функция вещественная функция f(x) = |x| в точке $x_0 = 0$. Приведём более нетривиальный пример.

более нетривиальный пример.
Пусть
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $\partial_{sub} f(0) = [-1; 1].$

Сделаем замечание о связи компактной субдифференцируемости с классической дифференцируемостью на отрезке. Доказано, что в случаях конечномерного и бесконечномерного ЛВП E ситуация в этом вопросе полярна: если E конечномерно, то из компактной субдифференцируемости на отрезке вытекает обычная дифференцируемость почти всюду. В то же время для бесконечномерных E можно построить пример всюду компактно субдифференцируемого отображения на [a;b], которое нигде не дифференцируемо, кроме как в одной точке.

Отметим, что описана связь компактного субдифференциала с другими типами субдифференциалов (типа Кларка, Мишеля—Пено, Фреше, Б.Н. Пшеничного и др.). Подробнее этому посвящены работы [4, 5]. Исследованы арифметические свойства компактного субдифференциала,

Теорема 1.

- (i) Если отображение $F:[a;b] \to E$ K-субдифференцируемо в точке x, то для всякого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ отображение $\lambda \cdot F$ также K-субдифференцируемо в точке x, причём верно равенство $\partial_{sub}(\lambda \cdot F)(x) = \lambda \cdot \partial_{sub}F(x)$;
- (ii) (субаддитивность) если отображения $F_{1,2}:[a;b]\to E$ К-субдифференцируемы в точке x, то их сумма $F_1+F_2:[a;b]\to E$ также K-субдифференцируема в точке x и верно включение

$$\partial_{sub}(F_1+F_2)(x)\subset\partial_{sub}F_1(x)+\partial_{sub}F_2(x)$$
.

Теорема 2. Если функция $f:[a;b]\to \mathbb{R}$ и отображение $F:[a;b]\to E$ K-субдифференцируемы в точке x, то их произведение $f\cdot F$ также K-субдифференцируемо в точке x, причём

$$\partial_{sub}(f \cdot F)(x) \subset F(x) \cdot \partial_{sub}f(x) + f(x) \cdot \partial_{sub}F(x)$$
 (1)

Теорема 3. Если функция $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируема в точке x, а отображение $F:[a;b] \to E$ K-субдифференцируемо в точке y=f(x), то композиция $f \circ F$ K-субдифференцируемо в точке x, причём

$$\partial_{sub}F(f(x)) \subset \partial_{sub}F(y) \cdot \partial_{sub}f(x)$$
 (2)

Если хотя бы одно из отображений F и f в (1) и (2) является дифференцируемым в обычном смысле, то включения (1) и (2) заменяются на равенства.

Получен также аналог теоремы о среднем для компактно субдифференцируемых отображений.

Теорема 4. Если отображение $F:[a;b] \to E$ непрерывно на [a;b] и K-субдифференцируемо на (a;b), то

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \in \overline{co} \bigcup_{c \in (a;b)} \partial_{sub} F(c) . \tag{3}$$

Далее, исследован ряд свойств сечений (селекторов) $\widehat{\partial}_{sub}F:I\to E$ многозначных отображений $\partial_{sub}F:I\to 2^E$, включая почти всюду сепарабельнозначность. Это позволило получить следующий результат.

Теорема 5. Пусть $F: I = [a;b] \to E$ сильно абсолютно непрерывно и почти всюду компактно субдифференцируемо на I. Тогда любое сечение $\widehat{\partial}_{sub}F \in \partial_{sub}F$ интегрируемо по Бохнеру на I и верно равенство

$$F(x) = F(a) + (B) \int_{a}^{x} \widehat{\partial}_{sub} F(t) dt \quad (a \leqslant x \leqslant b) . \tag{4}$$

Далее, мы вводим класс компактно абсолютно непрерывных отображений $F:I\to E$. Через $E_C=(spanC,\|\cdot\|_C)$ будем обозначать банаховы пространства, порождённые абсолютно выпуклыми компактами $C\in \mathcal{C}(E)$.

Определение 2. Отображение $F:I\to E$ назовём компактно абсолютно непрерывным на I, если

- (i) $F:I\to F(a)+E_C$ для некоторого абсолютно выпуклого компакта $C\in\mathcal{C}(E);$
- (ii) F является абсолютно непрерывным в пространстве E_C ($F \in AC(I, E_C)$).

Примем обозначение: $F \in AC_K(I, E)$.

Получен следующий критерий компактной абсолютной непрерывности.

Теорема 6. Пусть E — отделимое ЛВП. Тогда $F \in AC_K(I,E) \Longleftrightarrow$

(i) F — неопределённый интеграл Бохнера некоторого отображения $f:I\to E$:

$$F(x) = F(a) + (B) \int_{a}^{x} f(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b) ;$$

 $(ii)\int\limits_a^b\|f(t)\|_Cdt<\infty$ для некоторого $C\in\mathcal{C}(E).$

В классе пространств Фреше справедливо также обратное утверждение.

Теорема 7. Пусть E — пространство Фреше. Тогда для любого интегрируемого по Бохнеру отображения $f:I\to E$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $C\subset E$, что отображение

$$F(x) = F(a) + (B) \int_{a}^{x} f(t)dt$$

принадлежит классу $AC(I, E_C)$.

Отметим интересное следствие из предыдущей теоремы — аналог формулы Лагранжа для отображений в пространства Фреше. Особенностью этого результата является использование замыкания в топологии некоторого пространства E_C вместо исходной топологии пространства E, что несколько уточняет оценку по сравнению с теоремой 4.

Теорема 8. Пусть E — пространство Фреше, отображение $F:[a;b] \to E$ непрерывно на [a;b] и дифференцируемо на $[a;b] \setminus e$, где $mes(e) = mes_w F(e) = 0$, а множество $F'([a;b] \setminus e)$ ограничено. Тогда существует такой абсолютно выпуклый компакт $C \subset E$, что

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \in \overline{co}_{E_C} F'([a; b] \backslash e). \tag{5}$$

Работа подготовлена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых кандидатов наук, код МК-176.2017.1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов И. В., Стонякин Ф.С. Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации. Симферополь: ДИАЙПИ, 2016.-320 с.
- [2] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, $1962.-829~\mathrm{c}.$

76 Стонякин Φ .С.

[3] Diestel J., Uhl J.J. Vector Measures. — Providence, Amer. Math. Soc., 1977.

- [4] Стонякин Ф. С. Сравнение компактного субдифференциала с субдифференциалами Кларка, Фреше и обобщёнными дифференциалами Сассманна. // Компьютерная математика. 2008. N 2. C. 50—56.
- [5] Стонякин Ф. С. Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия «Математика, прикладная математика и механика» — 2009. — № 850. — С. 11–21.

Subdifferential Calculus in Abstract Convex Cones $Cmonskun \Phi.C.$

fedyor@mail.ru

КФУ им. Вернадского, пр-т Вернадского, 4, Симферополь, 295007, РФ

Субдифференциальное исчисление в абстрактных выпуклых конусах

В последние десятилетия активно развивается теория абстрактных локально выпуклых (и, в частности, нормированных) конусов (см., например, [1, 2]). Выпуклыми конусами принято называть набор элементов X с заданными операциями сложения, а также умножения на неотрицательный скаляр, причём X — коммутативная полугруппа по сложению и для произвольных чисел $\lambda, \mu \geqslant 0$, а также элементов $x,y \in X$ верны соотношения:

$$1 \cdot x = x$$
; $(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$; $0 \cdot x = 0$; $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$; $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Попутно, как правило, также требуется выполнение так называемого закона сокращения «cancellation law»: x+y=y+z верно тогда и только тогда, когда x=z.

Выпуклыми конусами с законом сокращения будут, в частности, наборы векторов с неотрицательными координатами, наборы неотрицательных функций, неубывающих функций с естественными операциями сложения и умножения на скаляр, а также наборы выпуклых компактов банахова пространства со сложением по Минковскому. В некоторых выпуклых конусах X возможно ввести аналог нормы $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$:

$$||x|| \ge 0$$
, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $||\lambda x|| = \lambda ||x||$; $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$ (1)

для всяких $x,y\in X$ и произвольного $\lambda\geqslant 0.$

Наша работа посвящена исследованию понятию субдифференциала в специальном классе абстрактных выпуклых нормированных конусов (далее — ВНК) X, допускающих инъективное изометричное вложение в

банахово пространство. Отметим, что мы отправляемся от понятия компактного субдифференциала (или *K*-субдифференциала), ранее исследованного нами совместно с И. В. Орловым для отображений в банаховых пространствах [3]. Для этого подхода необходимо ввести в классе выпуклых конусов с нормой такие понятия, как компактность множества, непрерывность отображения и т.п.

В связи с этим мы будем рассматривать класс выпуклых конусов, инъективно изометрично вложенных в некоторое нормированное пространство. Оказывается, что такой класс конусов удобно ввести на базе свойства отделимости элементов линейными ограниченными сверху функционалами $\ell: X \to \mathbb{R}$.

Определение 1. Будем говорить, что выпуклый нормированный конус X с законом сокращения $\mathit{omdenum}$, если для всяких различных элементов x_1, x_2 из X, существует такой линейный функционал $\ell: X \to \mathbb{R}$, что $\ell(x) \leqslant ||x||$ для всех $x \in X$ и

$$\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$$
, причём $\ell(x_1) > 0$ или $\ell(x_2) > 0$. (2)

Хорошо известно, что выпуклый конус X с нормой линейно, инъективно изометрично вложен в нормированное пространство тогда и только тогда, когда в X существует однородная и инвариантная относительно сдвигов метрика $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ такая, что $d(0,x) = \|x\|$ для всякого $x \in X$. Всякий выпуклый конус X с такой метрикой мы назовём линейным нормированным конусом (ЛНК). Всякий (ЛНК) будет отделимым ВНК. Однако можно привести примеры отделимых ВНК, которые не будут линейно инъективно изометрично вложены ни в какое банахово пространство (один из них рассмотрен в [4]).

Мы рассмотрим ещё 1 пример такого типа. Норма, заданная на выпуклом конусе X, может не быть полунормой ни в каком линейном пространстве E, в которое линейно инъективно вложен X. В качестве примера можно привести набор числовых пар (a,b): $a=0 \Leftrightarrow b=0$ и $a,b\geqslant 0$: $X=\{(0,0)\}\cup\{(a,b)\,|\, a>0$ и $b>0\}$. со следующей нормой:

$$||(a,b)|| = \max\left\{a, \frac{b^2}{a}\right\}$$
при $a \neq 0$ и $||(0,0)|| = 0.$

Можно подобрать такие пары (a,b) (c,d), для которых

$$||(a,b)|| + ||(a+c,b+d)|| < ||(c,d)||,$$

что указывает на невозможность линейного инъективного изометричного вложения данного ВНК ни в какое банахово пространство. Перейдём к перечислению полученных результатов. Во всяком отделимом ВНК мы

доказали существование такой метрики $d: X \times X \to \mathbb{R}$, что d(0,x) = ||x||, что позволяет рассматривать X как метрическое пространство (X,d). Справедлива следующая

Теорема 1. Всякий отделимый ВНК X можно инъективно изометрично и d-непрерывно вложить в некоторое банахово пространство.

Тем не менее, теорема 1 позволяет рассматривать всякий отделимый ВНК как часть некоторого банахова пространства при некотором вложении и соответственно ввести понятие ε -окрестности точки (для положительного числа ε)

$$U(x) = U_{\varepsilon}(x) = \{ y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon \},$$
(3)

а также соответствующие понятия компактности, замкнутости подмножества в X. Это дает возможность ввести понятие компактного субдифференциала отображения $f: X \to Y$, где X и Y — отделимые ВНК.

Далее под субпределом убывающей системы замкнутых выпуклых подмножеств некоторого ВНК X мы понимаем предел в метрике Хаусдорфа (относительно системы окрестностей (3)) при условии непустоты и компактности пересечения, под $\overline{co}A$ мы будем понимать выпуклое замыкание множества A в ВНК X. Пусть в некоторой окрестности U(x) точки $x \in X$ задано отображение $f: X \supset U(x) \to Y$ и фиксировано направление $h \in X$.

Определение 2. Назовем (компактным) субдифференциалом (или К-субдифференциалом) f по направлению h следующий субпредел:

$$\partial_{sub} f(x,h) = \underset{\delta \downarrow 0}{\text{sublim}} \left(\overline{co} \left\{ \frac{f(x+th) - f(x)}{t} : 0 < t < \delta \right\} \right). \tag{4}$$

Если $\partial_{sub}f(x,h)$ сублинеен по h, сублинейный компактнозначный оператор $\partial_{sub}f(x)h=\partial_{sub}f(x,h)$ ограничен по sup-норме и сходимость в (4) равномерна по $\|h\|\leqslant 1$, то назовем $\partial_{sub}f(x)$ сильным компактным субдифференциалом f в точке x. Если $\partial_{sub}f(x)h$ — одноточечное множество для всякого $h\in X$, то f будем называть дифференцируемым в точке x (тогда $\partial_{sub}f(x)h=f'(x)h$).

В случае функционала $f: E \to \mathbb{R}$ верно: $\partial_{sub} f(x,h) = [\underline{\partial} f(x,h); \overline{\partial} f(x,h)]$, где концы отрезка — нижнее и верхнее производные числа Дини функционала f по направлению h:

$$\underline{\partial} f(x,h) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}, \quad \overline{\partial} f(x,h) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}.$$

Исследованы простейшие свойства компактных субдифференциалов в отделимых ВНК: однородность, субаддитивность, аналог цепного правила и т.п. Условие локального минимума (максимума) функционала

 $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ в точке $x_0\in X$ принимает следующий вид:

$$\partial_{sub}f(x,h) \geqslant 0 \quad (\partial_{sub}f(x,h) \leqslant 0)$$

для всякого $h \in X$. Отметим, что в отличие от случая линейного пространства, в выпуклом конусе X при этом возможно, что нулевой оператор $0 \notin \partial_{sub} f(x_0)$.

Получен также аналог теоремы о среднем для компактно субдифференцируемых отображений вещественного отрезка в отделимые ВНК X, которая принимает несколько специфичный вид.

Теорема 2. Если отображение $f:[a;b]\to X$ непрерывно на [a;b] и компактно субдифференцируемо на (a;b), то

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \overline{co} \left\{ \{0\} \bigcup \partial_{sub} f((a; b)) \right\}, \tag{5}$$

где
$$\partial_{sub}f((a;b)) = \bigcup_{c \in (a;b)} \partial_{sub}f(c).$$

Отметим, что вообще говоря, нельзя убрать точку $\{0\}$ справа из (5). Однако при некоторых дополнительных условиях (например, если X — ЛНК) оценку (5) можно заменить на

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \overline{co} \left\{ \partial_{sub} f((a; b)) \right\}.$$

Рассмотрены приложения построенной теории дифференциального и субдифференциального исчисления в отделимых ВНК к следующему аналогу известной задачи Ферма-Торричелли-Штейнера о нахождении точки, минимизирующей сумму расстояний до n фиксированных точек плоскости

Мы рассмотрим следующую вариацию этой задачи. Предположим, что задана некоторая зона достижимости и расстояние от пункта A до пункта B можно вычислить только в ее пределах, а вне этой зоны оно равно $+\infty$. Будем считать, что зона достижимости всякой точки A ограничена конусом A+K, где K задан лучами y=0 и y=kx в неотрицательном квадранте $(x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0)$ декартовой плоскости XOY при фиксированном k>0, т.е. расстояние от точки $A(a_1,a_2)$ до точки $B(b_1,b_2)$ вводится так:

$$d(A,B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, \text{ если } B \in A + K; \\ +\infty, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Будем рассматривать задачу о нахождении оптимальной сети связей точки O с некоторыми пунктами A_1, A_2, \ldots, A_n , расположенными в неотрицательном квадранте XOY. Постановка её заключается в том, возможно

ли это сделать, если разрешено добавлять не более одного «перевалочного» пункта $X_0(x_0,y_0)$? Иными словами, нужно для данных пунктов $A_1(a_1,b_1),\ A_2(a_2,b_2),\ \dots A_n(a_n,b_n)$ найти такую точку $X_0(x_0,y_0)$, что

$$d(0, x_0) + \sum_{k=1}^{n} d(x_0, A_k) \to \min.$$
 (6)

Поставленная задача может быть решена рассмотренной выше методикой дифференциального в выпуклых конусах с нормой. Правда, при этом не всякий локальный экстремум будет глобальным. Поэтому следует различать задачи нахождения точек локального и глобального экстремумов.

Выпишем ответ к задаче (6). Для этого введем дополнительные обозначения. Рассмотрим все такие конусы вида X+K, где X — точка из конуса K, что все точки A_k ($k=\overline{1,n}$) лежат в X+K. Если $A_k\in K$ при всех $k=\overline{1,n}$, то пересечение этих конусов непусто и является конусом вида X_1+K для некоторой точки $X_1(x_1,y_1)$. Обозначим через P фигуру, ограниченную прямыми $y=0,\ y=x_1,\ y=kx$ и $y=x_1+kx$ (P может быть параллелограммом либо отрезком). Именно среди точек из P (функция (6) конечна) и следует искать решение задачи (6). Обозначим через X_2 и X_3 вершины P, отличные от O(0,0) и X_1 (возможно, что $X_2=X_1$ или $X_3=O$). Справедлива следующая

Теорема 3. O, X_1, X_2, X_3 — точки локального экстремума функционала (6). Глобальный экстремум задачи (6) совпадает с точкой O либо X_1 .

Рассматриваются также более нетривиальные аналоги задачи (6), приводящие к недифференцируемым целевым функциям. В этих задачах эффективно работает построенный аппарат исчисления компактных субдифференциалов в выпуклых конусах. Это задачи, в частности, развивают подходы раздела 5 из [5].

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых кандидатов наук, код МК-176.2017.1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Keimel K., Roth W., Ordered cones and approximation, Lecture Notes in Math., 1517, Springer, Berlin, 1992.
- [2] Valero O., "Quotient normed cones", Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 116, No. 2, 175 – 191 (2003).
- [3] Орлов И. В., Стонякин Ф.С. Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации, Симферополь: ДИАЙПИ, 2016.

- [4] Stonyakin F.S.,"An analogue of the Hahn-Banach Theorem for functionals on abstract convex cone", *Eurasian. Math. J.*, 7, No. 3, 89 99 (2016).
- [5] Орлов И. В., Стонякин Ф. С., Смирнова С. И. Учебно-методическое пособие по курсу «Выпуклый и негладкий анализ» для студентов магистратуры факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Симферополь: ДИАЙПИ, 2016.

Alpha Sets in Finite-Dimensional Euclidean Spaces and Their Properties

Ушаков В.Н., Успенский А.А., Ершов А.А.ushak@imm.uran.ru, uspen@imm.uran.ru, ale10919@yandex.ruИММ УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990, Россия

Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства

Понятие α -множества было введено в начале 2000-х годов в [1], оно сформировалось при рассмотрении некоторых задач управления, относящихся к изучению множеств достижимости управляемых систем. Множества достижимости, как правило, невыпуклы. Для одних систем эти множества мало отличаются от выпуклых, для других — весьма ощутимо. В связи с этим возникла естественная потребность в наведении определённой классификации этих множеств по степеням их невыпуклости. Так появилось понятие α -множества в \mathbb{R}^n . Представляет самостоятельный интерес, не связанный с какими-либо задачами управления, вопрос о том, насколько можно продвинуться в распространении теорем выпуклого анализа при переходе от выпуклых множеств к α -множествам.

Приведём определение α -множества и наши основные результаты.

Пусть A — множество в n-мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Под проекцией $p(z^*)$ точки z^* на A мы понимаем ближайшую к z^* точку в A.

Полагаем:

$$\begin{split} &\Omega_A(z^*) = \{p(z^*)\} - \text{множество всех проекций } p(z^*) \text{ точки } z^* \text{ на } A; \\ &\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - \text{выпуклая оболочка множества } \Omega_A(z^*); \\ &\operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*) = \{h = \lambda(z - z^*) : \lambda \geqslant 0, z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\} - \text{конус в } \mathbb{R}^n, \\ &\operatorname{натянутый на множество } \operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\}; \\ &H_A(z^*) - \text{множество всевозможных пар } (h_*, h^*) \text{ ненулевых векторов } h_* \\ &\operatorname{iff}(h_*, h^*) = \arccos \frac{\left\langle h_*, h^* \right\rangle}{||h_*||||h^*||} \in [0, \pi] - \text{угол между векторами } h_* \text{ iff}(h_*, h^*), \\ &(h_*, h^*) \in H_A(z^*); \end{split}$$

$$\begin{split} \alpha_A(z^*) &= \max_{(h_*,h^*)\in H_A(z^*)} (h_*,h^*) \in [0,\pi]; \\ \left\langle h_*,h^* \right\rangle &- \text{скалярное произведение } h_* \text{ и } h^* \text{ из } \mathbb{R}^n, \ ||h_*|| = \left\langle h_*,h^* \right\rangle^{1/2}. \\ &\text{Полагаем } \alpha_A = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0,\pi]. \end{split}$$

Определение 1. Пусть $\alpha_A=\alpha$, Тогда множество A назовём α -множеством.

Отметим, что 0-множество является обычным выпуклым множеством. Примерами π -множеств являются кольцо или множество, состоящее из двух точек.

Свойство 1. Функция $\alpha_A(z)$ полунепрерывна сверху по переменной $z \in \mathbb{R}^n \backslash A$.

Определение 2. Замкнутое множество A и \mathbb{R}^n назовём регулярным множеством в \mathbb{R}^n , если для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$ выполняется условие $z^* \notin \operatorname{co}\Omega_A(z^*)$.

Заметим, что если $\alpha_A < \pi$, то A — регулярное множество, однако, обратное неверно. Примером регулярного π -множества является множество, состоящее из двух замкнутых шаров, касающихся в одной точке.

Определение 3. Замкнутое множество A в \mathbb{R}^n назовём нерегулярным множеством в \mathbb{R}^n , если оно не является регулярным множеством в \mathbb{R}^n , т.е., $\alpha_A(z^*) = \pi$ для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$.

Если считать, что 0-множества составляют левый край спектра α -множеств, то нерегулярные множества можно считать правый край спектра.

Лемма 1. Пусть числа $a\leqslant c< d\leqslant b,\ f\in C[a,b],\ \Gamma=\{(x_1,x_2):x_2=f(x_1),a\leqslant x_1\leqslant b\},\ \gamma=\{(x_1,x_2):x_2=f(x_1),c\leqslant x_1\leqslant d\}.$ Тогда $\sup_{z\in\mathbb{R}^2\backslash\Gamma}\alpha_\Gamma(z)\geqslant \sup_{z\in\mathbb{R}^2\backslash\gamma}\alpha_\gamma(z).$

Лемма 2. Пусть функция $f \in C[a,b]$, график $\Gamma = \{(x_1,x_2): x_2 = f(x_1), a \leqslant x_1 \leqslant b\}$, $\alpha = \sup_{z \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma} \alpha_{\Gamma}(z)$. Тогда $\max_{(x_1,x_2) \in \Gamma} x_2 - \min_{(x_1,x_2) \in \Gamma} x_2 \leqslant |b-a| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Лемма 3. Пусть $f \in C[a,b]$, подграфик $\Gamma_- = \operatorname{hypo} f(\cdot) = \{(x_1,x_2): f(t)\}$

Лемма 3. Пусть $f \in C[a,b]$, подграфик $\Gamma_- = \text{hypo } f(\cdot) = \{(x_1,x_2): x_2 \leqslant f(x_1), a \leqslant x_1 \leqslant b\}, \ \alpha = \sup_{z \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma_-} \alpha_{\Gamma_-}(z)$. Тогда $\min\{f(a),f(b)\}$ —

$$\min_{(x_1, x_2) \in \Gamma} x_2 \leqslant |b - a| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Определение 4. Пусть M — множество в \mathbb{R}^2 . Назовём лакуной участок границы $\gamma \subset \partial M$, гомеоморфный отрезку прямой и такой, что его крайние точки содержаться в ∂ со M, а его внутренние точки — в int со M.

Теорема 1. Пусть $M-\alpha$ -множество в \mathbb{R}^2 . Тогда если все лакуны границы ∂M представимы в виде графиков непрерывных функций, для

которых ось абцисс параллельна отрезку, соединяющему крайние точки лакун, то хаусдорфово расстояние

$$d(M, \operatorname{co} M) \leqslant \lambda(M) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

где $\lambda(M)$ — диаметр множества M.

Будем использовать обозначения: $\rho(z,A) = \min_{a \in A} ||z-a||^2 -$ расстояние от точки до множества, $\mathbb{B}(x_0,\delta) = \{x: \mathbb{R}^n: ||x-x_0|| \leqslant \delta\} -$ замкнутый шар с центром в точке x_0 и радиусом $\delta, A_{\varepsilon} = A + \mathbb{B}(\mathbf{0}, \varepsilon) = \{a+b: a \in A, b \in \mathbb{B}(\mathbf{0}, \varepsilon)\} - \varepsilon$ -окрестность множества A.

Теорема 2. Пусть A — регулярное множество в \mathbb{R}^n . Тогда для любого замкнутого множества B в \mathbb{R}^n ($B \supset A, B \neq A$), для которого $\max_{b \in B} (b, A)$ достигается на B, все точки b множества B, максимально удалённые от A, удовлетворяют включению $b \in \partial B$.

Теорема 3. Пусть A — замкнутое множество в \mathbb{R}^n и $\varepsilon \in (0,\infty)$. Тогда $\alpha_{A_\varepsilon} \leqslant \alpha_A$.

Заметим, что любые два непересекающиеся замкнутые выпуклые множества могут быть отделены друг от друга некоторой гиперплоскостью. Авторами доклада был получен аналог данного утверждения для α -множеств. Ниже сформулируем результаты по отделимости α множеств [2,3].

Обозначим через \mathcal{A}_{α} и \mathcal{B}_{α} совокупность всех замкнутых множеств A в \mathbb{R}^n соответственно с числом $\alpha_A = \alpha$ и $\alpha_A \leqslant \alpha$, где $\alpha \in [0, \pi]$.

Ясно, что
$$\mathcal{A}_{\alpha} \subset \mathcal{B}_{\alpha}$$
 и $\mathcal{B}_{\alpha} = \bigcup_{\beta \in [0,\alpha]} \mathcal{A}_{\alpha}$.

Определение 5. α -гиперплоскостью Γ в \mathbb{R}^n назовём такой гомеоморфный образ гиперплоскости в \mathbb{R}^n , что

- 1. $\Gamma \in \mathcal{A}_{\alpha}$;
- 2. Γ разбивает \mathbb{R}^n на два замкнутых множества в \mathbb{R}^n , гомеоморфных замкнутому полупространству в \mathbb{R}^n .

Замкнутые множества в \mathbb{R}^n из определения 5 обозначим через $\Phi^-(\Gamma)$ и $\Phi^+(\Gamma)$. Из определения 5 вытекает, что эти множества есть элементы из \mathcal{B}_{α} и хотя бы одно из них есть элемент из \mathcal{A}_{α} .

Определение 6. Если $\alpha_{\Phi^-}(\Gamma) = \alpha$ ($\alpha_{\Phi^+}(\Gamma) = \alpha$), то будем называть $\Phi^-(\Gamma)$ ($\Phi^+(\Gamma)$) α -полупространством.

Определение 7. Будем говорить, что множества A и B из \mathbb{R}^n α -отделимы (\mathcal{B}_{α} -отделимы), если существует такая α -гиперплоскость Γ (гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_{\alpha}$) в \mathbb{R}^n , что $A \subset \Phi^-(\Gamma)$, $B \subset \Phi^+(\Gamma)$ либо $A \subset \Phi^+(\Gamma)$, $B \subset \Phi^-(\Gamma)$.

Определение 8. Будем говорить, что множества A и B из \mathbb{R}^n сильно α -отделимы (сильно \mathcal{B}_{α} -отделимы), если существует такая α -гиперплоскость Γ (гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_{\alpha}$) в \mathbb{R}^n и $\varepsilon \in (0,\infty)$, что $A_{\varepsilon} \subset \Phi^-(\Gamma)$, $B_{\varepsilon} \subset \Phi^+(\Gamma)$ либо $A_{\varepsilon} \subset \Phi^+(\Gamma)$.

84 Хачатрян Р.А.

Теорема 4. Пусть скалярные функции f(x) и g(x) определены на замкнутом множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, липшицевы на M с константой $L \in (0, \infty)$ и $\inf_{x \in M} \big(f(x) - g(x) \big) = \gamma > 0$. Тогда в \mathbb{R}^{n+1} существует гиперплоскость $\Gamma^* \in \mathcal{B}_{\alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha/2 = L$, сильно \mathcal{B}_{α} -разделяющая множества $A = \operatorname{epi} f(\cdot)$ и $B = \operatorname{hypo} g(\cdot)$ в пространстве \mathbb{R}^{n+1} .

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект №15-11-10018).

ЛИТЕРАТУРА

- Ушаков В.Н., Успенский А.А., Фомин А.Н., α-множества и их свойства, Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, (2004).
- [2] Ушаков В.Н., Успенский А.А. "α-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства", Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 26, вып. 1, 95–120 (2016).
- [3] Ушаков В.Н., Успенский А.А. "Теоремы об отделимости α -множеств в евклидовом пространстве", Tpy∂ы UMM, 22, № 2, 277–291 (2016).

О необходимых условиях экстремума для негладких функций

Хачатрян Р.А.

кhachatryan.rafik@gmail.com

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

В статье получено правило множителей Лагранжа для экстремальных задачах с негладкими ограничениями типа равенства. Необходимые условия выражаются в терминах асимптотических субдифференциалов.

Приведем некоторые определения из выпуклого анализа.

< a,b> - скалярное производение векторов $a,b\in R^n$. $cl\{M\}-$ замыкание множества $M\subseteq R^n$. Положим

$$con(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x = \lambda x_1, \ x_1 \in M, \ \lambda > 0\}, \ LinM \stackrel{\text{def}}{=} cl\{conM - conM\}.$$

d(x,M)— расстояние от точки x до множества M. $M_1 \stackrel{\bullet}{\longrightarrow} M_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^n/M_2 + x \subseteq M_1\}$ — геометрическая разность множества M_1 и M_2 .

Надграфиком функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется множество

$$epi(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} / \alpha \geqslant f(x)\}.$$

Хачатрян Р.А. 85

Определение 1 [2]. Обобщенная производная Мишеля- Пено функции f по направлению \overline{x} в точке x, обозначаемая $f'_{MP}(x_0, \overline{x})$, определяется так:

$$f'_{MP}(x,\overline{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{w \in R^n} \{ \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda(\overline{x}+w)) - f(x+\lambda w)}{\lambda} \}.$$

Определение 2 [2]. Множество

$$\partial_{MP} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x^* \in R^n / f'_{MP}(x, \overline{x}) \geqslant \langle x^*, \overline{x} \rangle \ \forall \overline{x} \in R^n \}$$

называется субдифференциалом Мишеля-Пено для функции f в точке x.

Определение 3 [1]. Вектор $\overline{x} \in R^n$ называется касательной к $M \subseteq R^n$ в точке $x \in cl\{M\}$, если

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} d(\overline{x}, \lambda^{-1}(M - x)) = 0\}.$$

Множество всех касательных к M в x обозначается $T_{M}(x)$.

Приведем определение асимптотического субдифференциала.

Определение 4 [1]. Пусть $f:R^n\to R-$ локально липшицевая функция и $M\equiv epi(f)$. Пусть $K=T_M((x,f(x))\stackrel{\bullet}{\longrightarrow} T_M((x,f(x)),$ а $f'_{ML}(x,\cdot)-$ положительно однородная выпуклая функция, надграфик которой является конус K.

Множество

$$\partial_{ML} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x^* \in R^n / f'_{ML}(x, \overline{x}) \geqslant < x^*, \overline{x} > \ \forall \overline{x} \in R^n \}$$

называется ML- субдифференциалом функции f в точке x.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть x_0- точка минимума функции $f_0(x)$ при наличии ограничений

$$f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, k, x \in \mathbb{R}^n,$$

где f_i , $i=0,1,\ldots,k$ локально липшицевы функции. Пусть существуют такие векторы w_i , что $f'_{iMP}(x_0,w_i)<0$, $i=1,2,\ldots,k$, а функции $f'_{iMP}(x,w_i)$ полунепрерывны сверху по x в точке x_0 .

Тогда существуют число $\lambda_0\geqslant 0$ и векторы $x_1^*,\dots,x_k^*,$ не все равные нулю одновременно, такие, что

$$0 \in \lambda_0 \partial_{ML} f_0(x_0) + \sum_{i=1}^k x_i^*, \ x_i^* \in Lin \partial_{MP} f_i(x_0), \ i = 1, \dots, k.$$

Теорема 2. Пусть x_0- точка минимума локально липшицевой функции $f_0(x)$ при наличии ограничений

$$f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, k,$$

где $f_i(x)$, $i=1,2,\ldots,k$ локально липшицевы функции, имеющие производные по направлениям.

Тогда существуют числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что

$$0 \in \partial_{ML}(\lambda_0 f_0)(x_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \partial_{ML} f_i(x_0).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] $\mathit{Половинкин}\ E.\ C.\$ Многозначный анализ и дифференциальные включения $//\$ М.- Физматлит.— $2014.-608\$ C.
- [2] Michel P., Penot J.-P. Calcul sous-differential pour les functions lipschitziennes et non lipschitziennes // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser.I. 1984.—v.291.—P. 269—272.

On Transversality Condition for Infinite Horizon Control Problem and Subgradients of the Limit of Smooth Functions

Хлопин Д.В.

khlopin@imm.uran.ru

Институт Математики и Механики им. Н.Н.Красовского, С.Ковалевской 16, Екатеринбург, 620990, Россия

Об условии трансверсальности в задачах управления на бесконечном промежутке и субградиентах предела гладких функций

Основная цель доклада — обсуждение условия трансверсальности как необходимого условия оптимальности в следующей задаче минимизации на бесконечном промежутке

$$\int_0^\infty f_0(t, x, u) dt \to \min$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U,$$

$$x(0) = x_*.$$

Здесь функции r, f_0 скалярны; x — это фазовая переменная, принимающая значения в конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{X} ; а u —

управляющий параметр. Будем также предполагать, что U является замкнутым подмножеством конечномерного евклидового пространства. Под допустимыми управлениями будем понимать элементы множества $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}_{\geqslant 0}, U)$. Наложим также на функции f, f_0 вместе со своими производными по x стандартные для принципа максимума предположения, например условия типа Каратеодори, локальную липшицевость по x, а также подлинейный рост функции f по x.

Введем понятие обгоняющей оптимальности (overtaking optimality). Будем говорить, что допустимое управление \hat{u} (вместе со своей траекторией $\hat{x}, \hat{x}(0) = x_*$) оптимально в смысле обгоняющего критерия, если для всякого допустимого управления u и соответствующей ей траектории x выполнено

$$\liminf_{T \to \infty} \left[\int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt - \int_0^T f_0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \right] \geqslant 0.$$

Пусть такое управление \hat{u} существует. Каждому начальному значению $\xi \in \mathbb{R}$ вместе с порожденной этим управлением траекторией x_{ξ} $(x_{\xi}(0) = \xi)$ сопоставим функцию $T \mapsto J(\xi, T)$ правилом

$$J(\xi, T) = \int_0^T f_0(t, x_{\xi}(t), \hat{u}(t)) dt \quad T > 0.$$

Для простоты всюду далее ограничимся случаем, когда все производные $\frac{\partial J}{\partial \xi}(\xi,T)$ равномерно по $T>0,\xi\in\mathbb{R}$ ограничены.

Как следует из [1], для такого управления найдется решение принципа максимума Понтрягина; можно показать, что в наших условиях это решение будет нормальным, а именно, для гамильтониана $H(x,u,p,t):=pf(t,x,u)-f_0(t,x,u)$ управление $\hat{u}(t)\in U$ максимизирует $H(\hat{x},u,\hat{p},t)$, где $\hat{p}\in C(\mathbb{R}_{\geqslant 0},\mathbb{X}^*)$ — решение сопряженного уравнения $\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),p,t)$. В данной системе необходимых для оптимальности соотношений не хватает еще одного краевого условия на сопряженную переменную, соответствующего условию трансверсальности на бесконечности.

Принципиальной сложностью для получения в таких задачах дополнительных условий на бесконечности, условий трансверсальности, является необходимость нахождения для сопряженного уравнения (то есть для линейной системы) такой асимптотики, что была бы выполнена хотя бы для одного, но и не для континуального числа решений. Самое простое дополнительное условие, $p(T) \to 0$ при $T \to \infty$, в общем случае не является необходимым [1, § 5(iii)],[2, § 6], и достаточно часто оно тривиально, то есть выполнено на всех решениях системы принципа максимума. Однако оно имеет модификацию, выделяющую не более одного

решения сопряженной системы: А.В. Кряжимский и С.М. Асеев для сопряженной переменной предложили [2] потребовать

$$-\hat{p}(0) = \int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial x} (t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) A(t) dt, \qquad (1)$$

где A(t) — матрица Коши для линеаризованной, вдоль оптимальной траектории, динамики f. То же условие можно [6],[9] записать как $p(T)A(T)\to 0$ при $T\to \infty$, но для наших целей нам более интересно будет еще одно эквивалентное представление:

$$-\hat{p}(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{\partial J}{\partial x}(x_*, T).$$

Этому условию всегда соответствует не более одного решения сопряженной системы, а при существовании нужных пределов — в точности одно. Понятно также, что и это условие может не оказаться необходимым условием оптимальности если не существует соответствующего предела, например это так, если принцип максимума в нормальной форме не имеет места. Как показывает пример в [6], само по себе существование несобственного интеграла в (1), гарантируя корректность этой формулы, не гарантирует ее необходимость, однако построение этого примера (равно как во всех известных ранее автору таких примерах) опиралось на неограниченность $\frac{\partial J}{\partial x}(x,T)$ в окрестности начальной точки.

Покажем, что условие (1) может не быть необходимым, даже если все отображения $x\mapsto J(x,T)$ являются 1-липшицевыми. Рассмотрим задачу

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{2} \sin 2x \, dt + \int_{2}^{\infty} \left[\frac{x}{t} \cos tx - \frac{1}{t^{2}} \sin tx \right] dt \to \min$$

$$\dot{x} = u \mathbb{1}_{[0,1]}(t), \quad u \in [-1,1],$$

$$x(0) = 0.$$

Заметим, что для $(\hat{x}, \hat{u}) \equiv 0$ мы имеем $J(x,T) \equiv \frac{1}{T} \sin Tx$ для всех $T \geqslant 2$, $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $f(t,x,u) \equiv 0$ при t>1 и $J(x,T) \to 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ стремится к 0 при $T \to \infty$, то оптимально (в смысле равномерно обгоняющего критерия) любое допустимое управление, в частности это так для $(\hat{x},\hat{u}) \equiv 0$. В силу $f(t,x,u) \equiv u,f_0(t,x,u) \equiv 0$ при t<1, принцип максимума для (\hat{x},\hat{u}) может быть выполнен только с $\hat{p}|_{[0,1]} \equiv 0$. Отсюда $\hat{p}(0) = 0$. Но условие (1) потребовало бы

$$-\hat{p}(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{\partial J}{\partial x}(0, T) = \lim_{T \to \infty} \cos 0 = 1.$$

Итак, условие (1) не является в этом примере необходимым условием оптимальности.

Приведенный выше пример фактически основан на том, что предел производных может никак не соотноситься с производной предела даже если все производные и все пределы достаточно хорошие. С другой стороны, нужное свойство имеет место для субдифференциалов Фреше и предельных субдифференциалов, например если гладкие функции F_n равномерно сходятся к липшицевой функции, то из $0 \in \partial \left(\lim_{n \to \infty} F_n\right)(x_*)$ следует, что 0 является частичным пределом $\frac{\partial F_n}{\partial x}(x_n)$ для некоторой последовательности $x_n \to x_*$ (см., например, [5]). Таким образом, более общее, чем (1), условие можно искать для аналога предельных субдифференциалов при $T \to \infty$.

Общее краевое условие на бесконечности было сформулировано в терминах предельных субдифференциалов по-видимому впервые в [8, Theorem 3.1], там же была показана его необходимость для равномерно обгоняющего критерия без каких-либо дополнительных предположений на асимптотики отображений f, f_0, J, A или $\frac{\partial J}{\partial x}$. То же условие также может быть выражено в виде несобственного интеграла [8],[6], его интерпретация в терминах предельного поведения решений сопряженного уравнения может быть найдена в [3, Theorem 6.1]. В рамках данного доклада можно анонсировать следующее уточнение этих результатов.

Теорема. Пусть управление \hat{u} оптимально в смысле обгоняющего критерия. Пусть для всех $T>0, \xi\in\mathbb{R}$ вектора $\frac{\partial J}{\partial x}(\xi,T)$ равномерно ограничены.

Тогда найдется нормальное решение $(\hat{x},\hat{u},\hat{p})$ принципа максимума Понтрягина, для которого $-\hat{p}(0)$ будет частичным пределом $\frac{\partial J}{\partial x}(\xi,T)$ при $\xi \to x_*, T \to \infty$.

Данная теорема позволяет, вслед за [2],[4],[6],[7],[8] уточнить условия применимости (1)

Следствие. Пусть в условиях теоремы существует предел

$$\lim_{T \to \infty, \xi \to x_*} \frac{\partial J}{\partial x}(\xi, T).$$

Тогда найдется нормальное решение принципа максимума Понтрягина с краевым условием (1).

Само доказательство теоремы сводится к применению принципа максимума Понтрягина для задачи Больца на конечном промежутке времени и использованию предельных свойств субдифференциалов, таких как [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Halkin H., "Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons", *Econometrica*, V. 42, 267-272 (1974).

[2] Aseev S.M. Kryazhimskii A.V., "The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth", *Proc Steklov Inst Math*, V. 257, 1-255 (2007).

- [3] Seierstad A., "Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems", *J Optim Theory Appl*, Vol. 103, 201-230 (1999).
- [4] Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K. "Infinite-horizon optimal control problems in economics" *Russ. Math. Surv.* Vol. 67, 195-253 (2012).
- [5] Ledyaev Yu.S., Treiman J.S., "Sub- and supergradients of envelopes, semicontinuous closures, and limits of sequences of functions", *Russ. Math. Surv*, Vol. 67, 345-373 (2012).
- [6] Khlopin D.V., "Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems" *J. Dyn. Con. Sys.*, Vol. 19, No. 4, 519-552 (2013).
- [7] Aseev S.M., Veliov V. "Needle variations in infinite-horizon optimal control", Variational and optimal control problems on unbounded domains, Providence: AMS, 1-17 (2014).
- [8] Khlopin D.V., "Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem", *Optimization*, V. 64, No. 11, 2417-2440 (2015).
- [9] Belyakov A.O., "Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited", arXiv preprint, 1512.01206, (2015).

Section 2

Nonsmooth Problems of Calculus of Variations and Control Theory

Sufficient Saddle-Point Conditions for Terminal Control Problems: Methods for Solving Antipin A.

asantip@yandex.ru

Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Dorodnicyn Computing Centre, Vavilov st. 40, Moscow, 119333, Russia

We consider the problem of optimal control with linear dynamics and a boundary-value problem in the form of linear programming:

$$x_1^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle \varphi_1, x_1 \rangle \mid A_1 x_1 \leqslant a_1, \ x_1 \in \mathbb{R}^n\},$$
 (1)

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$
(2)

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, x^*(t_1) = x_1^* \in X_1 \subset \mathbb{R}^n,$$
(3)

$$u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] | \|u(\cdot)\|_{L_2} \le \text{const}\}.$$
 (4)

Here D(t), B(t) are $n \times n, n \times r$ -continuous matrix functions, A_1 is fixed matrix of size $m \times n$ ($m \le n$), a_1, x_0 are given vectors. The controls $u(\cdot)$ are elements of space $L_2^r[t_0, t_1]$. The convex closed (in particular, polyhedron) set of admissible controls U does not depend on time. The vector $\varphi_1 \in R^n$ is fixed and defines a normal to a linear function. We will treat this problem as a linear programming problem, formulated in Hilbert space.

The problem can be scalarized by writing out the Lagrange function for it

$$L(p_1, x_1, \psi(\cdot), x(\cdot), u(\cdot)) = \langle \varphi_1, x_1 \rangle + \langle p_1, A_1 x_1 - a_1 \rangle$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t) x(t) + B(t) u(t) - \frac{d}{dt} x(t) \rangle dt$$
 (5)

for all $p_1 \in R^m_+$, $x_1 \in R^n$, $\psi(\cdot) \in \Psi^n_2[t_0,t_1]$, $(x(\cdot),u(\cdot)) \in AC^n[t_0,t_1] \times U$, where $\Psi^n_2[t_0,t_1]$ is a linear variety of absolutely continuous functions from the space adjoint to $L^n_2[t_0,t_1] \times L^n_2[t_0,t_1]$.

By definition, the saddle point $(p_1^*, \psi^*(\cdot); x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ of the Lagrangian, formed by primal $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ and dual $(p_1^*, \psi^*(\cdot))$ variables, satisfies the system of inequalities

$$L(p_1, x_1^*, \psi(\cdot), x_1^*(\cdot), u^*(\cdot)) \leqslant L(p_1^*, x_1^*, \psi_1^*(\cdot), x_1^*(\cdot), u_1^*(\cdot)) \leqslant \leqslant L(p_1^*, x_1, \psi_1^*(\cdot), x_1(\cdot), u_1(\cdot))$$
(1)

for all $p_1 \in R_+^m$, $x_1 \in R^n$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$, $x(t_0) = x_0$. In the regular case, the saddle point of the Lagrangian is a solution to system (1)-(4).

Using the formulas for the transition to conjugate operators, we can write out the dual form of Lagrangian

$$L^{T}(p_1, x_1, \psi(\cdot), x(\cdot), u(\cdot)) = \langle \varphi_1 + A_1^{T} p_1, x_1 \rangle - \langle a_1, p_1 \rangle$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi(t), u(t)\rangle dt - \langle \psi_1, x_1\rangle + \langle \psi_0, x_0\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle D^T(t)\psi(t), u(t)\rangle dt - \langle \psi_1, x_1\rangle + \langle \psi_0, x_0\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle D^T(t)\psi(t), u(t)\rangle dt +$$

for all $p_1 \in R_+^m$, $x_1 \in R^n$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$, $x_0 = x(t_0)$, $\psi_0 = \psi(t_0)$, $\psi_1 = \psi(t_1)$.

Both Lagrangians (primal and dual) have the same saddle point $(p_1^*, \psi^*(\cdot); x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ which satisfies the saddle-point conjugate system

$$L^{T}(p_{1}, x_{1}^{*}, \psi(\cdot), x_{1}^{*}(\cdot), u^{*}(\cdot)) \leqslant L^{T}(p_{1}^{*}, x_{1}^{*}, \psi_{1}^{*}(\cdot), x_{1}^{*}(\cdot), u_{1}^{*}(\cdot)) \leqslant$$

$$\leqslant L^{T}(p_{1}^{*}, x_{1}, \psi_{1}^{*}(\cdot), x_{1}(\cdot), u_{1}(\cdot))$$
(2)

for all $p_1 \in R_+^n$, $x_1 \in R^n$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$. Lagrangians generate a pair of mutually dual problems:

The primal problem follows from the analysis of the saddle-point system for primal Lagrangian (5)

$$x_1^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle \varphi_1, x_1 \rangle \mid A_1 x_1 \leqslant a_1, \ x_1 \in \mathbb{R}^n,$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,
x(t_0) = x_0, x^*(t_1) = x_1^* \in X_1, \ u(\cdot) \in U\},$$
(7)

The dual problem follows from the saddle-point inequalities for dual Lagrangian (6)

$$(p_1^*, \psi^*(\cdot)) \in \operatorname{Argmax}\{\langle -a_1, p_1 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), B(t)u^*(t) \rangle dt \mid p_1 \geqslant 0,$$

$$\psi(\cdot) \subset \Psi_2^n[t_0, t_1], \ \varphi_1 + A_1^T p_1 - \psi_1 = 0, \ D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t) = 0 \ \},$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \le 0, \ u(\cdot) \in U.$$
 (8)

If there is no dynamics in system (7)-(8) then the system takes the form of primal and dual linear programming problems which are well known in finite-dimensional optimization

$$x_1^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle \varphi_1, x_1 \rangle \mid A_1 x_1 \leqslant a_1, \ x_1 \in \mathbb{R}^n\},$$
$$p_1^* \in \operatorname{Argmax}\{\langle -a_1, p_1 \rangle \mid \varphi_1 + A_1^T p_1 = 0, \ p_1 \geqslant 0 \}.$$

Primal and dual problems allow us to form a differential system, which is a sufficient saddle-point condition for the terminal control problem

$$\frac{d}{dt}x^{*}(t) = D(t)x^{*}(t) + B(t)u^{*}(t), \quad x^{*}(t_{0}) = x_{0},$$

$$\langle p_{1} - p_{1}^{*}, A_{1}x_{1}^{*} - a_{1} \rangle \leqslant 0,$$

$$D^{T}(t)\psi^{*}(t) + \frac{d}{dt}\psi^{*}(t) = 0, \quad \varphi_{1} + A_{1}^{T}p_{1}^{*} - \psi_{1}^{*} = 0,$$

$$\int_{t_{0}}^{t_{1}} \langle B^{T}(t)\psi^{*}(t), u^{*}(t) - u(t) \rangle dt \leqslant 0,$$
(9)

for all $p_1 \in R_+^m$, $u(\cdot) \in U$.

Terminal boundary-value system (9) has been received, starting from the necessary and sufficient conditions for the saddle point of the Lagrange function. Equally, an analogous system can be obtained based on the Pontryagin maximum principle. In view of the linear dynamics of the problem under consideration, the Hamiltonian for the optimal control problem takes the form of a variational inequality.

Taking into account the convexity of set U, the Pontryagin maximum principle can be written in the form

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0,
\langle p_1 - p_1^*, A_1x_1^* - a_1 \rangle \leqslant 0,
D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t) = 0, \quad \varphi_1 + A_1^T p_1^* - \psi_1^* = 0,
\langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle \leqslant 0$$
(10)

for all $p_1 \in R_+^m$, $u(\cdot) \in U$ and almost all $t \in [t_0, t_1]$. If we compare both systems obtained, we can see that the «saddle-point principle» is a sufficient condition for the problem, and the maximum principle is only a necessary condition. We can develop methods based on one or another principle. The results will be very different.

Therefore, to solve the saddle-point problem, we use a saddle-point extragradient approach [1,2]. Other sufficient conditions were considered by many authors, for example [3].

The saddle-point extragradient method for solving problem (9) is a controlled process where each iteration breaks up into two half-steps.

The formulas of this iterative method have the form:

1) predictive half-step

$$\frac{d}{dt}x^{k}(t) = D(t)x^{k}(t) + B(t)u^{k}(t), \ x^{k}(t_{0}) = x_{0},$$

$$\bar{p}_{1}^{k} = \pi_{+}(p_{1}^{k} + \alpha(A_{1}x_{1}^{k} - a_{1})),$$

$$\frac{d}{dt}\psi^{k}(t) + D^{T}(t)\psi^{k}(t) = 0, \quad \psi_{1}^{k} = \varphi_{1} + A_{1}^{T}p_{1}^{k},$$

$$\bar{u}^{k}(t) = \pi_{U}(u^{k}(t) - \alpha B^{T}(t)\psi^{k}(t));$$
(11)

2) basic half-step

$$\frac{d}{dt}\bar{x}^{k}(t) = D(t)\bar{x}^{k}(t) + B(t)\bar{u}^{k}(t), \ \bar{x}^{k}(t_{0}) = x_{0},$$

$$p_{1}^{k+1} = \pi_{+}(p_{1}^{k} + \alpha(A_{1}\bar{x}_{1}^{k} - a_{1})),$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\psi}^{k}(t) + D^{T}(t)\bar{\psi}^{k}(t) = 0, \ \bar{\psi}_{1}^{k} = \varphi_{1} + A_{1}^{T}\bar{p}_{1}^{k},$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_{U}(u^{k}(t) - \alpha B^{T}(t)\bar{\psi}^{k}(t)), \ k = 0, 1, 2, ...$$
(12)

Here, in each half-step, two differential equations are solved, and an iterative step in controls is performed.

Note that in this process the iterations in primal variables $(x^k(\cdot), u^k(\cdot))$ always belong to admissible sets for all k. We mean that at each iteration the primal variables are solutions to the differential equations from (11),(12). This process can be considered as internal, or admissible, since each member of iterative sequences always belongs to an admissible set.

Theorem. If the set of solutions to problem (1)-(4) is not empty and belongs to space $R^n \times R^m_+ \times AC^n[t_0,t_1] \times U \times \Psi^n_2[t_0,t_1]$, the terminal problem on the right-hand end is a linear programming problem, then the sequence $(x_1^k,p_1^k,x^k(\cdot),u^k(\cdot),\psi^k(\cdot))$, generated by the method (11),(12) with the step length chosen from the condition $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}K}$, where K > 0, weakly converges to the solution of the problem in controls, converges in the uniform norm in phase and conjugate trajectories, as well as in terminal variables.

Averboukh Yu. 95

In conclusion, we can say that to solve the same minimization problem one can use methods based on necessary or sufficient conditions. In the first case, the iterative process will generate a limit point in which only the necessary conditions will be satisfied. Therefore this point, generally speaking, will not be a solution of the problem. The latter means that such a method is not justified for solving the optimization problem. This method should naturally be called heuristic.

In the other case, sufficient conditions will be satisfied at the limit point, and this means that the point obtained is the solution of the problem. In this case, the method has evidentiary, or a reasonable, character.

The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project 15-01-06045), and the Program of State Support for Leading Scientific Schools (project NSh-8860.2016.1).

References

- [1] A.S. Antipin, E.V. Khoroshilova, "Linear programming and dynamics", *Ural Mathematical Journal*, 1, No. 1, 3–18 (2015).
- [2] A.S. Antipin, E.V. Khoroshilova, "On methods of terminal control with boundary-value problems: Lagrange approach", In: *Optimization and Application in Control and Data Science. Series Title: Springer Optimization and Its Applications.* 17–49, (2016).
- [3] N.P. Osmolovskii, "Sufficient quadratic conditions of extremum for discontinuous controls in optimal control problems with mixed constraints. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 173, No. 1, 1–106, (2011).

Nonsmooth Analysis for Control Problem in the Space of Probabilities

Averboukh Yu.

ayv@imm.uran.ru

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, 16, S. Kovalevskaya str., Yekaterinburg, 620990, Russia

This talk in concerned with the viability problem for the mean field type control problem for deterministic case. For simplicity we consider the case when the phase space is $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. The deterministic mean field type control is a dynamical system on a space of probabilities $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, where the state of the system is given by the probability m(t) obeying the following equation: for all $\varphi \in C(\mathbb{T}^d)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(x) m(t,dx) = \langle f(x,m(t),u(t,x)), \nabla \varphi(x) \rangle m(t,dx).$$

Here u(t, x) is a control policy.

96 Averboukh Yu.

This equation can be rewritten in the operator form

$$\frac{d}{dt}m(t) = \langle f(\cdot, m(t), u(t, \cdot)), \nabla \rangle m(t), \tag{1}$$

Control system (1) describes the evolution of a large population of agents when the dynamics of each agent is given by

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), m(t), u(t)).$$

To study the viability problem we will use the relaxation of the original control system. The main idea of the relaxation is to replace the original control system with the corresponding differential inclusion. Applying this method to the mean field type control system, we formally replace system (1) with the mean field type differential inclusion (MFDI)

$$\frac{d}{dt}m(t) \in \langle F(\cdot, m(t)), \nabla \rangle m(t). \tag{2}$$

Here $F(x,m) \triangleq \operatorname{co}\{f(x,m,u) : u \in U\}.$

We say that the function $[0,T] \ni t \mapsto m(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ is a solution to (2) if there exists a probability χ on $AC([0,T],\mathbb{T}^d)$ such that

- 1. $m(t,G) = \chi\{x(\cdot) : x(t) \in G\}$ for any measurable $G \subset \mathbb{T}^d$;
- 2. if $x(\cdot) \in \text{supp}(\chi)$, then, for a.e. $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}(t) \in F(x(t), m(t)).$$

We put the following conditions:

- 1. $F(x,m)=\operatorname{co}\{f(x,m,u):u\in U\}$, where f is a continuous function defined on $\mathbb{T}^d\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)\times U$ with values in \mathbb{R}^d ;
- 2. *U* is compact;
- 3. there exists a constant L such that, for all $x_1, x_2 \in \mathbb{T}^d$, $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, $u \in U$,

$$||f(x_1, m_1, u) - f(x_2, m_2, u)|| \le L(||x_1 - x_2|| + W_1(m_1, m_2)).$$

We say that $K \subset \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ is viable under MFDI (2) if, for any $m_0 \in K$, there exist T > 0 and a solution to MFDI (2) on [0, T] $m(\cdot)$ such that $m(0) = m_0$, and $m(t) \in K$ for all $t \in [0, T]$.

To characterize the viable sets we introduce the notion of tangent probability to a set. First, denote by $\mathcal{L}(m)$ the set of probabilities β on $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ such that its marginal distribution on \mathbb{T}^d is equal to m and

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \|v\| \beta(d(x, v)) < \infty.$$

Fominyh A. 97

Further, for $\tau > 0$, define the operator $\Theta^{\tau} : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$ by the rule: for $(x, v) \in \mathbb{T}^d x p t d$,

$$\Theta^{\tau}(x,v) \triangleq x + \tau v.$$

If $\beta \in \mathcal{L}(m)$, then $\Theta^{\tau}_{\#}\beta$ is a shift of m through β .

We say that $\beta \in \mathcal{L}(m)$ is a tangent probability to K at $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ if

$$\liminf_{\tau\downarrow 0}\frac{\mathrm{dist}(\Theta^{\tau}{_\#}\beta,K)}{\tau}=0.$$

Denote by $\mathcal{F}(m)$ the set of probabilities $\beta \in \mathcal{L}(m)$ such that

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \operatorname{dist}(v, F(x, m)) \beta(d(x, v)) = 0.$$

The main result of the talk is the following.

Theorem. A closed set $K \subset \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ is viable under MFDI (2) if and only if, for any $m \in K$,

$$\mathcal{T}_K(m) \cap \mathcal{F}(m) \neq \varnothing$$
.

Application of the Steepest Descent Method to Solving Differential Inclusions with Either Free or Fixed Right End Fominyh A.

alexfomster@mail.ru

Saint-Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

The report explores the differential inclusion

$$\dot{x} \in F(x,t), \quad t \in [0,T].$$

Here F(x,t) is a given continuous multivalued mapping, x(t) is a n-dimensional vector-function of the phase coordinates, which is supposed to be continuous with partially continuous derivative in the final interval [0,T], T>0 is a given moment of time. We assume that the function F(x,t) puts in correspondence a certain convex compact set from R^n for every moment of time $t \in [0,T]$ and for every phase point $x \in R^n$.

It is required to find a solution of the differential inclusion, which satisfies the initial condition

$$x(0) = x_0$$

and the final state

$$x(T) = x_T,$$

here $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ are given vectors.

With the help of support functions [1] the original problem is reduced to minimization of a functional in the space of partially differentiable functions in the interval [0,T]. In case of continuous differentiability of a support function of the set-valued mapping in phase variables this functional is Gateaux differentiable [2].

So we find the Gateaux gradient of this functional and obtain necessary and sufficient conditions for a minimum. On the basis of these conditions the numerical method for solving the original problem is described. Numerical examples illustrate the method realization.

References

- [1] R. Rockafellar, Convex analysis, Princeton, Princeton University Press, (1970).
- [2] V. F. Demyanov, Extremum conditions and variational calculus, Moscow, Vysshaya shkola, (2005). (in Russian)

Generalization of the Models Maki–Thompson and Dale–Kendall of the Rumour Spreading in Continuous Time

Karelin V., Bure V., Svirkin M.

vlkarelin@mail.ru, vlb310154@gmail.com, irisha.yagolnik@mail.ru Saint Petersburg State University, Universitetskii prospekt 35, Saint Petersburg,198504, Russia

In this work, the Maki - Thompson model and the stochastic Daley - Kendall model are generalized using the probability approach for dynamics of spreading of rumour in a continuous time. New generalization model depends on a parameter p representing the probability of the outcome of interaction between the two spreaders. The process of spreading rumors is described by a system of linear differential equations. The general solution for dynamics of spreding rumours is obtained and the dependence of the solution on the parameter is investigated numerically.

The main results and generalized model. In this report, which is based on articles [1, 2], we consider three subpopulations: I - subgroup "ignorants" who have not heard the rumour yet, S - subgroup "spreaders" who know the rumour and spread the rumour among the population, R - subgroup "stiflers" who as former spreaders knew the rumour but either forget the rumour or give up to spread the rumour among population.

The model is defined by the following transition probability scheme:

$$\begin{array}{cccc} Interactions & Transitions \\ S \rightarrow I & (i-1,s+1,r) \\ S \rightarrow S & \{(i,s-1,r+1),p \, \frac{s-1}{n}\} \bigvee \{(i,s-1,r+1),(1-p) \frac{s-1}{n}\} \\ & Maki-Thompson & Daley-Kendall \\ S \rightarrow R & (i,s-2,r+2). \end{array}$$

The total population size is given by i+s+r=n+1=N. We introduce the initial conditions $i(0)=\alpha\cdot n,\ s(0)=\beta\cdot n,\ r(0)=\gamma\cdot n,\ \alpha,\beta,\gamma\in(0,1),\ \alpha+\beta+\gamma=1,\ \beta\cdot n\geqslant 1$.

The conditional expected change in the number of subgroups of I, S, R is evaluated by a system of differential equations

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = (-1)\frac{i(t)}{n}, \\ \frac{ds}{dt} = 2 \cdot \frac{i(t)}{n} - \frac{1-p}{n} \cdot s(t) + \frac{1-p-n}{n}, \\ \frac{dr}{dt} = (-1)\frac{i(t)}{n} + (1-p) \cdot \frac{s(t)-1}{n} + 1, \end{cases}$$

generalizes Maki-Thompson model and Daley-Kendall model.

The general solution for i(t), s(t), r(t) and $p \in (0,1)$ has the form

$$\begin{split} i(t) &= \alpha \cdot n \cdot e^{-\frac{t}{n}}.\\ s(t) &= \frac{(1-p-n)}{(1-p)} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot n}{p} \cdot e^{-\frac{t}{n}} + (\beta \cdot n - \frac{(1-p-n)}{(1-p)} + \frac{2 \cdot \alpha \cdot n}{p}) \cdot e^{-\frac{(1-p) \cdot t}{n}}.\\ r(t) &= \gamma \cdot n + n \cdot \left[\frac{(1-p-n)}{n} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot (1-p)}{p} - \alpha\right] + \\ + n \cdot \left(\beta - \frac{(1-p-n)}{(1-p) \cdot n} + \frac{2 \cdot \alpha}{p}\right) - n \cdot \left[\frac{(1-p-n)}{n} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot (1-p)}{p} - \alpha\right] \cdot e^{-\frac{t}{n}} - \\ - n \cdot \left(\beta - \frac{(1-p-n)}{(1-p) \cdot n} + \frac{2 \cdot \alpha}{p}\right) \cdot e^{-\frac{(1-p) \cdot t}{n}} - \frac{1-p-n}{n} \cdot t. \end{split}$$

In this paper, a new generalized model for dynamics of rumour spreading in a continuous time is suggested. The model generalizes the classical Maki - Thompson model for continuous time [1] and the classical stochastic Daley - Kendall model on the basis of a probability approach for the outcome of the interaction between the two spreaders. Our model may serve as a tool understanding the social phenomenon of rumour better. When the rumour process stops, we have s(T)=0. We obtain a new general solution in continuous time for dynamics of spreading of the rumour in the rumour process.

100 Khoroshilova E.

References

[1] Selma Belen, Erik Kropat, "Gerhard-Wilhelm Weber On the classical Maki-Thompson rumour model in continuous time", *Central European Journal Of Operations Researches*, No. 19, 1 - 17 (2011).

[2] D. P. Maki, Thompson M. Mathematical models and applications. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1973).

Optimal Control by Boundary-Value Problem with Minimizing the Sensitivity Function

Khoroshilova E.

khorelena@gmail.com

Lomonosov Moscow State University, CMC Faculty, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia

Introduction. In this talk, a problem of terminal control with linear dynamics on a finite time interval is considered. The right-hand end of the trajectory is defined implicitly as a solution of boundary-value problem. A finite-dimensional optimization problem for sensitivity function under constraints acts as a boundary-value problem. Sensitivity function is generated by the parameter, which is a right-hand part of the functional constraints in the convex programming problem. This parameter is a variable for the sensitivity function. Properties of this function were studied in the paper [1].

To solve the problem of terminal control with implicitly given boundary-value condition, we use an approach based on reducing the problem to finding a saddle point of the Lagrange function [2]. Linear dynamics is regarded as a restriction of equality type. In the convex case, both components of the saddle point form the primal and dual solutions of the original dynamic system. Both components satisfy the saddle-point inequalities. The inequality in primal variables plays the role of the Pontryagin maximum principle. Together with the inequality in dual variables this saddle-point system can be considered as a strengthening of the maximum principle. The proposed approach allows us to construct new iterative methods for solving the saddle-point type problems and prove their convergence to problem solution in all components.

Finite-dimensional boundary-value equilibrium problem. We consider the problem of minimizing the sensitivity function as a finite-dimensional problem on the right-hand end of time interval. The boundary-value problem is a system of two problems. One of them is a parametric convex programming problem, where the vector $y \in Y \subset \mathbb{R}_+^m$ acts as a parameter and is a right-hand part of functional constraints. Regarding this parameter, we construct the optimal value function that will be called the

Khoroshilova E. 101

sensitivity function, due to the alleged regularity constraints (such as Slater condition).

Construction of the sensitivity function leads us to the formulation of the second problem, which is a problem of minimizing the sensitivity function on the set Y of admissible values of y. Together, both problems generate a finite-dimensional system, the solution of which will implicitly define the boundary-value condition of the controlled dynamics:

$$\varphi(y) = f(x^*) = \min\{f(x) \mid g(x) \leqslant y, \ x \in X \subset \mathbb{R}^n\},\tag{1}$$

$$y^* \in \operatorname{Argmin}\{\varphi(y) \mid y \in Y \subset \mathbb{R}_+^m\}. \tag{2}$$

Here f(x) is a scalar convex function; $Y = \{y \ge 0 \mid G(y) \le d, \ d \in \mathbb{R}_+^m\}$; g(x), G(y) are vector functions, each component of which is also convex; D has a fixed vector; \mathbb{R}_+^m is a positive orthant; $X \subset \mathbb{R}^n, \ Y \subset \mathbb{R}_+^m$ are convex closed sets.

We introduce the Lagrange function for problem (1)

$$x^* \in \operatorname{Argmin}\{f(x) \mid g(x) - y^* \leq 0, \ x \in X\}, \ y^* \in Y,$$

for an arbitrary fixed vector $y = y^*$:

$$L(x, y^*, p) = f(x) + \langle p, g(x) - y^* \rangle.$$

This function is defined for all $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^m_+$, $y^* \in \mathbb{R}^m_+$. Saddle point (x^*, p^*) of this function satisfies the saddle-point inequalities

$$f(x^*) + \langle p, q(x^*) - y^* \rangle \le f(x^*) + \langle p^*, q(x^*) - y^* \rangle \le f(x) + \langle p^*, q(x) - y^* \rangle$$
 (3)

for all $x \in X$, $p \in \mathbb{R}^m_+$. We rewrite system (3) in the form

$$x^* \in \operatorname{Argmin}\{f(x) + \langle p^*, g(x) - y^* \rangle \mid x \in X\}, \ y^* \in Y,$$

$$\langle p - p^*, g(x^*) - y^* \rangle \leqslant 0, \quad p \geqslant 0.$$

for all $x \in X$, $p \in \mathbb{R}^m_+$.

Until now, the vector $y^* \in Y$ was arbitrary in our reasoning. Now we will choose this vector so that it minimizes the sensitivity function, that is the solution of (2). This solution satisfies the necessary and sufficient condition for a minimum

$$\langle \nabla \varphi(y^*), y - y^* \rangle \geqslant 0, \quad y \in Y,$$

where $\nabla \varphi(y^*)$ is subgradient of sensitivity function, $Y = \{y \geq 0 \mid G(y) \leq d\}$. We have $\nabla \varphi(y^*) = -p^*$, then the last system of inequalities can be represented as

102 Khoroshilova E.

$$x^* \in \operatorname{Argmin}\{f(x) + \langle p^*, g(x) - y^* \rangle \mid x \in X\}, \ y^* \in Y,$$
$$\langle p - p^*, g(x^*) - y^* \rangle \leqslant 0, \ p \geqslant 0,$$
$$\langle p^*, y - y^* \rangle \leqslant 0, \ y \in Y. \tag{4}$$

It follows that the solution of (4) satisfies (1),(2), and vice versa. In turn, the vectors triplet (x^*, p^*, y^*) is a solution of extreme problems:

$$x^* \in \operatorname{Argmin}\{f(x) \mid g(x) \leq y^*, \ x \in X\},$$

$$p^* \in \operatorname{Argmax}\{\langle p, g(x^*) - y^* \rangle \mid p \geqslant 0\},$$

$$y^* \in \operatorname{Argmax}\{\langle p^*, y \rangle \mid y \in Y\}.$$
(5)

We emphasize that the system (4) or (5) is a necessary and sufficient condition for the solution to problems system (1),(2).

Rewriting variational inequalities in the form of operator equations, we present the problem as

$$x^* \in \text{Argmin}\{f(x) + \langle p^*, g(x) - y^* \rangle \mid x \in X\},\$$

 $p^* = \pi_+(p^* + \alpha(g(x^*) - y^*)),$
 $y^* = \pi_Y(y^* + \alpha p^*), \ \alpha > 0.$

It is reasonable to regularize it and write out in the equivalent form of the proximal operator. The system then takes the form

$$x^* \in \operatorname{Argmin} \left\{ \frac{1}{2} |x - x^*|^2 + \alpha (f(x) + \langle p^*, g(x) - y^* \rangle) \mid x \in X \right\},$$

$$p^* = \pi_+ (p^* + \alpha (g(x^*) - y^*)),$$

$$y^* = \pi_Y (y^* + \alpha p^*). \tag{6}$$

The dual extraproximal method. We apply a dual form of extraproximal method to solve (6):

$$\bar{p}^{k} = \pi_{+}(p^{k} + \alpha(g(x^{k}) - y^{k})),$$

$$y^{k+1} = \pi_{Y}(y^{k} + \alpha \bar{p}^{k}),$$

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}|x - x^{k}|^{2} + \alpha(f(x) + \langle \bar{p}^{k}, g(x) - y^{k} \rangle) \mid x \in X\right\},$$

$$p^{k+1} = \pi_{+}(p^{k} + \alpha(g(x^{k+1}) - y^{k+1})). \tag{7}$$

The theorem of convergence of (7) to the solution was proved.

References

- [1] A. Antipin, A. Golikov, E. Khoroshilova. "Sensitivity function: properties and applications". *Comput. Math. Math. Phys.*, 51, No. 12, 2000–2016 (2011).
- [2] E. Khoroshilova. "Extragradient-type method for optimal control problem with linear constraints and convex objective function", *Optim. Lett.*, 7, No. 6, 1193–1214 (2013).

Solution of Control Problems for Nonlinear Stationary System Taking into Account the Non-Stationary Perturbation

Kvitko A., Firyulina O., Maksina A. alkvit46@mail.ru

Saint-Petersburg Sate University, Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint Petersburg, 198504, Russia

The paper presents an algorithm for constructing of synthesizing control function. This algorithm is sufficiently convenient for numerical implementation and a wide class of nonlinear systems of ordinary differential equations, provide the passage from initial state into an arbitrary given state. We obtain a constructive condition for the choice of finish state for which the passage is possible with regard of the constraints imposed on the control.

1. Introduction

One of the important and complicated aspects of the mathematical control theory is related to the development of methods for constructing of synthesizing control functions ensuring that solution of various types of systems of ordinary differential equations join given points in the phase space. The papers [1]-[11] deal with this issues as present the problem of boundary value problems have been studied in detail for linear and nonlinear systems of special kind. However, the theory for solving boundary value problem for nonlinear systems of general form have not been sufficiently development yet, and the difficulties in its creation are very large. The main efforts of the authors this of the present work focused on developing method of constructing control control function guaranteeing the transfer of wide class of nonlinear stationary control systems from the initial state to a given point in phase space taking into account constraints control and previously unknown disturbances, as well as on finding a constructive sufficient condition that guarantee the existence of solution of the problem formulated and illustrate the effectiveness of the suggested algorithms for the solution of a specific

practical problem. This goal is achieved by reducing the original problem to stabilization of linear non-stationary system and solving the Cauchy problem for the auxiliary system of ordinary differential equation.

2. Statement problem and main result

We consider the control system of ordinary differential equation:

$$\dot{x} = f(x, u) + \mu F(t),\tag{1}$$

here $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $x \in R^n$, $u = (u_1, ..., u_n)^T$, $u \in R^r$, $r \leq n$, $t \in [0, 1]$, N > 0, $\mu \in R^1$, $F = (F_1, ..., F_n)^T$,

$$||u|| \leqslant N.$$

Here F(t) – disturbance.

$$f \in C^{5n}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^n), \quad f = (f_1, \dots, f_n)^T, \quad F(t) \in C^{4n}[0, 1].$$
 (2)

$$f(0,0) \equiv 0,\tag{3}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0),$$

$$rank S = n, (4)$$

$$S = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B).$$

Problem. Find functions $x(t) \in C[0,1], u(t) \in C[0,1],$ that satisfy the system (1) and the conditions

$$x(0) = 0, \quad x(1) = x_0.$$
 (5)

 x_0 – given vector. The functions $x(t) \in C[0,1]$, $u(t) \in C[0,1]$, that are satisfying system (1) and conditions (5), we shall call as solution problem (1),(5).

Theorem. Let conditions (2)-(4) be satisfied for the right part of system (1). Then there exist $\varepsilon > 0$ and $\mu_0 > 0$ such that for all x_0 , $||x_0|| < \varepsilon$ and for all μ , $|\mu| < \mu_0$ there exists the solution of the Problem, which can be obtained by solving the stabilization problem for a linear non-stationary system followed by solving the Cauchy problem for an auxiliary system of ordinary differential equations.

The main idea of the proof of the theorem is to change dependent and independent variables, and thus to reduce the original problem to a problem of stabilization of auxiliary system of nonlinear ordinary differential equations with permanent disturbances. To solve the auxiliary problem, we found a synthesizing control function, which provides the exponential decrease of the fundamental matrix of the linear part of the auxiliary system. At the final stage we return to the origin variables.

3. Conclusion

Analysis of the proof of the theorem obtained in this paper and results of numerical simulation suggest that the algorithm proposed in the paper can be used in solving problems of controlling and other technical objects.

References

- [1] Kalman R., Falb P. and Arbib M., *Topics in Mathematical system Theory*, New York: McGraw-Hill, Translated under the title Ocherki po matematicyeskoi teorii system. Moscow. Mir, (1971).
- [2] Zubov V. I., Lectsii po teorii upravleniya(Lectures on control Theory). Moscow, (1975).
- [3] Dirk A., "Controllability for polinomial systems". Lect. Notes Contr. And Int. Sci. 63, 542-545 (1984).
- [4] Huashu O., "On the controllability of nonlinear control system", Comput and Math., 10, No. 6, 441–451 (1985)
- [5] Balachandran K., "Controllobility of class of pertubet nolinear systems", Kybernetica, 24, No. 1, 61–6413 (1988)
- [6] Korobov V. I., "Almost complete controllability of an autonomous linear system", (Russian) Ukrain. Mat. Zh., 38, No. 2, 163–169 (1986)
- [7] Benzaid Z., "Global null controllability of perturbed linear periodic systems", *JEE Trans. Autom. Contr.*, 32, No. 7, 623–625 (1987).
- [8] Aisagaliev, S. A., "On the Theory of the Controllability of Linear Systems", Autom. Remote Control, 52, part 1, No. 2, 163–171 (1991)
- [9] A. N. Kvitko, D. B. Ykusheva, "Synthesis of discrete stabilization for a nonlinear stationary control system under incomplete information", Vestnic of St. Petersburg University, Mathimatics, 45, No. 2, 65–72 (2013).
- [10] A. N. Kvitko, "On a control problem", Differential equations, 40, No. 6, 789–796 (2004).
- [11] Kvitko, A.N., Taran, T.S., Firyulina, O.S. Control problem with incomplete information.//Proc. IEEE International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP).Saint-Petersburg. 2015.P. 106–109.

Minimax Problem of Simultaneous Optimization of Smooth and Non-Smooth Functionals

Mizintseva M., Ovsyannikov D.

m.mizintseva@spbu.ru

Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab. 7/9, St. Petersburg, 199034, Russia

INTRODUCTION

The problem of the charged particle beam dynamics optimization is studied in various works [1–14].

In the current paper the approach to the beam dynamics optimization, based on the use of smooth and non-smooth functionals for the evaluation of the dynamics of the charged particles, is futher developed.

The problem of simultaneous optimization of the program motion and the ensemble of trajectories is formulated considering the particle distribution density.

The analytical form of the variation of the combination of the functionals and the nessesary optimum conditions are obtained.

MATHEMATICAL MODEL

Let us consider the following system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \qquad x(0) = x_0. \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \qquad x(0) = x_0. \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = F(t, x, y, u), \qquad y(0) = y_0 \in M_0. \tag{2}$$

Here $t \in [0,T]$ — independent variable; x - n—dimensional phase-vector; u = u(t) - r-dimentional piecewise continuous control vector-function from a class D; f(t, x, u) - n-dimentional reasonably smooth vector-function; y n-dimensional phase-vector; F(t, x, y, u) - n-dimensional reasonably smooth vector-function; M_0 — a compact set.

The solution of sub-system (1) is called program motion and the trajectories of system (2) are called disturbed motions.

Let us also consider the equation for the particle distribution density $\rho =$ $\rho(t, y(t))$ alongside the trajectories of the sub-sysytem (2)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \cdot div_y F(t, x, y, u), \qquad \rho(0) = \rho_0(y_0).$$

On the solutions of system (1) we will consider an integral functional

$$I_1(u) = \int_0^T \varphi_1(x(t, x_0, u)) dt + g(x(T)),$$

and on the trajectories of system (2) a minimax functional, that allows to take particle distribution density along the solutions of sub-system (2) into consideration

$$I_2(u) = \max_{y_T \in Y} \varphi_2(y_T, \rho(y_T)),$$

where Y is the set of terminal positions of the sub-system (2)

$$Y = \{ y(T, x_0, y_0, u) \mid u \in D, x(0) = x_0, y_0 \in M_0 \}.$$

In the present paper the following functional is studied

$$I(u) = I_1(u) + I_2(u).$$

The variation of the above functional can be used for development of directional methods of minimization for the problem of charged particle beam dynamics optimization in various electro-physical structures.

References

- A.D. Ovsyannikov, "Control of Program and Disturbed Motions", Vest. SpSU. Ser. 10: Applied Mathematics. Informatics. Control Processes N 2 (2006) pp. 111-124.
- [2] D.A. Ovsyannikov. "Modeling and Optimization Problems of Charged Particle Beam Dynamics". Proceedings of the 4th European Control Conference. Brussels, Belgium, 1997, pp. 1463-1467 (1997).
- [3] M. Mizintseva, D. Ovsyannikov. "On the Problem of Simultaneous Optimization of Program and Disturbed motions". Proceedings of SCP 2015 Conference. Saint Petersburg, Russia, 2015. pp. 195-196 (2015).
- [4] D.A. Ovsyannikov. "Mathematical Modeling and Optimization of Beam Dynamics in Accelerators". Proceedings of the 23rd Russian Particle Accelerator Conference RuPAC 2012. Saint Petersburg, Russia, 2012, pp. 68-72 (2012).
- [5] B.I. Bondarev, A.P. Durkin, A.D. Ovsyannikov. "New Mathematical Optimization Models for RFQ Structures". Proceedings of the 18th Particle Accelerator Conference. New York, USA, 1999. pp. 2808-2810, (1999).
- [6] D.A. Ovsyannikov and V.V. Altsybeyev. "Optimization of APF Accelerators". Problems of Atomic Science and Technology 6.88 (2013) pp. 119-122.
- [7] A.D. Ovsyannikov et al. 'Application of Optimization Techniques for RFQ Design'. Problems of Atomic Science and Technology 3.91 (2014) pp. 116-119.
- [8] D.A. Ovsyannikov, V.V. Alsybeyev. "Mathematical Optimization Model for Alternating Phase—Focusing (APF) LINAC". N 4(86) (2013) pp. 93-96.
- [9] D.A. Ovsyannikov. Mathematical Methods of Beam Control (Leningrad: LSU Pub., 1980).

108 Pilyugin S.

[10] A. D. Ovsyannikov, A.P. Durkin et al. "Acceleration of Different Ion Types in Single RFQ Structure". Problems of Atomic Science and Technology 3.103 (2016) pp. 54-56.

- [11] D.A. Ovsyannikov, V.V. Altsybeyev. "On the Beam Dynamics Optimization Problem for an Alternating-Phase Focusing Linac". Physics of Particles and Nuclei Letters 13.8 (2016) pp. 805-809.
- [12] I.M. Kapchinsky. Theory of Resonance Linear Accelerators (Moscow: Energoizdat, 1982), 398
- [13] A.D. Ovsyannikov, A.Y. Shirokolobov. "Mathematical model of beam dynamics optimization in traveling wave". Proceedings of RuPAC 2012. Saint Petersburg, Russia, 2012. p. 355-357 (2012).
- [14] M. Mizintseva, D. Ovsyannikov. "On the minimax problem of beam dynamics optimization". Proceedings of RuPAC 2016. Saint Petersburg, Russia, 2016. p. 360-362 (2016).

Clustering in Dynamical Systems Pilyugin S.

sergeipil47@mail.ru

St. Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, University av., 28, St. Petersburg, 198504, Russia

We study two types of clustering in dynamical systems (treated as the existence of sets of trajectories with similar behavior).

1. Time clustering.

Consider an autonomous system of ordinary differential equations

$$\dot{x} = F(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$
 (1)

Let $\varphi(t,x)$ be the trajectory of (1) with initial data $\varphi(0,x)=x$ defined for $t\geqslant 0$.

We fix a sequence of numbers

$$T = \{t_0, t_1, \dots\}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots,$$

and a sequence $S = \{S_0, S_1, \dots\}$ of nonempty subsets $S_k \subset \{1, \dots, N\}$.

Denote $\sigma = (T, S)$. We call σ a clustering sequence.

Let us define a "cluster flow" φ_{σ} corresponding to a clustering sequence σ as follows.

Fix a point $x^0 \in \mathbb{R}^N$ and let $\varphi_{\sigma}(t, x^0)$ be defined for $t \in [0, t_1]$ as the solution of the system

$$\dot{x}_i = f_i(x), \ i \in S_0, \quad \dot{x}_i = 0, \ i \notin S_0,$$

with initial data $(0, x^0)$.

Pilyugin S. 109

In a sense, we "freeze" the components x_i , $i \notin S_0$, making them constant. After that, we define $\varphi_{\sigma}(t, x^0)$ for $t \in [t_1, t_2]$ as the solution of the system

$$\dot{x}_i = f_i(x), \ i \in S_1, \quad \dot{x}_i = 0, \ i \notin S_1,$$

with initial data $(t_1, \varphi_{\sigma}(t_1, x^0))$, and so on.

We show that

- even for simple systems (1), the structure of "cluster flows" may become very complicated (for example, chaotic regimes are possible);
- stability and asymptotic stability of single trajectories and invariant sets may be lost;
- $\,$ nevertheless, it is possible to find conditions of dissipative behavior of "cluster flows."

2. Space clustering.

We study the dynamics of curves that are the graphs of functions

$$V(t) = \{v_s(t) \in R : s \in [0, 1]\},\tag{2}$$

where $t \ge 0$. We fix:

- an open set $D \subset R$;
- a functional J on functions of the form (2);
- a scalar function f.

The dynamics is described by the system

$$\dot{v}_s(t) = f(J(V(t))), \quad v_s(t) \in D,$$

$$\dot{v}_s(t) = 0, \quad v_s(t) \notin D.$$

Thus, pieces of curves outside D are fixed, while pieces of curves inside D have, in a sense, similar behavior.

We describe some qualitative properties of the dynamics.

Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-01-03797a) and the joint program "Modeling of nonlinear dynamical systems arising in problems of various applied fields" of St.Petersburg University and Freie Universitaet Berlin (IAS 6.60.1355.2016).

110 Subbotina N.

Constructive Nonsmooth Analysis to the Theory of Hamilton-Jacobi Equations

Subbotina N.

subb@uran.ru

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, S.Kovalevskaya str. 16, Ekaterinburg 620990 Russia

Many practical problems lead to the need to consider solutions of boundary problems for Hamilton - Jacobi equations. Typically, the solutions are understood in a generalized sense.

The modern theory of generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations has received significant development in the 80-th years of the 20-th century, getting at its disposal new tools and methods of Nonsmooth Analysis. The outstanding contribution to the formation and development of Nonsmooth Analysis made works by V.F.Demyanov and his scientific school. See, for example, [1, 2].

Different types of directional derivatives, subdifferentials, superdifferentials, tangent cones and other tools of Nonsmooth Analysis were applied to define and study generalized solutions for two known conceptions: minimax solutions suggested by A.I.Subbotin [3] and viscosity solutions suggested by M.Crandall and P.-L.Lions [4].

Many new practical problems lead to the need to consider solutions of Hamilton - Jacobi equations in bounded regions of phase space. Typically, the solution is known on a part of the border of considered phase constraints. It is required to determine the solution within the domain including the remaining part of the border.

In the presentation, a boundary value problem with state constraints is under consideration for a nonlinear noncoercive Hamilton-Jacobi equation. The problem arises in molecular biology for Crow – Kimura model of genetic evolution [5]. Dynamics of Crow – Kimura model for molecular evolution can be analyzed via the following HJE

$$\partial u/\partial t + H(x, \partial u/\partial x) = 0,$$
 (1)

where the Hamiltonian $H(\cdot)$ has the form

$$H(x,p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}.$$
 (2)

The function $f(\cdot)$ in (2) is given and called fitness. Equation (1) is considered for $t \ge 0$, $-1 \le x \le 1$. It is also assumed that an initial function $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given such that

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [-1;1].$$
 (3)

Subbotina N. 111

The Hamiltonian is nonlinear. It is also noncoercive, because the coercivity condition

 $\frac{H(x,p)}{p}\to\infty, \text{ as } |p|\to\infty$

does not hold at $x = \pm 1$. So, one can foresee that solutions of the problem (1)-(3) should be understood in a generalized sense.

In the HJEs' theory various concepts of generalized solutions have been introduced (see, e.g. [3, 4]). Note that definitions of generalized solutions to HJEs in open areas were applied to problems with state constraints as additional imposed requirements to solutions on the border. These requirements play a role of boundary conditions. Unfortunately, results of the theories of generalized solutions are inapplicable to the problem (1)-(3). In particular, one of the key conditions under which the known theorems on existence of a generalized viscosity solution [4] has been proved is the coercivity of the Hamiltonian. And the theory of minimax solutions [3] is not developed for problems with state constraints. So, below a new definition of a generalized solution is presented [6]. This definition is based on the minimax and viscosity approaches and uses the following tools of Nonsmooth Analysis.

Let W be a bounded set in \mathbb{R}^2 . Denote by \overline{W} the closure of this set, by C(W) — the class of functions continuous on the set W.

Let $u(\cdot) \in C(\overline{W})$ and $(t,x) \in \overline{W}$. The subdifferential of the function $u(\cdot)$ at (t,x) is the set

$$D^{-}u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \middle| \begin{array}{c} \lim\inf_{\substack{(\tau,y) \to (t,x) \\ (\tau,y) \to (t,x) \\ (\tau,y) \in \overline{W}}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geqslant 0 \right\}.$$

The superdifferential of the function $u(\cdot)$ at (t,x) is the set

$$D^+u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \middle| \lim \sup_{\substack{(\tau,y) \to (t,x) \\ (\tau,y) \in \overline{W}}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leqslant 0 \right\}.$$

Let $\mathrm{Dif}(u)$ be the set of points where the function $u(\cdot) \in C(\overline{W})$ is differentiable. For a given set $M \subset \mathbb{R}^2$, the symbol $\mathrm{co} M$ means its convex hull. Let us introduce also the set

hull. Let us introduce also the set
$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \cos\left\{(a,s) \left| a = \lim_{i \to \infty} \frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t}, s = \lim_{i \to \infty} \frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x}; \right. \\ \left. (t_i,x_i) \to (t,x) \text{ as } i \to \infty, \quad (t_i,x_i) \in \mathrm{Dif}(u) \right\}.$$

112 Subbotina N.

We consider problem (1)-(3) on the restricted closed domain $\overline{\Pi}_T = [0; T] \times [-1; 1]$, and also use the notations $\Pi_T = (0; T) \times (-1; 1)$, $\Gamma_T = \{(t, x) | t \in (0, T), x = \pm 1\}$.

Definition 1. A continuous function $u(\cdot): \overline{\Pi}_T \to \mathbb{R}^2$ is called a generalized solution to problem (1)–(3) iff it satisfies the initial condition (3) and the following relations are true

$$a + H(x,s) \le 0, \quad \forall (a,s) \in D^+ u(t,x), \forall (t,x) \in \Pi_T,$$
 (4)

$$a + H(x,s) \geqslant 0, \quad \forall (a,s) \in D^- u(t,x), \forall (t,x) \in \Pi_T,$$
 (5)

$$a + H(x,s) \ge 0, \quad \forall (a,s) \in D^- u(t,x) \cap \partial u(t,x), \forall (t,x) \in \Gamma_T.$$
 (6)

A comparison of the definition with the definition of viscosity solution was made. Existence of the solution in problem (1)-(3) was proven using tools of Nonsmooth Analysis and results of the Calculus of Variations. It was also shown that the generalized solution is not unique.

Now the problem is considered for the case of additional requirements to structure of solutions. A construction of the solution with properties prescribed in a bounded sub-domain is provided and justified via dynamic programming and calculus of variations [6]. Properties of the construction are studied. Results of simulations are shown to illustrate the construction.

The work was supported by RFBR (project 17-01-00074) and UrB RAS (project 15-16-1-11).

References

- [1] V.F. Demyanov, *Mimimax: directional differentiability*, Leningrad: Leningrad State University, (1974) [in Russian].
- [2] V.F. Demyanov V.F., A.M. Rubinov, Constructive non-smooth analysis, Frankfurt: Peter Lang, (1995).
- [3] A.I. Subbotin, Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective, Boston: Birkhauser, (1995).
- [4] M.G. Crandall, H.-L. Lions, "Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations", Trans. Amer. Math. Soc. 277, No. 1, 1–42, (1983).
- [5] D.B. Saakian, O.C. Rozanova, A. Akmetzhanov, "Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution" *Physical Review E - Statistical*, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 78, No. 4, 041908 (2008).
- [6] N.N. Subbotina, L.G. Shagalova, "On the Continuous Extension of a Generalized Solution of the Hamilton-Jacobi Equation by Characteristics that Form a Central Field of Extremals", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 299, Suppl. 1, S189–S198, (2016).

Optimal Impulse Control in Bi-Virus SIR Epidemic Model Taynitskiy V., Gubar E., Zhu Q.

tainitsky@gmail.com, e.gubar@spbu.ru, quanyan.zhu@nyu.edu St. Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint-Petersburg, 198504, Russia; Department of Electrical and Computer Engineering, Polytechnic School of Engineering, New York University, Brooklyn, USA

Introduction

The proliferation of information technologies and devices connected to the Internet creates opportunities to spread information more conveniently but has also created a large attack surface for the malware to exploit existing vulnerabilities of the devices and spread malicious codes over the Internet. Internet connection provides a wide channel of propagation malicious software and increases risks of cyber attacks.

The recent spreading of ransomware (e.g. CryptoLocker, CryptoDefense or CryptoWall) has propagated using spam emails to extort money from home users and businesses alike by locking files on a PC or network storage (see [11]). However, the timing and the adoption level of the patches play a major role in the spreading of the malware. It is critical for the device manufacturers to develop patches periodically and advise their device users to install them to mitigate further infections.

Several studies have shown [14], [19] that malware can remain in a global network for 9-14 months and cause repeated epidemics with the same characteristics. It leads to the application of analogous technologies to protect the network. According to these reasons, we can consider such epidemic process as a periodical events and model it in special discrete form. Protection of hosts during repeated malware epidemics resembles the process of application of preventive measures during annual epidemic of influenza or SARS [1].

Following mathematical models [1, 5, 7, 18], we suppose that epidemics occur periodically and consider impulses of protection strategies. We investigate controlled multi-strain epidemic model for heterogeneous populations over a large complex network and compare two different approaches to defining protection policies. One approach is to construct special conditions which help to eradicate a number of infected nodes in the network. The second approach establishes a control-theoretic model to design malware control strategies through using special antivirus software to mitigate the impact of epidemics on the network. We estimate total costs received by both approaches and corroborate all theoretical results by numerical simulations.

Impulse control problem

In this section, we present a discussion and describe a controlled epidemic model where the network of N nodes is protected from the propagation of malicious software using a series of impulse application of antivirus patches. We consider a multi-virus case in which two forms of malicious software spread in the network at different speeds. Additionally, we assume that an epidemic process in the network occurs periodically. Hence, the iterative epidemic process can be formulated as a combined multi-virus model with a series of impulses which suppress the increasing trend of the infected nodes. We use the modification of classical SIR-model to present an impulse control problem for episodic attacks of the viruses and obtain the impulse controls to eradicate malware epidemics for different cases.

We formulate a model with the application of a series of impulse control strategies to restrain the spreading of viruses. We suppose that these impulses occur at time $\tau_1, \ldots, \tau_{k_i}$, where k_i describes a number of activation of impulse controls, index i indicates the type of malware. We also assume that on the time intervals $(\tau_{j-1}, \tau_j]$ system (1) define the behavior of malware in the network. We have extended the simple SIR model to describe the situation with two virus types for all time period except the sequence of time moments $\tau_j^+, j = 1, \ldots, k_i$

$$\dot{S} = -\beta_1 S(I_1 + I_{12}) - \beta_2 S(I_2 + I_{12}),
\dot{I}_1 = \beta_1 S(I_1 + I_{12}) - \varepsilon_2 I_1(I_2 + I_{12}),
\dot{I}_2 = \beta_2 S(I_2 + I_{12}) - \varepsilon_1 I_2(I_1 + I_{12}),
\dot{I}_{12} = \varepsilon_2 I_1(I_2 + I_{12}) + \varepsilon_1 I_2(I_1 + I_{12}),$$
(1)

where $R(t) = 1 - S(t) - I_1(t) - I_2(t) - I_{12}(t)$. Then we define $S(\tau_i) = S(\tau_i^-)$, $I_1(\tau_i) = I_1(\tau_i^-)$, $I_2(\tau_i) = I_2(\tau_i^-)$, $I_{12}(\tau_i) = I_{12}(\tau_i^-)$, $R(\tau_i) = R(\tau_i^-)$. States of the system after time moments τ_i are

$$S(\tau_{j}^{+}) = S(\tau_{j}),$$

$$I_{1}(\tau_{j}^{+}) = I_{1}(\tau_{j}) - \nu_{1}(\tau_{j})I_{1}(\tau_{j}),$$

$$I_{2}(\tau_{j}^{+}) = I_{2}(\tau_{j}) - \nu_{2}(\tau_{j})I_{2}(\tau_{j}),$$

$$I_{12}(\tau_{j}^{+}) = I_{12}(\tau_{j}) - \nu_{2}(\tau_{j})I_{12}(\tau_{j}),$$

$$R(\tau_{j}^{+}) = R(\tau_{j}) + \nu_{1}(\tau_{j})I_{1}(\tau_{j}) + \nu_{2}(\tau_{j})I_{2}(\tau_{j}) + \nu_{3}(\tau_{j})I_{12}(\tau_{j}).$$

$$(2)$$

Here, variables $\nu_i(\cdot)$, i=1,2,3, correspond to control parameters which describe the application of special antivirus patches at discrete time moments $\tau_1,\ldots,\tau_{k_i},\,i=1,2,3$. At each time, ν_i is a fraction of treated nodes. Here $\nu_1=(\nu_1^1,\ldots,\nu_1^{k_1}),\,\nu_2=(\nu_2^1,\ldots,\nu_2^{k_2})$ and $\nu_3=(\nu_3^1,\ldots,\nu_3^{k_3})$ are the components of control vectors correspond to the set of time moments $\tau_1,\ldots,\tau_{k_i},\,c_1^{j_i}\in[0,\overline{w}_1^{j_i}],$

 $c_2^j \in [0, \overline{u}_2^{j_i}], \ c_3^{j_i} \in [0, \overline{u}_3^{j_i}]$ where $\overline{u}_1^{j_i}, \ \overline{u}_2^{j_i}$ and $\overline{u}_3^{j_i}$ are maximum values of control. Functions $\nu_i = \sum_{j=1}^{k_i} c_i^j \delta(t-\tau_j), \ i=1,2,3,$ where $\delta(t-\tau_j)$ is a Dirac function, c_i is the value of impulse [1] that causes discontinuous jumps in the state of the systems.

The objective function of the combined system (1) is constructed to evaluate the aggregated costs on the time interval [0,T] including the costs of control impulses. The aggregated costs for continuous system (1) are defined as follows: at any given $t \neq \tau_j$, $p = 1, \ldots, k_i$, the overall system costs include infected costs $f_1(I_1(t))$, $f_2(I_2(t))$ and $f_3(I_{12}(t))$. Functions f_i are non-decreasing and twice-differentiable, such that $f_i(0) = 0$, $f_i(I_i(t)) > 0$, for $I_i(t) > 0$ for $t \in (\tau_{p-1}, \tau_j]$, for all i. For system (1), we define the infected costs as functions $h_i(q_i^j(\tau_j^+))$, $p = 1, \ldots, k_i$, where $h_i(q_i^j(\tau_j^+)) > 0$, $q_i^j(\tau_j^+) > 0$ for i = 1, 2, 3, which are generated by the consumption of the resources for the application of antivirus or stationary security patches. Infected costs consist of damages caused by viruses. The aggregated system costs are defined by the following functional:

$$J = \int_0^T f_1(I_1(t)) + f_2(I_2(t)) + f_3(I_{12}(t)) - g(R(t))dt + \sum_{i=1}^k h_1(\nu_1(\tau_i^{1+})) + \sum_{i=1}^k h_2(\nu_2(\tau_i^{2+})) + \sum_{i=1}^k h_3(\nu_3(\tau_i^{3+})).$$
(3)

In this work, we seek to minimize the aggregated system costs J and find optimal impulsive strategies to protect the network against periodical waves of malware attacks.

References

- [1] Z. Agur, L. Stone, B. Shulgin "Pulse Vaccination Strategy in the SIR Epidemic Model Bulletin of Mathematical Biology, Vol. 60, 1123—1148 (1998)
- [2] E. Altman, M. H. R. Khouzani, S. Sarkar, "Maximum damage malware attack mobile wireless networks Proc. of the 29th International Conference on Computer Communications (INFOCOM), 749—757 (2010)
- [3] E. Altman, M.H.R. Khouzani, S. Sarkar, "Optimal control of epidemic evolution INFOCOM IEEE Proceedings, 1683–1691 (2011)
- $[4]\,$ M. Balter, "New HIV strain could pose health threat $Science,\,281,\,$ No. 5382, 1425-1426 (1998)
- [5] A. Blaquiere, "Impulsive Optimal Control with Finite or Infinite Time Horizon Journal of optimization theory and applications, Vol. 46, No. 4, 431–493 (1985)
- [6] D. Butler, "Flu surveillance lacking Nature, 483, No. 7391, 520-522 (2012)

- [7] M. Chahim, R. Harti, P. Kort, "A tutorial on the deterministic Impulse Control Maximum Principle Necessary and sufficient optimality conditions. European Journal of Operational Research, No. 219, 18—26 (2012)
- [8] X. Fu, M. Small, D. M. Walker, H. Zhang, "Epidemic dynamics on scale-free networks with piecewise linear infectivity and immunization *Physical Review E*, Vol. 77, Issue 3 (2008)
- [9] E. Gubar, Q. Zhu, "Optimal control of influenza epidemic model with virus mutations Proceedings European Control Conference (ECC), 3125–3130 (2013)
- [10] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, "A contribution to the mathematical theory of epidemics Proceedings of the Royal Society of London A, 115, No. 772, 700–721 (1927)
- [11] X. Luo, Q. Liao, "Ransomware: A new cyber hijacking threat to enterprises Handbook of research on information security and assurance, 1–6, (2009)
- [12] N. Masuda, N. Konno, "Multi-state epidemic processes on complex networks J. Theor. Biol., No. 243, 64–75 (2006)
- [13] D. Moore, C. Shannon, "Code-Red: a Case Study on the Spread and Victims of an Internet Worm *Proceedings of the 2002 ACM SICGOMM Internet Measurement Workshop*, 273—284 (2002)
- [14] L. H. Newman, "What we know about Friday's massive east coast Internet outage Wired Magazine, Oct. 21, (2016)
- [15] M. E. J. Newman, "Threshold effects for two pathogens spreading on a network *Physical Review Letters*, Vol. 95, No. 10, 108701 (2005)
- [16] M. Nuno, Zh. Feng, M. Martcheva, C. Castillo-Chavez, "Dynamics of two-strain influenza with isolation and partial cross-immunity SIAM J. on App. Math., Vol. 65, No. 3, 964–982 (2005)
- [17] V. A. Taynitskiy, E. A. Gubar, E. M. Zhitkova, "Structure of optimal control in the model of propagation of two malicious softwares *International conference* "Stability and Control Processes" in memory of V.I. Zubov (SCP), 261-264 (2015)
- [18] V. A. Taynitskiy, E. A. Gubar, E. M. Zhitkova, "Optimization of protection of computer networks against malicious software Proc. of International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference). (2016)
- [19] A. Vespignani, R. Pastor-Satorras, "Epidemic Spreading in Scale-Free Networks Physical Review Letters, Vol. 86, No. 14, 3200–3203 (2001)
- [20] Q. Wu, M. Small, H. Liu, "Superinfection Behaviors on Scale-Free Networks with Competing Strains Journal of Nonlinear Science, 113—127 (2013)

Issues of H_{∞} -optimization for Marine Ships' Motion Control Systems

Veremey E.

e_veremey@mail.ru

Saint-Petersburg State University, Universitetskaja nab, 7-9, Saint-Petersburg, 199034, Russia

1. Introduction. Modern marine ships are extensively influenced in its sailing by external disturbances, which are produced mostly by sea waves and winds action. To provide a safety of sailing, marine autopilots are widely used to support automatic guidance and control of the ship [1, 2, 3]. The autopilot mission is to reduce an action of disturbances, ensuring a ship steering in accordance with given course.

Many problems of autopilots design for marine vessels have already been extensively researched; however, many issues are not fully investigated until now. In particular, a significant interest is attended to the flexibility of a control low: such flexibility can be reached using special multipurpose approach [4] to feedback control design. The problem of external disturbances rejection is considered in this paper for motion control systems of marine ships on the base of H_{∞} -optimization approach. It is supposed that a ship is steered by autopilot under the action of sea wave disturbances, mainly determined by bias terms and high frequency components. The essence of the problem is to find mathematical models of adjustable corrective items for control law with a special multipurpose (MP) structure, to provide desirable values of correspondent functionals, which characterize accuracy and intensity of a ship's rudders action. It is shown that minimax representation, supplied by H_{∞} -approach, is quite suitable to reflect multipurpose orientation of control system tuning. Specialized method of control laws design is proposed based on the original spectral approach to SISO LTI H_{∞} -optimization problem.

2. Problem statement. To formalize the problem of an autopilot design, let us introduce a linear model of the ship motion, which describes the processes of course maintenance using autopilots. Such a model is a result of initial nonlinear dynamical equations linearization in the neighborhood of an equilibrium position for a constant speed of motion:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 \delta + \mathbf{h}_0 \tilde{d}, \quad y = \mathbf{c}_0 \mathbf{x}. \tag{1}$$

Here, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ is the state space vector, scalar $\delta \in \mathbb{R}^1$ denotes rudder deflection, $\tilde{d} \in \mathbb{R}^1$ presents external disturbance, $y \in \mathbb{R}^1$ is the yaw angle, which is treated as a measured and controlled variable. All the components

of the following matrices are real constants:

$$\mathbf{A}_{0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{0} = \begin{pmatrix} b_{1} \\ b_{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_{0} = \begin{pmatrix} h_{1} \\ h_{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}_{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We shall believe that the system (1) is controllable and observable, and that the variables y, and δ can be measured with the help of correspondent sensors. Let accept that controller to be designed has a form

$$\delta = W_{\delta}(s)y,\tag{2}$$

where $W_{\delta} = W_1/W_2$, W_1 , W_2 are polynomials. The transfer function W_{δ} of the controller (2) should be found as a solution of the analytical synthesis problem. If any, we obtain a closed-loop connection (1), (2) with transfer functions $F_y(s)$ and $F_u(s)$ from \tilde{d} to y and u correspondingly:

$$F_{0y}(s) = H_0(s)/(A_0(s) - B_0(s)W_{\delta}(s)),$$

$$F_{0u}(s) = H_0(s)W_{\delta}(s)/(A_0(s) - B_0(s)W_{\delta},$$

where
$$A_0(s) = \det(\mathbf{E}s - \mathbf{A}_0)$$
, $B_0(s) = A_0(s)\mathbf{c}_0(\mathbf{E}s - \mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{b}_0$, $H_0(s) = A_0(s)\mathbf{c}_0(\mathbf{E}s - \mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{h}_0$.

Suppose that the external disturbance $\tilde{d} = \tilde{d}(t)$, which is generated by sea waves, can be treated as a random stationary process with rational spectral power density

$$S_d(\omega) = S_1(s)S_1(-s)|_{s=i\omega}, S_1(s) = N(s)/T(s),$$
 (3)

where polynomials N and T are Hurwitz, $\deg N < \deg T = n_f$.

To describe a quality of control processes for the closed-loop system, let us introduce a correspondent performance index as the following functional:

$$J(W_{\delta}) = \|F_{0}(s, W_{\delta})S_{1}(s)\|_{\infty}^{2} = \max_{\omega \in [0, \infty]} |F_{0}(j\omega, W_{\delta})S_{1}(j\omega)|^{2},$$

where the generalized transfer function F_0 of the system (1),(2) is determined by the formula

$$|F_0(j\omega)|^2 = |F_{0y}(j\omega)|^2 + k^2 |F_{0u}(j\omega)|^2, \quad k = const.$$
 (4)

The essence of the issue to be discussed below is to find any solution of the following minimax optimization problem, which is presented in framework of H-theory [5, 6]:

$$J(W_{\delta}) = \|F_0 S_1\|_{\infty}^2 = \max_{\omega \in [0,\infty]} |F_0(j\omega, W_{\delta}) S_1(j\omega)|^2 \to \min_{W_{\delta} \in \Omega_{\infty}}$$
 (5)

with the admissible set $\Omega_{\infty} = \{ W_{\delta} : F_0(s, W_{\delta}) \in RH_{\infty} \}$ of the controllers (2).

3. Spectral method of synthesis. To solve the problem (5), it is possible to implement well-known methods such as "2-Riccatti approach" or "LMI-technique" [5]. However, this cannot be done directly since the mentioned problem has some specific features, which hamper similar implementation. As an alternative, the spectral approach [6] can be used as the most convenient and suitable instrument of synthesis for this case.

Let us address to the spectral approach, introducing the following additional notations for matrices of expanded LTI plant of control: $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_0 & \mathbf{0}_{1 \times n_f} \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{h}_0 \mathbf{c}_f \\ \mathbf{0}_{n_f \times 3} & \mathbf{A}_f \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{0}_{n_f \times 1} \end{pmatrix}, \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{b}_f \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{c}_f \left(\mathbf{E}_{n_f} s - \mathbf{A}_f \right)^{-1} \mathbf{b}_f \equiv S_1(s).$$

One can check that (5) is equivalent to the H_{∞} -optimization problem

$$I(\Phi) = \|F\|_{\infty}^{2} = \max_{\omega \in [0,\infty]} |F(j\omega, \Phi)|^{2} \to \min_{\Phi \in \Omega},$$
 (6)

where $\Phi = (\alpha + \beta W_{\delta}) / (A - BW_{\delta})$, α and β are arbitrary polynomials such that the polynomial $Q = A\beta + B\alpha$ is Hurwitz, $\Omega = \{\Phi : W_{\delta} = (A\Phi - \alpha) / (B\Phi + \beta) \in \Omega_{\infty}\}$. The variables $|F|^2 = |F_y|^2 + k^2 |F_u|^2$, $F_y = H/(A - BW_{\delta})$, $F_u = HW_{\delta}/(A - BW_{\delta})$, $A = \det(\mathbf{E}s - \mathbf{A})$, $B = A\mathbf{c}(\mathbf{E}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$, $H = A\mathbf{c}(\mathbf{E}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ represent the expanded plant. It is a matter of simple calculations to prove the relationships $I(\Phi) \leq \gamma^2$,

$$\gamma^{2} = J_{a} + \varepsilon, \ \varepsilon \geqslant 0, \ J_{a} = \max_{\omega \in [0, \infty)} k^{2} / |G(j\omega)|^{2} = k^{2} / |G(j\omega_{0})|^{2},$$

$$\omega_{0} = \arg \max_{\omega \in [0, \infty)} k^{2} / |G(j\omega)|^{2}, \quad (7)$$

where Hurwitz polynomial G(s) is a result of the factorization

$$k^2 A(s)A(-s) + B(s)B(-s) \equiv G(s)G(-s).$$

Definition 1. We say that the *irregular situation* takes place with respect to the problem (6) if there exist such functions $\Phi \in \Omega$ that the equality

 $I(\Phi) = J_a$ holds in (7). Otherwise, we shall say that the situation is regular if for any $\Phi \in \Omega$ we have $I(\Phi) > J_a$.

Theorem 1. Irregular situation takes place for the problem (6) if and only if

$$q_m \geqslant 0$$
,

where q_m is the minimal eigenvalue of the Pick matrix $\Pi = \{l_{ij}\}$ ([5]),

$$l_{ij} = (1 - d_i \bar{d}_i) / (g_i + \bar{g}_j), \quad d_i = -B(-g_i) / [A(g_i)R(g_i)], \quad i, j = \overline{1, n};$$

here g_i are the roots of G(-s) (assume that all of them are distinct), R is a Hurwitz result of the factorization

$$R(s)R(-s) \equiv J_aG(s)G(-s) - k^2.$$

Additionally, if $q_m > 0$ then the problem (6) has no unique solution.

Theorem 2. Let suppose that the irregular situation occurs. In that case, solutions of the problems (6) and (5) correspondingly are determined by the formulae

$$\Phi_0 = \arg\min_{\Phi \in \Omega} I(\Phi) = (DQR - k^2 \alpha \bar{A} + \beta \bar{B})/(G\bar{G}),$$

$$W_{\delta 0} = \arg\min_{W_{\delta} \in \Omega_{\infty}} J(W_{\delta}) = W_{10}/W_{20},$$

$$W_{10} = (Am_1R + \bar{B}m_2)/\bar{G}, W_{20} = (Bm_1R - k^2\bar{A}m_2)/\bar{G}.$$

Here $D(s) \equiv m_1(s)/m_2(s)$ is the solution of the following interpolation Nevanlinna-Pick problem [5]:

$$||D(s)||_{\infty}^2 \leqslant 1$$
, $D(g_i) = d_i$, $i = \overline{1, n}$.

Remark 1. The rational function D(s) can be obtained by well-known numerical methods [5].

4. Optimal controller with MP structure. Let us assume that we have the *irregular situation* with no unique solution of the problems (6), (5). This non-uniqueness allows to obtain a certain benefit in the sense of structural and dynamical features of the optimal controller. In particular, there is a possibility to use a controller with the following MP structure:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{z} + \mathbf{b}_0 \delta + \mathbf{g}(y - \mathbf{c}\mathbf{z}), \ \dot{\delta} = u,
\xi = K(s)(y - \mathbf{c}_0 \mathbf{z}), \ u = \mu \dot{\mathbf{z}} + \nu y + \xi.$$
(8)

Here $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ is the state space vector of the observer, $u \in \mathbb{R}^1$ is the control signal for the actuator, $\xi \in \mathbb{R}^1$ is the output of a dynamical corrector.

Significant features of the controller (8), and base issues, connected with a choice of its tunable elements \mathbf{g}, μ, ν and K(s), are discussed in detail in [4, 7, 8]. Let us suppose that the matrices \mathbf{g}, μ, ν are given initially on the base of correspondent requirements, providing stability and integral action of the closed-loop connection. In that case, a choice of the corrector transfer function K(s) can be directed to the solution of the aforementioned minimax problems.

Theorem 3. If the transfer function $W_s(s,K)$ from y to δ of the controller (8) with MP structure satisfies the following two conditions

a)
$$W_s(j\omega_0, K) = -B(-j\omega_0)/(k^2A(-j\omega_0)); b) \max_{\omega \in [0,\infty)} |F_{0s}(j\omega, K)|^2 = J_a,$$
(9)

where $F_{0s}(s, K)$ is the generalized transfer function (4) of the system (1),(2) for the controller (8), then this controller is one of the solutions of the optimization problem (5).

Remark 2. It is a matter of simple calculations to show that the simplest variant of K, which can be used to provide (9), is as follows: $K(s) = (\mu_1 s^2 + \mu_0 s)/(s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0)$.

5. Example of synthesis. Let us illustrate proposed approach by the example of the course-keeping autopilot synthesis for the transport ship with a displacement of approximately 6000 t. Assume that a model (1) is given for the ship motion with a constant speed V=8 m/s under a sea wave with intensity 5 Beaufort number: $a_{11}=-0.0454$, $a_{12}=0.560$, $a_{21}=0.0267$, $a_{22}=-0.408$, $b_1=-0.0132$, $b_2=-0.00742$, $h_1=-1.82$, and $h_2=-0.128$. The spectrum (3) is determined by the polynomials $T(s)=20s^4+17.3s^3+11.9s^2+3.87s+1.08$, $N(s)=0.216s^3$. For given value k=0.03 in (4) the irregular situation occurs, and solving the problem (5) by direct using of the spectral approach, we arrive at the optimal controller (2), which gives $J=J_a=2.95\cdot10^{-4}$. However, disadvantages of the obtained transfer function $W_{\delta 0}$ initiate us to use the controller (8) with MP-structure. On the base of Theorem 3 we achieve the same optimum value J_a with the help of a corrector, having the transfer function $K(s)=(16.5s^2-16.0s)/(s^2+1.40s+0.490)$.

References

- [1] T.I. Fossen, Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control, John Wiley & Sons, New York, (2011).
- [2] T. Perez, Ship Motion Control: Course Keeping and Roll Stabilization using Rudder and Fins, Springer-Verlag, London, (2005).
- [3] S. Hammound, "Ship Motion Control Using Multi-Controller Structure", Journal of Maritime Research, IX, No. 1, 45–52 (2012).

- [4] E.I. Veremey, "Synthesis of multiobjective control laws for ship motion", Gyroscopy and Navigation, 1, No. 2, 119–125 (2010).
- [5] J.C. Doyle, B.A. Francis, A.R. Tanenbaum, Feedback Control Theoryl, Mac Millan, New York, (2011).
- [6] E.I. Veremey, "Algorithms for Solving a Class of Problems of H_{∞} -optimization of Control Systems", Journal of Computer and Systems Sciences International, 50, No. 3, 403–412 (2011).
- [7] E.I. Veremey, "Dynamical Correction of Control Laws for Marine Ships' Accurate Steering", Journal of Marine Science and Application, 13, No. 2, 127– 133 (2014).
- [8] E.I. Veremey, M.N. Smirnov, M.A. Smirnova, "Synthesis of Stabilizing Control Laws with Uncertain Disturbances for Marine Vessels", *Proceedings of 2015 International Conference SCP IEEE*, article No. 7342219, 1–3 (2015).

Discrete Approximation of a Reachable Set for a Nonlinear Impulsive Control System

Апанович Д.В., Воронов В.А.

 ${\tt dvapan@gmail.com,\ v-vor@yandex.ru}$

ИрНИТУ, Лермонтова, 83, Иркутск, 664074, Россия; ИДСТУ СО РАН, Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия

Дискретная аппроксимация множества достижимости нелинейной импульсной управляемой системы

Информация о множестве достижимости управляемой системы, т.е. множестве состояний, в которые система может быть переведена всевозможными допустимыми управлениями, может служить, к примеру, для сведения задачи оптимального управления с терминальным функционалом к задаче математического программирования на множестве достижимости. Для нелинейных систем, за редким исключением, границу множества достижимости не удается найти аналитически, но существуют методы, позволяющие находить внутренние и внешние оценки этого множества. Один из возможных подходов (методы поверхности уровня, в англоязычной литературе — level set methods) заключается в приближенном решении уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана; поверхность уровня обобщенного решения является границей множества достижимости. Соответственно, множество узлов сетки, в которых функция цены не превосходит заданной константы, может служить дискретной аппроксимацией.

В данном докладе предложен метод построения дискретной аппроксимации множества достижимости импульсной управляемой системы, основанный на следующих идеях:

- 1) произвольную траекторию системы можно приблизить траекторией системы при чисто импульсном управлении;
- 2) уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для предельной (линейной) системы имеет вид уравнения эйконала;
- 3) при переносе значений решения вдоль траекторий системы с нулевым управлением погрешность линейна по параметру разбиения временного интервала.

В работе [1] для близкой по постановке задачи (но при матрице коэффициентов при управлении, зависящей только от времени) был предложен алгоритм построения дискретной аппроксимации множества достижимости, в котором произвольная траектория импульсной системы аппроксимируется траекторией, соответствующей чисто импульсному управлению. Кроме выбора сетки в фазовом пространстве и разбиения временного интервала, вводится дискретизация множества направлений импульсов. В настоящем докладе представлена схожая по форме оценка на расстояние Хаусдорфа, но по сравнению с постановкой задачи в [1] накладывается ограничение на размерность управления.

Рассматривается автономная импульсная управляемая система с траекториями ограниченной вариации

$$dx = f(x)dt + G(x)\pi(\mu), \ x(0-) = x_0, \tag{1}$$

где f, G – липшицевы функции, удовлетворяющие условию не более чем линейного роста; $(n \times n)$ -матрица G(x) невырождена при $x \in \mathbb{R}^n$; $\pi(\mu) =$ $(\mu, \gamma(\mu))$ – пара, состоящая из векторной борелевской меры μ на отрезке $T=[0,t_1]$ и набора измеримых функций $\gamma=\{\omega_s\}$. Функции ω_s являются управлениями в предельной системе

$$\frac{dy_s(\tau)}{d\tau} = G(y_s(\tau))\omega_s(\tau), \ y_s(0) = x(s-), \tag{2}$$

описывающей импульсные воздействия в точках ненулевой меры [2,3]. Ограничение на ресурс импульсного управления имеет вид $|\mu|(T) =$ $\sum |\mu_i|(T) \leqslant M$, где $M \in \mathbb{R}$, M > 0.

Определим множество достижимости системы (1) в момент $t = t_1$:

$$\mathcal{R}(T, M) = \{x(T+) \mid x(\cdot) = x(\cdot, \mu, \gamma(\mu)); \mid \mu \mid (T) \leq M \}.$$

Представленный в докладе алгоритм позволяет для данного $\varepsilon>0$ найти конечное множество $\mathcal{R}_{\varepsilon}$, удовлетворяющее условию $d(\mathcal{R}_{\varepsilon}, \mathcal{R}(t_1, M)) \leqslant$

найти конечное мполестве T_{ε} , где $d(\cdot,\cdot)$ – расстояние Хаусдорфа. Введем функцию цены $V(t,x_T)=\inf_{(x,\pi(\mu))}|\mu|$. Здесь инфимум берется по всем траекториям системы (1), удовлетворяющим концевым ограничениям $x(0) = x_0, x(T) = x_T$. Тогда при фиксированном $t = t_1$

 $V(t_1,x)$ является минимаксным (вязким) решением стационарного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (в другой терминологии — уравнение эйконала с анизотропной скоростью распространения сигнала):

$$H(x, \nabla V(t_1, x)) = 0. \tag{3}$$

Выберем в фазовом пространстве сетку $\Gamma = \{hw \mid w \in \mathbb{Z}^n\}$, где h > 0 — параметр разбиения. Пусть $\delta = T/N$ — параметр разбиения временного интервала; $\Delta = \{0, \delta, ..., T\}$. Начальное условие имеет вид $V(0, x_0) = 0$. Численное решение (3) позволяет приближенно найти значения $\tilde{V}(0, x)$ в точках $\Gamma \times \{0\}$.

Для каждой точки $z\in\Gamma\times\{0\}$, для которой $V(0,z)\leqslant M$ найдем решение задачи Коши $\dot{x}=f(x),\,x(0)=z$ на отрезке $[0,\delta]$. Пусть при $t=\delta$ это решение принимает значение $x(z,\delta)$, и $p(x,\Gamma)$ — ближайшая (или любая из ближайших) к x точка сетки Γ . Примем

$$\tilde{V}(z_1, \delta) = \min\{V(z, 0) \mid p(x(z, \delta)) = z_1\}$$

за новое граничное условие, заданное на некотором конечном множестве точек сетки; найдем приближенные значения обобщенного решения (3) в точках $z \in \Gamma \times \{\delta\}$ и т. д.

В работе [4] показано, что при некотором условии, накладываемом на взаимное расположение характеристик уравнения (3) и градиента обобщенного решения в узлах сетки численное решение уравнения эйконала [5] требует времени, пропорционального числу узлов сетки.

Погрешность дискретной аппроксимации имеет вид

$$d(\mathcal{R}_{\varepsilon}, \mathcal{R}(t_1, M)) \leqslant C_1 h + C_2 \frac{\delta}{h},$$

где $C_1 > 0, C_2 > 0$ — некоторые константы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вдовина О.И., Сесекин А.Н., "Численное построение областей достижимости для систем с импульсным управлением" *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 11, No. 1, 65-73 (2005).
- [2] Б. М. Миллер, "Обобщенные решения в нелинейных задачах оптимизации с импульсными управлениями. И. Представление решений с помощью дифференциальных уравнений с мерой", *Автомат. и телемех.*, No 5, 56–70 (1995).
- [3] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н., Оптимальное импульсное управление с приложениями, М.: Физматлит (2003).
- [4] Falcone M. Cacace S., Cristiani E., Falcone M., "Can Local Single-Pass Methods Solve Any Stationary Hamilton–Jacobi–Bellman Equation?" SIAM Journal on Scientific Computing, 36, No 2, 570-587 (2014).

[5] Sethian J.A. Level Set Methods and Fast Marching Methods: evolving interfaces in computational geometry, computer vision and matherial science, Cambridge Univ. Press (1999).

On the Choosing of PID Controller Parameters for a Quadrocopter

Баранов О.В., Смирнов Н.В., Смирнова Т.Е. o.baranov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб. 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

О выборе параметров ПИД-регулятора квадрокоптера

Постановка задачи

Особый интерес в настоящее время представляют задачи управления квадрокоптерами в реальных условиях эксплуатации, в том числе в аварийных режимах. Это обусловлено различными погодными условиями, ограничениями по месту посадки — наличие водной поверхности и других препятствий. Для стабилизации положения аппарата в трех плоскостях предлагается использовать три ПИД-регулятора. Выбор параметров в этом случае имеет особенности, связанные с основными техническими и геометрическими характеристиками квадрокоптера.

Рассмотрим уравнение выходного сигнала ПИД-регулятора [1]:

$$u(t) = P + I + D = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de}{dt},$$

где $K_p,\,K_i,\,K_d$ — коэффициенты усиления пропорциональной, интегрирующей и дифференцирующей составляющих регулятора.

Для вычисления управляющей величины непосредственно в бортовом вычислителе аппарата в режиме реального времени используется рекуррентная формула:

$$u(n) = u(n-1) + K_p((E(n) - E(n-1)) + K_i^{dis}E(n) + K_d^{dis}(E(n) - 2E(n-1) + E(n-2)),$$

где n — порядковый номер шага, E(n) — величина рассогласования между текущим и требуемым значением регулируемого параметра.

Эта формула позволяет снизить разрядность значений хранимых величин и минимизировать количество выполняемых операций. Ставится задача выбора параметров K_p, K_i, K_d для стабилизации заданных значений углов $\varphi_0, \theta_0, \psi_0$, определяющих ориентацию квадрокоптера.

Результаты моделирования. Рекомендации

Наиболее часто встречаются аппараты с длиной плеча l в пределах 0.1 < l < 0.2 м [2]. Для таких квадрокоптеров в качестве базовых параметров регулятора предлагается использовать P = 5; $I = 0.1; D = 3. \Pi M \mathcal{I}$ -регулятор был встроен в систему управления квадрокоптером. Опишем результаты численного моделирования процесса стабилизации для ПИД-регулятора с указанными параметрами. Увеличение значения P приводит к большей устойчивости до тех пор, пока слишком большое значение P не приведет к колебаниям и потере управляемости. Уменьшение значения P приведет к дрейфу в управлении. Следует снижать P для исключения вибраций и получения плавного видеосигнала с бортовой камеры. Увеличение I способствует улучшению курсовой устойчивости и уменьшает дрейф, но также увеличит задержку возврата в начальное положение. Увеличение значения D увеличивает скорость, с которой все отклонения будут компенсированы. Это означает также увеличение вероятности появления перерегулирования и осцилляций. Уменьшение D уменьшает колебания при возврате в начальное положение. Возврат в начальное положение происходит медленнее. Указанные рекомендации получены в результате применения программного комплекса, специально разработанного для бортового вычислителя, результаты представлены в виде соответствующих графиков и рисунков. Данные выводы и рекомендации согласуются с опытом других исследователей и предыдущими работами авторов [2–9].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жмудь В. А. Неаналитические методы расчета ПИД-регуляторов: учебное пособие, Изд-во НГТУ, 2013.
- [2] Автономный квадрокоптер с нуля [Электронный ресурс] URL: http://habrahabr.ru/company/ technoworks/blog/216437/ (дата обращения: 14.02.2017).
- [3] О ПИД-регуляторах [Электронный ресурс] URL: http://copterpilot.ru/articles/o-pid-regulyatorax/ (дата обращения: 14.02.2017).
- [4] Баранов О.В. Моделирование процесса управления беспилотным летательным аппаратом квадрокоптером // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 23–28.
- [5] Баранов О.В., Попков А.С., Смирнов Н.В. Оптимальная стабилизация квадрокоптера в режиме реального времени // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В.И. Зубова. СПб, 2015. С. 115–116.
- [6] Баранов О.В., Смирнов Н.В., Смирнова Т.Е. Гибридная многопрограммная стабилизация с применением нелинейного дискретного идентификато-

Барсегян В.Р. 127

ра // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В.И. Зубова. СПб, 2015. С. 507–508.

- [7] Пономарев А.А. Построение субоптимального управления в регуляторе «предиктор-корректор» // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 141–153.
- [8] Смирнов М.Н., Смирнова М.А. Вопросы синтеза стабилизирующих управлений при наличии неопределенных внешних возмущений // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 503–508.
- [9] Смирнов М.Н. Метод учета ограниченных внешних воздействий при синтезе обратных связей с многоцелевой структурой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 2. С. 130–140.

On the Problem of Control of Continuous-Discrete Systems with Changing Dimensions of Phase Space and Vector of Control

Барсегян В.Р.

barseghyan@sci.am

Ереванский государственный университет, Институт механики НАН Армении Армения, г. Ереван, 0019, пр. Баграмяна 24/2

О задаче управления непрерывно-дискретных систем с изменением размерности фазового пространства и вектора управления

Problems of controllability of continuous-discrete systems with changes in dimensions of phase space and of control vector are considered. Motion of continuous-discrete system is built. A constructive approach of solution to control problems of such systems is proposed. Necessary and sufficient condition for complete controllability of continuous-discrete linear stationary systems with changes in dimensions of phase vector and of control vector, expressed directly by system initial parameters is obtained. Qualitative properties of controllability of such systems are revealed. An example of a continuous-discrete linear stationary system is constructed, which in certain intervals of time of functioning is not completely controllable, but as a whole in the entire interval of time is completely controllable.

Исследование многих прикладных задач управления процессов из различных областей науки и техники показывают, что мгновенные изменения состояния системы происходят значительно быстрее, чем собственные динамические (непрерывные) процессы. В математических моделях

128 Барсегян В.Р.

подобных систем естественно заменить эти быстрые изменения скачкообразными. При совместном функционировании непрерывной и дискретной (импульсной) части приводят к существенному изменению характеристик и структур системы, и может происходить изменение чисел координат фазового вектора и вектора управления, а также появление новых свойств.

Некоторые вопросы управления, вполне управляемости непрерывнодискретных систем (или кусочно-линейных импульсных систем) исследованы, в частности, в работах [1-12]. Движение управляемых систем со сменой фазового пространства изучены, например, в [2-4, 7]. В [7] приведены достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства.

В данной работе рассматривается управляемая непрерывно-дискретная динамическая система с изменением размерности фазового вектора и вектора управления, движение которой на интервале времени $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k,\ k=1,...,m$ описывается n_k -мерными линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}^{(k)} = A_k(t)x^{(k)} + B_k(t)u^{(k)},\tag{1}$$

а преемственность между системами (1) в промежуточные моменты времени t_k (k=1,...,m-1) обеспечивается выполнением следующих условий

$$x^{(k+1)}(t_k) = D_k x^{(k)}(t_k) + G_k.$$
(2)

Здесь $x^{(k)}(t) \in R^{n_k}$ - фазовый вектор системы; $u^{(k)}(t)$ управляющее воздействие (k=1,...,m). Матрицы параметров системы (1)-(2), имеют следующие размерности: $A_k(t) - (n_k \times n_k)$, $B_k(t) - (n_k \times r_k)$, $u^{(k)}(t) - (r_k \times 1)$, $D_k - (n_{k+1} \times n_k)$, $G_k - (n_{k+1} \times 1)$. В общем случае будем предполагать, что элементы матрицы-функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбца $u^{(k)}(t)$ являются непрерывными функциями.

Требуется найти условия, при которых существуют программные управляющие воздействия $u^{(k)}(t)$ (k=1,...,m), переводящие движения $x^{(k)}(t)$ непрерывно-дискретной системы (1)-(2) из начального состояния $x^{(1)}(t_0)=x_0^{(1)}$ в конечное состояние $x^{(m)}(T)=x_T^{(m)}$ на промежутке времени $[t_0,T]$, а также построить их.

В работе построено движение $x^{(k)}(t)$ $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$ (k=1,...,m) непрерывно-дискретной системы (1)-(2). Получено необходимое и достаточное условие при котором существуют программные управляющие воздействия $u^{(k)}(t)$ (k=1,...,m), решающие поставленую задачу и предложен конструктивный подход решения задач управления таких систем.

Определено понятие вполне управляемости непрерывно-дискретной линейной системы (1)-(2). Сформулировано необходимое и достаточное

Барсегян В.Р. 129

условие вполне управляемости непрерывно-дискретных линейных нестационарных систем (1)-(2). В этом смысле оно дает ответ на вопрос вполне управляемости стационарной системы. Однако практическое применение указанного условия связано с необходимостью построения импульсных переходных матриц рассматриваемых систем, что неудобно. Вообще суждение о существовании решения задачи управления непрерывнодискретной линейной системы целесообразно иметь, опираясь лишь на исходные данные задачи, т.е. по матрицам присутствующим в системах.

Получено необходимое и достаточное условие вполне управляемости непрерывно-дискретных линейных стационарных систем с изменением размерности фазового вектора и вектора управления, выраженное непосредственно через исходные параметры системы.

Выявлены качественные свойства управляемости таких систем. Показано, что на отдельных интервалах времени функционирования все
непрерывные подсистемы по отдельности могут быть не вполне управляемыми, однако, вследствие использования полезных свойств каждой из
подсистем, в целом на всем интервале времени непрерывно-дискретная
система может быть вполне управляемой. А если хотя бы одна подсистема на своем интервале времени функционирования вполне управляема,
то непрерывно-дискретная система также будет вполне управляемой. Построен пример непрерывно-дискретной линейной стационарной системы,
которая на отдельных интервалах времени функционирования не вполне
управляема, а в целом на всем отрезке времени является вполне управляемий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ащепков Л.Т., Оптимальное управление разрывными системами, Новосибирск, Наука, 226 с. (1987).
- [2] Барсегян В.Р., Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями, М.: Наука, 230 с. (2016).
- [3] Barseghyan V.R., On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure, 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russia, pp. 33-35. (2016)
- [4] Болтянский В.Г., Задача оптимизации со сменой фазового пространства, Дифф. уравнения, т. 19, \mathbb{N} 3, с. 518-521 (1983).
- [5] Гурман В.И., Расина И.В., Дискретно-непрерывные представления импульсных процессов в управляемых системах, Автоматика и телемеханика, № 8, с.16–29 (2012).
- [6] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н., Оптимальное импульсное управление с приложениями, М.: ФИЗМАТЛИТ, 256 с. (2000).

- [7] Максимова И.С., Розова В.Н., Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства, Вестник ТГУ, т. 16, вып. 3, с. 742-747 (2011).
- [8] Миллер Б.М., Рубинович Е.Я., Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями, М.: Наука, - 429 с. (2005)
- [9] Лазарева Е.В., Старожилов Е.Ф., Критерий управляемости для линейных непрерывно-дискретных систем управления с постоянными коэффициентами, Вестник СевГТУ: Сб. науч. тр, Вып. 36. Автоматизация процессов и управление, Севастополь: Изд-во «СевГТУ», с. 176-180 (2002).
- [10] Hong Shi and Guangming Xie, Controllability and Observability Criteria for Linear Piecewise Constant Impulsive Systems, Journal of Applied Mathematics, Volume 2012, Article ID 182040, 24 pages (2012).
- [11] Xie G., Wang L., Necessary and sufficient conditions for controllability and observability of switched impulsive control systems, IEEE Trans. Autom. Control, 49, pp. 960-966 (2004).
- [12] Sun A., Ge S.S., and Lee T.H., Controllability and reachability criteria for switched linear systems, Automatica, 38, pp. 775–786 (2002).

Suboptimal Administration in the Stochastic Nonlinear Dynamic Systems

Бутырский Е.Ю., Васильев В.В., Понкратова К.И. evgenira88@mail.ru, vasiliev.valeron2016@yandex.ru, jessy_magg@mail.ru

СПбГУ, г. Петергоф, Университетский проспект, 35, Санкт-Петербург, 198504, Россия; ВМПИ, ВУНЦ, ВМА, г. Петергоф, ул. Разводная, 15, Санкт-Петербург, 198514, Россия

In the article the task of suboptimal control in the stochastic nonlinear dynamic systems, based on a spline approximation of nonlinear functions, is examined.

Субоптимальное управление в стохастических нелинейных динамических системах

Пусть *модели объекта управления и измерений* описываются стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + V(t) u + y_1(t) n_1(t), & x(t_0) = x_0, \\ z = C(t) x + y_2(t) n_2(t), & z(t_0) = 0. \end{cases}$$
(1)

Полагая, что f(x) является нелинейной гладкой функцией, представим ее в виде кусочно-ломаной функции (сплайна первого порядка) [1].

Тогда выражение (1) можно записать как систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t) + V(t)u + y_1(t)n_1(t), & x(t_0) = x_0, \\ z = C(t)x + y_2(t)n_2(t), & z(t_0) = 0. \end{cases}$$
 (2)

$$A_{i} = \sum_{i=1}^{n} h(x_{i}, x_{i+1}) a_{i} - K_{i}, \quad B_{i} = \sum_{i=1}^{n} h(x_{i}, x_{i+1}) b_{i},$$

$$h(x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}), \end{cases}$$

где $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ – вектор состояния, $x\in R^n;\ z=(x_1,x_2,...,x_m)$ – вектор измерений, $z\in R^n;$ время $t\in T=[t_0,t_1]$ моменты времени $t_0,\,t_1$ начала и окончания процесса заданы; матрицы $A(t),\,B(t),\,C(t),\,V(t),\,y_1(t),\,y_2(t)$ имеют размерность $(n\times n),\,(n\times q),\,(m\times n),\,(n\times q),\,(n\times k),\,(m\times l)$ соответственно, а их элементы непрерывны на T; положим также, что на управление ограничений не наложено, $u\in R^q;\,n_1(t),\,n_2(t)$ – независимые белые гауссовские шумы:

$$< n_1(t) >= 0, < n_2(t) >= 0, < n_1(t) n_1(t-\tau) >= N_1 \delta(\tau),$$

 $< n_2(t) n_2(t-\tau) >= N_1 \delta(\tau), < n_1(t) n_2(t-\tau) >= 0.$

Начальное состояние x_0 определено гауссовской плотностью вероятности с математическим ожиданием m_0 и ковариационной матрицей D_0^x . Начальное значение вектора измерений равно нулю. Обозначим:

$$\boldsymbol{z}_{t_{0}}^{t}=\left\{ \boldsymbol{z}\left(\tau\right),\;t_{0}\leqslant\tau\leqslant\boldsymbol{t}\right\} ,\;R_{1}\left(t\right)=\boldsymbol{y}_{1}\left(t\right)\boldsymbol{y}_{1}^{T}\left(t\right),\;R_{2}\left(t\right)=\boldsymbol{y}_{2}\left(t\right)\boldsymbol{y}_{2}^{T}\left(t\right)$$

Предположим, что при управлении в момент времени t используется информация $z_{t_0}^t$ о всех измерениях, производимых на промежутке времени $[t_0,\ t_1]$. Множество допустимых управлений образуют функции $u(t)=u\left(t,\ z_{t_0}^t\right)$, зависящие от предыдущих измерений, причем $\forall t\in T,\ u\left(t\right)\in R^q$, при которых система (1) имеет единственное решение $(x\left(t\right),\ z\left(t\right))$.

Зададим функционал качества управления в форме

$$J = <\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[x^T(t) S(t) x(t) + u^T(t) Q(t) u(t) \right] dt + \frac{1}{2} x^T(t_1) \Lambda x(t_1) >,$$
(3)

где $S\left(t\right),\ \Lambda$ — неотрицательно определенные симметрические матрицы размера $(n\times m);\ Q\left(t\right)$ — положительно определенная симметрическая матрица размера $(q\times q);\ <\ .\ >\$ — знак математического ожидания,

которое вычисляется как по начальным условиям, так и по реализациям случайного процесса x(t). Требуется найти управление $u^*(t, z_{t_0}^t)$ из множества допустимых, обеспечивающее минимум функционала (3).

В соответствии с принципом разделения оптимальное управление стохастической системой с квадратичным критерием ошибки при гауссовских входных воздействиях можно представить в виде последовательности операций: оптимального оценивания состояния $\hat{x}(t)$ и оптимального линейного детерминированного управления $u^*(t)$. Параметры этих двух частей системы управления определяются раздельно. Доказательство утверждения (теоремы разделения) приведено, например, в [3].

Оптимальное управление $u^*\left(t,\ z_{t_0}^t\right)$ в задаче, сформулированной выше, имеет вид [2]:

$$u^{*}(t) = u^{*}(t, z_{t_{0}}^{t}) = Q^{-1}B^{T}K_{2}(t)\hat{x}(t),$$
(4)

где $\hat{x}\left(t\right)=< x\left(t\right)\left|z_{t_{0}}^{t}>-$ оценка вектора состояния модели объекта управления по результатам наблюдений, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = [A(t)\hat{x} + B(t)u^*] + K_2(t)[z - C(t)\hat{x}], \quad \hat{x}(t_0) = m_0,$$
 (5)

 $K_{2}\left(t\right) -$ симметрическая матрица коэффициентов усиления оптимального регулятора, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{dK_{2}(t)}{dt} = -A^{T}(t) K_{2}(t) - K_{2}(t) A(t) - K_{2}(t) B(t) Q^{-1}(t) B^{T}(t) K_{2}(t) + S(t), \quad (6)$$

$$K_{2}(t) = -\Lambda.$$

 $K\left(t\right)$ — матрица коэффициентов усиления фильтра размера $(n\times m),$ определяемая по формуле:

$$K(t) = \Gamma(t) C^{T}(t) R_{2}^{-1}(t).$$
 (7)

 $\Gamma\left(t\right) = < \left[x\left(t\right) - \hat{x}\left(t\right)\right] \left[x\left(t\right) - \hat{x}\left(t\right)\right]^{T} > -$ ковариационная матрица опибки оценивания, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{d\Gamma\left(t\right)}{dt} = A\Gamma + \Gamma A^{T} - \Gamma C^{T} R_{2}^{-1} C\Gamma + R_{1}, \Gamma\left(t_{0}\right) = D_{0}^{x}.$$
(8)

Оптимальное управление (4) с накоплением информации является функционалом измерений, так как оценка вектора $x\left(t\right)$ зависит от $z_{t_0}^t.$

Виноградова Т.К.

Здесь уравнения (5)-(8) являются уравнениями фильтра Калмана, обеспечивающего нахождение оптимальной оценки вектора состояния нелинейной модели объекта управления с минимальной нормой ковариационной матрицы ошибки оценивания. Соотношения (4), (5) соответствуют случаю определения оптимального управления линейной детерминированной системой при полной информации о векторе состояния. Необходимо отметить, что полученный алгоритм, является линейным только на отдельном интервале и только на нем шум может рассматриваться как белый гауссовский. Следовательно, и оценка $\hat{x}(t)$ будет иметь гауссовский закон распределения. На другом интервале параметры фильтра будут другими, поэтому оценка $\hat{x}(t)$ хотя и будет иметь нормальное распределение, но с другими математическим ожиданием и дисперсией. В целом, если рассматривать фильтр на всех интервалах, он сохранит свою нелинейность, так как от интервала к интервалу его характеристики будут меняться. Можно сказать, что нелинейный фильтр аппроксимируется совокупностью линейных (также как нелинейная функция аппроксимируется линейными сплайнами). Обобщение на параболические сплайны не представляет принципиальных сложностей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бурова И.Г., Демьянович Ю.К. *Теория минимальных сплайнов*. СПбГУ, (2001).
- [2] Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов., М.: Энергоатомиздат, (1990).
- [3] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, (1989).

On Numerical Methods in Optimal Control Problems with Nonsmooth Criterion

Виноградова Т.К.

vinogradova@inbox.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

О численных методах в задачах оптимального управления с негладким критерием

Постановка задачи оптимального управления в общем случае такова: имеется некоторый управляемый объект, состояние которого характеризуется двумя видами параметров - параметрами состояния и параметрами управления. В зависимости от выбора параметров управления - функций из некоторого множества - процесс управления объектом про-

134 Виноградова Т.К.

текает тем или иным образом. Пусть качество управления характеризуется некоторым функционалом. Задача состоит в том, чтобы найти такое управление, при котором заданный функционал принимает экстремальное значение. Искомое управление называется оптимальным.

Исследование обширного класса экстремальных задач с негладкой целевой функцией, в частности, минимаксных задач, можно проводить в разных направлениях. Некоторые из возможных подходов описаны в [1].

В последние годы усилился интерес как математиков, так и инженеров к задачам негладкой оптимизации в теории управления, т.е. к задачам, которые описываются с помощью недифференцируемых функций или функционалов. Привлекают к решению, например, такие постановки задач, как задача о минимуме максимального отклонения, задача противоударной оптимизации, задачи о минимуме наибольшего значения перегрузки при входе космического аппарата в атмосферу Земли и т.д. Недифференцируемость целевого функционала в значительной степени усложняет решение подобных задач. Аппроксимация же целевого функционала дифференцируемым может существенно исказить содержательный смысл залачи.

Доклад посвящается решению некоторых вопросов, связанных с минимизацией негладких функционалов в задачах оптимального управления. В частности, предлагаются некоторые необходимые условия и построенные на их основе численные методы решения. При разработке этих вопросов следует учитывать специфику, возникающую из-за наличия дифференциальных связей.

Итак, рассмотрим задачу оптимального управления объектом, движение которого задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматриваемых на промежутке [0,T], (T>0 – фиксировано):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t, z), \tag{1}$$

$$x(0) = x_0. (2)$$

Здесь $x=(x_1,\ldots,x_n),\ f=(f_1,\ldots,f_n),$ вектор-функция f непрерывна вместе с $\frac{\partial f}{\partial x}$ по совокупности переменных в области допустимых значений x, u, t, z. Вектор-функция u(t) предполагается кусочно-непрерывной r-мерной (в общем случае — суммируемой на [0,T] с квадратом), принадлежащей классу U. В качестве U можно выбирать различные классы управляющих функций. Например:

- 1) $U_1 = \left\{ u(t) \mid u(t) \in V \subset E_r, \ \forall t \in [0,T] \right\}$ вид поточечного ограничения, где V выпуклое ограниченное множество пространства E_r ;
 2) $U_2 = \left\{ u(t) \mid \int_0^T u^*(t) N(t) u(t) dt \leqslant A \right\}$ вид интегрального ограничения.
- ния, где $N(t)-r \times r$ -матрица, положительно определенная на [0,T] с

кусочно-непрерывными элементами. Функции $u(t) \in U$, как обычно, назовем допустимыми управлениями.

Пусть $z \in Z$, где $Z \subset E_p$ — компактное множество. Для любого допустимого $u \in U$, $z \in Z$ система (1),(2) определяет решение x(t,u,z). Это решение является абсолютно непрерывной вектор-функцией, удовлетворяющей уравнению (1) всюду в области определения за исключением точек разрыва. Положим, что качество работы системы оценивается функционалом такого вида:

$$J(u) = \max_{z \in Z} \int_{0}^{T} g(x(t, u, z), u(t), t, z) dt,$$
 (3)

где скалярная функция g(x,t,u,z) вместе с $\frac{\partial g}{\partial x}$ определена и непрерывна в области допустимых значений x,u,t,z.

Сформулируем задачу: для заданной системы (1) с начальными условиями (2) найти управление $u^0 \in U$, если оно существует, чтобы функционал качества J(u) достигал минимального значения, т.е.

$$J(u^{0}) = \min_{u \in U} \max_{z \in Z} \int_{0}^{T} g(x(t, u, z), u(t), t, z) dt.$$
 (4)

Допустимое управление, дающее решение поставленной задаче — оптимальное управление.

Трудность решения такой задачи состоит в том, что функционал J(u) в силу операции взятия максимума не является дифференцируемым. Приближенное решение задач с недифференцируемым функционалом - достаточно сложная вычислительная проблема. Задачи такого типа рассматривались А.Я. Дубовицким, А.А. Милютиным, Р. Габасовым, Ф.М. Кирилловой, В.Ф. Демьяновым, В.В. Величенко, Ю.М. Ермольевым, Б.Н. Пшеничным, Р. Беллманом и рядом других авторов. Заметим, что, хотя теория решения задач с недифференцируемым функционалом разработана достаточно полно и глубоко [2], методы численного решения, эффективность которых была бы подтверждена фактическим решением достаточно сложных прикладных задач, еще нельзя считать окончательно установившимися.

Итак, рассмотрим задачу (1)–(4). Отметим, что если f и g не зависят от z, то рассматриваемая задача сводится к обычной задаче оптимального управления. Классическим результатом в этой области является принцип максимума Понтрягина [3], полученный для класса управлений U_1 .

С помощью игольчатых вариаций в [4] было получено следующее необходимое условие.

Теорема. Для того, чтобы управление $u^0 \in U$ было оптимальным, необходимо, чтобы почти для всех $t \in [0,T]$ выполнялось соотношение

$$\min_{v \in V} \max_{z \in R(u^0)} \left[H(x(t, u^0, z), v, t, z) - H(x(t, u^0, z), u^0(t), t, z) \right] = 0.$$
 (5)

Здесь t — точка непрерывности u(t) справа,

$$\frac{\partial \psi(t,z)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial f(x(t,u^0,z),u^0(t),t,z)}{\partial x}\right)^* \psi(t,z) - \frac{\partial g(x(t,u,z),u^0(t),t,z)}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\psi(T,z) = 0,$$

$$H(x(t, u^{0}, z), v, t, z) = (\psi(t, z), f(x(t, u^{0}, z), v, t, z)) + g(x(t, u^{0}, z), v, t, z).$$
(7)

Назовем условие (5) поточечным принципом минимакса. Используя вариации различного вида, были получены также многоточечный, пакетный и интегральный принципы минимакса.

Перечисленные выше условия оптимальности обладают различной степенью "необходимости". Наиболее сильным в этом смысле является интегральный принцип минимакса. Заметим, что непосредственное его использование для разработки численных методов затруднительно, поэтому в [5] приводится аналог этого условия, который с успехом можно применять при построении различных численных методов.

Для случая выпуклых функционалов и выпуклых классов управлений интегральный принцип является также и достаточным.

Возможным делается решение задач, связанных с построением управления учитывающим внешнее воздействие на систему, кроме управляющего. В этом случае предлагается метод вычисления оптимального значения функционала при всех значениях параметра из некоторого заданного множества. Рассматриваются также задачи оптимального управления, осложненные наличием постоянного или переменного запаздывания [6].

Для случая выпуклых функционалов (если J(u,z) выпуклы по и для всех $z \in Z$) и выпуклых классов управлений необходимое условие в виде интегрального принципа минимакса является также и достаточным. Однако, непосредственное использование этого результата для разработки численных методов затруднительно, поэтому разработаны методы последовательных приближений с привлечением других результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. - М.: Наука, 1972.

- [2] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. ЖВМ и МФ, 1965, т.5, №3.
- [3] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Изд.3. М.: Наука, 1976.
- [4] Виноградова Т.К., Демьянов В.Ф. О принципе минимакса в задачах оптимального управления. - ДАН СССР, 1973, т. 213, №3, с.512-514.
- [5] Виноградова Т.К. О необходимых условиях в минимаксных задачах управления. Сб. научн. трудов "Известия СПбЭТИ", 1992, вып. 449, с.39-44.
- [6] Виноградова Т.К. Негладкая задача с отклоняющимся аргументом. Сб. научн. трудов "Известия СПбГЭТУ 1994, вып. 472, с.29-32.

Synthesizing Control Design Using a Minimax Method Vinogradova T.K., Lizunova N.A.

vinogradova@inbox.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия; Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (Великолукский филиал)

Рассматривается задача синтеза оптимального управления объектом, поведение которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u, \sigma),$$

где x-n-мерный фазовый вектор, $\sigma-k$ -мерный вектор возмущений, u-m-мерный вектор управления. Вектор σ может быть случайным (тогда он задан своим статистическим описанием), либо неопределенным (характеризующим недостаточность наших знаний об изучаемом явлении). В обоих случаях вектор $\sigma(t)$ задается своей принадлежностью к некоторому множеству:

$$\sigma(t) \in \Sigma_{\sigma}(t) \quad \forall t, \qquad u \in G_u \quad \forall t, x, \sigma, \qquad x \in G_x \quad \forall t.$$

Требуется найти синтезирующее управление $u=u(x,\sigma,t)$, оптимизирующее заданный функционал J(u,x). Предлагается несколько подходов к решению задачи приближенного синтеза. Итак, рассматривается задача о построении синтезирующего управления, основанного на построении аппроксимирующего множества допустимых управлений параметрическим семейством функций. Решение задачи синтеза проводится в несколько этапов: нахождение программного управления для выбранного набора данных, задание параметрического семейства управляющих функций, затем отыскание оптимальных значений параметров. В такой

138 Вишневский В.Э.

постановке синтезирующее управление приближенно может быть найдено в тех задачах, для которых разработаны методы нахождения программного управления. В исследуемой задаче могут рассматриваться как гладкие, так и негладкие функционалы; различными могут быть и ограничения на управление и фазовые координаты [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградова Т.К., Лизунова Н.А. Параметрический синтез в минимаксных задачах управления. Техническая кибернетика. Изв. АН СССР, №1, 1988.

О свойствах преобразований Ли-Депри (сходимость и аналитическое продолжение)

Вишневский В.Э.

Санкт-Петербургский государственный университет

Изучается система

$$\dot{x} = Ax + B(x, x), \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad x \in \mathbb{C}^n,$$

$$B(x, x) \stackrel{\triangle}{=} (\langle x | B^{(1)}x \rangle, \dots, \langle x | B^{(n)} \rangle)^T.$$
(1)

Предполагается, что $||x(t,x_0)|| \leq \mathcal{R} < \infty$ при $t \in [0,+\infty)$, где $||\cdot||$ — поликруговая норма в C^n . Рассматривается ε -параметрическое семейство задач Коши

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon (B(x, x) - Ax), \quad x(0) = x0, \quad 0 \leqslant \varepsilon \in \mathbb{R}^1,$$
 (2)

которое введением новой дополнительной переменной x_{n+1} , преобразуется в ε -параметрическое семейство задач Коши вида:

$$\dot{x} = \mathbb{A}' x + \varepsilon (B(x, x) + \tilde{\mathcal{A}}(x, x)), \quad \dot{x}_{n+1} = \lambda_{n+1} x_{n+1} - \varepsilon \lambda_{n+1} x_{n+1}^2, \lambda_{n+1} \in C^1 \setminus 0, \quad x(0) = x^0, \quad x_{n+1}(0) = 1,$$
(3)

где
$$\tilde{\mathcal{A}} \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)^T$$
, $\mathcal{A}_k \stackrel{\triangle}{=} \tilde{a}_{k_1} x_1 x_{n+1} + \dots + \tilde{a}_{kn} x_n x_{n+1}$.

При этом Spec A и правая часть (3), входящая в возмущении зависят от группы параметров, искусственно введенных в задачу. Вводя гамильтониан $H = \langle p \, | \, A \, | \, q \rangle + \varepsilon \langle p \, | \, B(q,q) \, \rangle$, строим формальное преобразование Ли–Депри [3] с генератором

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{-1} \varepsilon^m S_{m+1}(p,q),$$

где $q = q(Q, \mathcal{P}, \varepsilon), p = p(Q, \mathcal{P}, \varepsilon)$ удовлетворяет системе

$$\frac{dq}{d\varepsilon} = \frac{\partial S}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\varepsilon} = -\frac{\partial S}{\partial q}, \qquad q(0) = Q, \quad p(0) = \mathcal{P}.$$
(4)

Вишневский В.Э.

Накладывая требования, чтобы преобразования $q=q(Q,\mathcal{P},\varepsilon),\ p=p(Q,\mathcal{P},\varepsilon)$ сводили систему (3) к виду $\dot{Q}=AQ$ и сходились в некоторой области $U(0,r)\times[0,\varepsilon_0)$, получаем соотношения для введенных в (3) параметров. Формулируется ряд утверждений о сходимости генератора S и оценке области сходимости. Показано [2, 3], что решающим является принадлежность Spec $\mathbb A$ области Пуанкаре и отсутствие низших резонансов (соотношений вида $\lambda_i=\langle\overrightarrow{m}|\lambda\rangle\stackrel{\triangle}{=}m_1\lambda_1+\cdots+m_n\lambda_n$). Преобразования $q(Q,\mathcal{P},\varepsilon)$ и $p(Q,\mathcal{P},\varepsilon)$ сходятся тогда в силу теоремы Коши. Если область сходимости преобразований ld: $q=q(Q,\mathcal{P},\varepsilon)$ и $p=p(Q,\mathcal{P},\varepsilon)$ не захватывают значений $x_{n+1}=1,\ \varepsilon=1,\$ то конструируется аппроксимация Паде-Шенкса [1]. Решение задачи Коши для (3) имеет вид

$$q(t,q^{0}) = Q(t,Q^{0}) + \sum_{k=1}^{\infty} (k!)^{-1} q^{(k)}(Q(t,Q^{0})).$$
 (5)

Пусть
$$\theta \in C^n$$
, $\zeta \in C^1$ и при $|\zeta^{(0)}| < 1$ $\theta \zeta^{(0)} = q^0 \stackrel{\triangle}{=} (q_1^0, \dots, q_{N-1}^0, 1)$.

Рассмотрим аналитическую прямую $L_{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \{\theta\zeta\colon \zeta\in C^1\}$. Пусть $f(q) \stackrel{\triangle}{=} q_i + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(q), \ f_k(q) \stackrel{\triangle}{=} (k!)^{-1}Q_i^{(k)}(q)$. Тогда вопрос поточечной аппроксимации $q(t,q^0)$ из (5) за кругом сходимости ряда (5) решает следующая теорема.

Теорема 1. Функция $f_{\theta}^{(m,n)}(\zeta)$ является (m,n)-ым приближением Паде функции $f_{\theta}(\zeta)$, т.е.

$$f_{\theta}(\zeta)u_{\theta}^{(m,n)}(\zeta) - v_{\theta}^{(m,n)}(\zeta) = O(\zeta^{m+n+1}), \quad \zeta \in C^1,$$

где $f_{\theta}^{(m,n)}(\zeta) \stackrel{\triangle}{=} v_{\theta}^{(m,n)}(\zeta)(u_{\theta}^{(m,n)}(\zeta))^{-1}$, а функции $v_{\theta}^{(m,n)}$ и $u_{\theta}^{(m,n)}$ имеют требуемую форму

$$v_{\theta}^{(m,1)}(\zeta) \stackrel{\triangle}{=} \left| \begin{array}{cc} \zeta^m f_m(\theta) & \zeta^{m+1} f_{m+1}(\theta) \\ \sum_{k=0}^{m-1} f_k(\theta) \zeta^k & \sum_{k=0}^m f_k(\theta) \zeta^k \end{array} \right|,$$
$$u_{\theta}^{(m,1)} \stackrel{\triangle}{=} \left| \begin{array}{cc} \zeta^m f_m(\theta) & \zeta^{m+1} f_{m+1}(\theta) \\ 1 & 1 \end{array} \right|.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вишневский В.Э., Иванова О.А. Функционально-аналитические представления решений в нелинейных задачах теории управления. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2003.

[2] Вишневский В.Э. *Представление ограниченных решений полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Часть 1*// Механика сплошных сред и управление движением. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. Вып. 6. С. 146–170.

[3] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

On the Asymptotic Stability of a Class of Nonlinear Difference Switched Systems

Волошин М.В.

st023432@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская набережная, д. 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

Об асимптотической устойчивости одного класса нелинейных разностных систем с переключениями

В данной работе исследуется проблема устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем с переключениями. Предполагается, что нелинейности удовлетворяют ограничениям секторного типа. Система с переключениями состоит из семейства подсистем и закона их переключения. Системы такого вида появляются при моделировании многих реальных процессов [1, 2]. Рассматриваемые разностные системы могут получаться при численном интегрировании соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Разностные системы также представляют самостоятельный интерес, так как состояния многих реальных процессов изменяются в дискретные моменты времени [3–5].

Пусть \mathbb{N} — множество натуральных чисел, $\mathbb{M} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество моментов времени, $n \in \mathbb{N}$ — количество переменных состояния системы, $I = \{1, \dots, n\}, \ N \in \mathbb{N}$ — количество подсистем, $Q = \{1, \dots, N\}$.

Рассмотрим систему

$$\boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{x}(k) = h \boldsymbol{P}_{\sigma(k)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)). \tag{1}$$

Здесь $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))^T$; скалярные функции $f_i(x_i) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны и обладают свойством $x_i f_i(x_i) > 0$ при $x_i \neq 0, i \in I$; $\sigma(k) \colon \mathbb{M} \to Q$ — кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения; $P_s \colon Q \to \mathbb{R}^{n \times n}$ — постоянные матрицы; h > 0 — шаг дискретизации.

Таким образом, в каждый момент времени работа системы (1) описывается одной из подсистем

$$x(k+1) - x(k) = hP_s f(x(k)), \quad s \in Q.$$
(2)

Рассмотрим соответствующие подсистемам (2) системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}_s \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad s \in Q. \tag{3}$$

Из свойств функции f(x) следует, что системы (1–3) имеют нулевые решения.

Системы вида (2) и (3) широко применяются при изучении систем автоматического регулирования [1, 3]. Они также используются при моделировании нейронных сетей [6].

В работе [7] были получены достаточные условия, при выполнении которых для семейства подсистем (3) существует общая функция Ляпунова, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. При этом рассматривалось несколько возможных вариантов построения такой функции.

Предположим теперь, что гарантировать существование общей функции Ляпунова для подсистем (3) не удается. Тогда обеспечить асимптотическую устойчивость можно за счет наложения специальных дополнительных ограничений на закон переключения (dwell-time approach [2, 8, 9]).

Обозначим через $\theta_i: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ моменты переключений между подсистемами, то есть все такие числа θ_i , что $\sigma(\theta_i-1) \neq \sigma(\theta_i)$, $\theta_1 < \theta_2 < \dots$ Будем считать, что эти моменты известны, а порядок, в котором происходит смена режимов функционирования системы, нет. Пусть $\theta_0 = 0$. Будем рассматривать только такие законы переключения, для которых функция $\sigma(k)$ на промежутке $[0, +\infty)$ имеет бесконечное количество переключений. Обозначим промежутки между переключениями $T_i = \theta_i - \theta_{i-1}, i \in \mathbb{N}$.

Далее наложим на правые части уравнений (1) некоторые ограничения.

Предположение 1. Пусть для каждого значения индекса $s \in Q$ существуют положительные числа $\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_n^{(s)},$ при которых матрица $\boldsymbol{P}_s^T\boldsymbol{\Lambda}_s+\boldsymbol{\Lambda}_s\boldsymbol{P}_s$ отрицательно определена. Здесь

$$oldsymbol{\Lambda}_s = extbf{diag}ig(\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_n^{(s)}ig).$$

Условия существования таких значений $\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_n^{(s)}$ исследовались в работах [7, 10].

Если выполнено предположение 1, то для каждого $s \in Q$ нулевое решение s-ой подсистемы из (3) асимптотически устойчиво при любых

допустимых функциях $f_i(x_i)$, причем для этой подсистемы функция

$$V_s(oldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(s)} \int\limits_0^{x_i} f_i(au) \, d au \colon \ \mathbb{R}^n o \mathbb{R}$$

удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если бы требуемые значения $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_n^{(s)}$ удалось подобрать одинаковыми для всех $s \in Q$, то это бы означало, что для подсистем (3) получилось построить общую функцию Ляпунова. Однако, условия существования такой общей функции Ляпунова являются гораздо более жесткими, нежели условия существования своей частной функции Ляпунова для каждой отдельной подсистемы.

Предположение 2. Пусть функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют условию Липшица, то есть существует положительное число L, при котором для всех $x_i', x_i'' \in \mathbb{R}$

$$|f_i(x_i') - f_i(x_i'')| \le L|x_i' - x_i''|, i \in I.$$

Предположение 3. Пусть существуют положительные числа β_i , при которых функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{0}^{x_{i}} f_{i}(\tau) d\tau \leqslant \beta_{i} f_{i}^{2}(x_{i}), \quad x_{i} \in \mathbb{R}, \quad i \in I.$$

В частности, предположение 3 будет выполнено, если функции $f_i(x_i)$ монотонно возрастают при $x_i \in \mathbb{R}$, и существуют положительные числа γ_i , при которых функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют условиям

$$|f_i(x_i)| \geqslant \gamma_i |x_i|, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i \in I.$$

Используя известные частные функции $V_1(\boldsymbol{x}),\dots,V_N(\boldsymbol{x})$ для подсистем (3), построим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(k)}(\boldsymbol{x})$ для системы (1), соответствующую закону переключения $\sigma(k)$. С помощью оценки приращения этой функции в силу системы (1) и последующей оценки нормы решений этой системы получим следующий результат.

Теорема. Пусть выполнены предположения 1–3, и

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p-1} T_{m+i} \to \infty \tag{4}$$

при $p \to \infty$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такое положительное число h_0 , что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом

при всех $h \in (0, h_0)$. Если при этом предельное соотношение (4) выполнено равномерно по отношению к $m \in \mathbb{N}$, то положительное число h_0 можно выбрать так, нулевое решение системы (1) будет равномерно асимптотически устойчиво при всех $h \in (0, h_0)$.

В данной работе на основе прямого метода Ляпунова получены достаточные условия асимптотический устойчивости решений рассмотренного класса нелинейных разностных систем с переключениями. При этом асимптотическая устойчивость имеет глобальный характер и обеспечивается с помощью наложения ограничений на закон переключения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-01-00587.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aleksandrov, A.Yu., Aleksandrova, E.B. and Platonov, A.V., "Ultimate boundedness conditions for a hybrid model of population dynamics", Proc. 21st Mediterranean Conf. on Control and Automation (MED'2013), Platanias—Chania, Crite, Greece, 622—627 (2013).
- [2] Decarlo, R.A., Branicky, M.S., Pettersson, S. and Lennartson, B., "Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems", *Proc. IEEE*, 88, No. 7, 1069–1082 (2000).
- [3] Kazkurewicz E., Bhaya A., Matrix diagonal stability in systems and computation, Boston: Birkhauser, (1999).
- [4] Халанай А., Векслер Д., Качественная теория импульсных систем, М.: Мир, (1971).
- [5] Видаль П., Нелинейные импульсные системы, М.: Энергия, (1974).
- [6] Hopfield, J.J. and Tank, D.W., "Computing with neural circuits: a model", Science, 233, 625–633 (1986).
- [7] Aleksandrov, A.Y. and Platonov, A.V., "On absolute stability of one class of nonlinear switched systems", *Automation and Remote Control*, 69, No. 7, 1101–1116 (2008).
- [8] Aleksandrov, A.Yu., Kosov, A.A. and Platonov, A.V., "On the asymptotic stability of switched homogeneous systems", Systems Control Lett., 61, No. 1, 127–133 (2012).
- [9] Branicky, M.S., "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43, No. 4, 475–482 (1998).
- [10] Kamenetskiy, V.A. and Pyatnitskiy, Ye.S., "An iterative method of Lyapunov function construction for differential inclusions", Systems Control Lett., 8, No. 5, 445–451 (1987).

On the Question of Zero-Controllability of Nonstationary Bilinear Systems

Екимов А.В., Балыкина Ю.Е., Свиркин М.В.

a.ekimov@spbu.ru, j.balykina@spbu.ru, m.svirkin@spbu.ru Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб. д. 7-9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

К вопросу о нуль-управляемости нестационарных билинейных систем

Рассмотрим нестационарную билинейную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)u) x + b(t)u + f(t), \tag{1}$$

где A(t), B(t) — непрерывные и ограниченные при $t\geqslant 0$ $(n\times n)$ -матрицы, вектор-функции b(t) и f(t) также непрерывные и ограниченные при $t\geqslant 0$. Допустимыми считаем скалярные управления u(t), которые являются непрерывными функциями на данном промежутке.

Определение 1. Систему (1) будем называть глобально нульуправляемой, если для любого $x_0 \in E^n$ и любого $t_0 \geqslant 0$ существует допустимое управление u = u(t), переводящее систему (1) из положения x_0 в ноль за конечное время.

Определение 2. Положение x=0 называется асимптотическим положением покоя системы

$$\dot{x} = f(t, x),\tag{2}$$

если существует некоторая окрестность $||x|| \le \varepsilon$ положения x=0 такая, что любое решение $x(t,t_0,x_0)$, начинающееся в этой окрестности при $t=t_0,t_0\geqslant 0$ будет ограничено при $t\geqslant t_0$ и, кроме того, $||x(t,t_0,x_0)||\to 0$ при $t\to +\infty$.

Если для любых $x_0 \in E^n$ и любых $t_0 \geqslant 0$ решение $x(t,t_0,x_0)$ ограничено и $||x(t,t_0,x_0)|| \to 0$ при $t \to +\infty$, то x=0 называется асимптотическим положением покоя в целом системы (1).

В работе [1] доказана следующая теорема:

Теорема 1 (В.И. Зубов). Для того, чтобы x = 0 было асимптотическим положением покоя системы (2), достаточно выполнения следующих условий:

- 1. существует определенно-положительная функция v(t,x) такая, что $v(t,x) \to 0$ при $x \to 0$ равномерно относительно $t \geqslant 0$;
- 2. полная производная функции v(t,x) в силу системы (1) имеет вид $\dot{v}(t,x)\mid_{(1)}=w(t,x)+w_1(t,x),$ где функция w(t,x) отрицательно определена и $w_1(t,x)\to 0$ при $t\to +\infty$ равномерно относительно x во всякой ограниченной области, содержащей точку x=0;

3. существуют числа $\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0,\ \varepsilon_1<\varepsilon_2$ такие, что $\inf_{\|x\|=\varepsilon_2,t\geqslant 0}v(t,x)>\sup_{\|x\|=\varepsilon_1,t\geqslant 0}v(t,x)$ и $\dot{v}(t,x)\mid_{(1)}<0$ при $\varepsilon_1<\|x\|<\varepsilon_2.$

Теорема 2. Для того, чтобы система (1) была глобально нульуправляемой, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. система

$$\dot{x} = A(t)x\tag{3}$$

была экспоненциально устойчивой;

- 2. $f(t) \to 0$ при $t \to +\infty$;
- 3. для любого $t_0\geqslant 0$ существует T>0 и непрерывные скалярные функции $v_1(t),\,v_2(t),\,...,\,v_n(t)$ такие, что матрица

$$G = \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau) \left(B(\tau)x(\tau) + b(\tau)\right) v(\tau) d\tau,$$

где Y(t) – нормированная при $t=t_0$ фундаментальная матрица системы (3),

$$x(t) = Y(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau\right), v(t) = (v_1(t), v_2(t), ..., v_n(t))^T.$$

Доказательство: Замкнем систему (1) управлением u=0. Получим линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t). \tag{4}$$

В силу экспоненциальной устойчивости системы (3) существуют две положительно определенные квадратичные формы

$$V(t,x) = x^T P(t)x$$
, $W(t,x) = x^T Q(t)x$,

удовлетворяющие оценкам: $a_1 \|x\|^2 \leqslant V(t,x) \leqslant a_2 \|x\|^2$, $b_1 \|x\|^2 \leqslant V(t,x) \leqslant b_2 \|x\|^2$, где a_1 , a_2 , b_1 , b_2 – положительные константы. При этом

$$\dot{v}(t,x)\mid_{(3)} = -W(t,x).$$

Продифференцируем функцию V(t,x) в силу системы (4). $\dot{v}(t,x)\mid_{(4)}=-W(t,x)+W_1(t,x),$ где $W_1(t,x)=2x^TP(t)f(t).$

Последовательной проверкой легко убедиться в том, что выполнены все условия Теоремы 1 и x=0 является асимптотическим положением покоя системы (4). Из любой начальной точки $x_0 \in E^n$ система (4) за конечное время попадет в сколь угодно малую окрестность нуля. Для

того, чтобы перевести систему (1) из окрестности в ноль, воспользуемся методом, предложенным в работе [2]. Управление выберем в виде

$$u(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) + \dots + c_n v_n(t).$$

Рассмотрим неявное уравнение $x(t_0+T,t_0,x_0,c)=0$ для определения $c=c(x_0)$. Условие 3) обеспечивает существование и единственность неявной функции $c=c(x_0)$ такой, что $c(x_0)\to 0$ при $x_0\to 0$. При подстановке полученных коэффициентов усиления получим искомое программное управление.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубов В.И., Колебания и волны, ЛГУ, (1980).
- [2] Зубов В.И., "Нелинейные программные управления", Дифференциальные уравнения, No. 15, (1979).
- [3] Ekimov A.V., Balykina Yu.E., Svirkin M.V., "On the estimation of the attainability set of nonlinear control systems", AIP Conference Proceedings, Vol. 1648 (2015).

The Stabilization of the Linear Differential-Difference Systems with the Linear Increasing Time-Delay by the Piecewise Constant Control

Жабко А.П., Зараник У.П., Чижова О.Н.

a.zhabko@spbu.ru, u.zaranik@spbu.ru, Чижова О.Н.

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

In this article we present an extension of the prediction scheme proposed in Smith (1959) for the compensation of the input delay to the case of linear difference systems with constant coefficients. As a result we research a possibility to stabilize such systems and construct the stabilizing control.

Стабилизация линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием кусочно-постоянным управлением

При составлении математических моделей различных реальных технических, биологических, экономических и других систем иногда приходится прибегать не к дифференциальным, а к разностным уравнениям, причём роль последних в математическом моделировании постоянно возрастает. К разностным уравнениям приводят, например, методы численного интегрирования в вычислительной математике, методы сеток и конечных элементов в математической физике, различные экономические и

экологические задачи. Большой интерес при этом представляют разностные управляемые и наблюдаемые системы. Дискретизация в этом случае носит естественный характер, поскольку наблюдения осуществляются не непрерывным образом, а с каким-то конечным временным интервалом. В отдельный класс таких систем можно выделить разностные управляемые системы с запаздываниями. Они описывают ситуации, когда информация о ходе процесса поступает к регулятору со значительной временной задержкой, что иногда влечёт за собой неустойчивость замкнутой системы. Следствием этого может быть невозможность практической реализации расчётного процесса работы или даже авария. Известно, что чем больше запаздывание, тем сложнее добиться требуемого качества регулирования. Одним из способов повышения качества управления является применение более сложной структуры системы управления, позволяющей уменьшить негативное влияние запаздывания. В частности, для управления системами с большими запаздываниями применяется предиктор [1], цель которого - "предсказать" выходной сигнал до его непосредственного появления. В настоящее время известны различные схемы построения регуляторов, как для линейных, так и для нелинейных систем запаздывающего типа [2, 3], а также для систем нейтрального типа [4].

В данной работе рассмотрена линейная управляемая дифференциально-разностная система уравнений с соизмеримыми запаздываниями в управлении, которая в дальнейшем сводится к управляемой разностной системе. Опираясь на результаты, полученные В. Л. Харитоновым [5, 6], авторы предлагают применить предложенный им метод компенсации запаздывания для разностных систем.

Рассмотрим следующую дифференциально-разностную систему

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(\beta(t)) + Bu,$$

где x-n-мерный вектор фазовых состояний, u- скалярный вектор управлений; $A_0,\,A_1,\,B-$ вещественные постоянные матрицы соответствующих размерностей. Заменим производную $\dot{x}(t)$ разностью $(x(t+\Delta)-x(t))/\Delta,$ сделаем замену аргумента $\tau=\Delta\cdot t$ и введём новую искомую функцию $y(\tau)=x(\Delta\cdot t).$

Предыдущая система примет тогда вид

$$y(\tau + 1) = \tilde{P}y(\tau) + P_1y(\beta(\tau)) + Du,$$

где
$$\tilde{P} = I + \Delta \cdot A_0, P_1 = \Delta \cdot A_1, D = \Delta \cdot B.$$

Положим сначала $P_1=0$ и введём матрицу $S=(D,\tilde{P}D,\ldots,\tilde{P}^{n-1}D)$. Будем считать, что rangS=n. Для преобразованной разностной системы будем строить стабилизирующее управление вида $u(\tau)=C^Ty(\tau-N)$, где

 $N\geqslant 1,\,C^T$ — вещественный постоянный вектор размерности $1\times n$, подлежащий определению. Введём далее вектор $z(\tau)$ по формуле $y(\tau)=Sz(\tau)$. Обозначая как $z_n(\tau)$ последнюю компоненту вектора $z(\tau)$, получим, известным образом, следующее скалярное уравнение

$$z_n(\tau+n) + p_1 z_n(\tau+n-1) + \dots + p_{n-1} z_n(\tau+1) + p_n z_n(\tau) = u(\tau-N), (1)$$

где величины $p_j, j=1,\ldots,n$ – коэффициенты характеристического уравнения матрицы \tilde{P} . Далее нетрудно показать, что управление

$$u(\tau) = C^T S z(\tau) = \tilde{c}_1 z_n(\tau + n - 1) + \tilde{c}_2 z_n(\tau + n - 2) + \dots + \tilde{c}_n z_n(\tau)$$

вообще говоря, не является стабилизирующим. В самом деле, уравнение (1), замкнутое таким управлением, будет иметь вид

$$z_n(\tau + n) + p_1 z_n(\tau + n - 1) + \ldots + p_{n-1} z_n(\tau + 1) + p_n z_n(\tau) =$$

$$= \tilde{c}_1 z_n (\tau + n - 1 - N) + \tilde{c}_2 z_n (\tau + n - 2 - N) + \dots + \tilde{c}_n z_n (\tau - N).$$

Можно заметить, что при N=1 и n=1 получается уравнение

$$z(\tau + 1) = -p_1 z(\tau) + \tilde{c}_1 z_n (\tau - 1),$$

которое неустойчиво, если $|p_1| > 2$. При N=1 будем искать стабилизирующее управление в виде

$$u(\tau) = \tilde{c}_1 z_n(\tau + n - 1) + \tilde{c}_2 z_n(\tau + n - 2) + \dots + \tilde{c}_{n-1} z_n(\tau + 1) + \tilde{c}_n \xi(\tau + n), \quad (2)$$

где

$$\xi(\tau+n) = d_1\xi(\tau+n-1) + d_2(\tau+n-2) + z_n(\tau+n-2).$$
 (3)

В управлении (2) положим $\tilde{c}_{n-1}=p_n, \tilde{c}_{n-2}=p_{n-1},\dots, \tilde{c}_1=p_2$ и рассмотрим систему удвоенной размерности

$$\begin{cases} z_n(\tau+n) + p_1 z_n(\tau+n-1) - \tilde{c}_n \xi(\tau+n-1) = 0\\ \xi(\tau+n) - d_1 \xi(\tau+n-1) - d_2(\tau+n-2) - z_n(\tau+n-2) = 0. \end{cases}$$
(4)

Полагая здесь

$$\left(\begin{array}{c} z_n(\tau) \\ \xi(\tau) \end{array}\right) = \rho^{\tau} \left(\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array}\right) ,$$

запишем,

$$\begin{cases} \rho^{\tau+n}l_1 + p_1\rho^{\tau+n-1}l_1 - \tilde{c}_n\rho^{\tau+n-1}l_2 = 0 \\ \rho^{\tau+n}l_2 - d_1\rho^{\tau+n-1}l_2 - d_2\rho^{\tau+n-2}l_2 - \rho^{\tau+n-2}l_1 = 0. \end{cases}$$

или, после сокращения

$$\begin{cases} \rho l_1 + p_1 l_1 - \tilde{c}_n l_2 = 0 \\ \rho^2 l_2 - d_1 \rho l_2 - d_2 l_2 - l_1 = 0. \end{cases}$$

Соответственно, характеристическое уравнение имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} \rho + p_1 & -\tilde{c}_n \\ -1 & \rho^2 - d_1\rho - d_2 \end{pmatrix} = \rho^3 + (p_1 - d_1)\rho^2 - \\ - (p_1d_1 + d_2)\rho - (p_1d_2 + \tilde{c}_n) = 0,$$

Теперь, зная величину p_1 , выберем последовательно величины d_1 , d_2 и \tilde{c}_n так, чтобы все корни характеристического уравнения располагались на комплексной плоскости в круге единичного радиуса. Система (4) будет, следовательно, асимптотически устойчивой, а это значит, что управление (2) с учётом ранее определённых коэффициентов \tilde{c}_i , $i=1,\ldots,n-1$, будет стабилизировать уравнение (1).

Аналогичным образом можно строить стабилизирующее управление в случае, когда N>1. В общем случае ищем стабилизирующее управление в виде

$$u(\tau - N) = \tilde{c}_1 \xi(\tau + n - 1) + \tilde{c}_2 \xi(\tau + n - 2) + \dots + \tilde{c}_n \xi(\tau),$$

где
$$\xi(\tau+n)+d_1\xi(\tau+n-1)+d_2\xi(\tau+n-2)+\ldots+d_{1+N}\xi(\tau+n-1-N)+z_n(\tau+n-1-N)=0.$$

Полученный результат переносится также на случай векторного управления. Кроме того, можно показать, что построенный закон управления является робастным по отношению к неопределённости в коэффициентах исходной системы.

- [1] Smith O.J.M. A controller to overcome dead time, ISA, vol. 6, 28-33 (1959).
- [2] Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment for systems with delays, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 24, 541-553, (1979).
- [3] Krstic M. Delay compensation for nonlinear, adaptive and PDE systems, Birkhauser, (2009).
- [4] Kharitonov V. L. Predictor based stabilization of neutral type systems with input delay, *Automatica*, 52, 125-134, (2015).
- [5] Kharitonov V. L. An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay, *Automatica*, 50(1), pp 211-217, (2014).
- [6] Kharitonov V. L. Predictor-based controls: The implementation problem, Differential Equations, 51(13), 1675-1682, (2015).

150 Зубов C.B.

Rated Stability of a First-Order Ordinary Differential Equation

Зубов С.В.

s.zybov@spbu.ru

СПбГУ, Университетский просп., 35, Санкт-Петербург, 198504, Россия

Расчетная устойчивость некоторого обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda^2 f(x) + g_1(t), t \leqslant 0, \tag{1}$$

где x - скалярная величина, λ - числовой параметр, f(x) - скалярная непрерывная функция, заданная в некотором интервале $(-l,l),\ l=const>0$, удовлетворяющая там условию Липшица, а также условию $xf(x)>0,\ x\neq 0$. Будем также предполагать, что скалярная функция $g_1(t)$ определена и непрерывна при всех $t\leqslant 0,\ g_1(t)\not\equiv 0$ при $t\leqslant 0$ и такова, что выполняется условие

$$\int_0^{+\infty} g_1^2(t)dt < +\infty.$$

Очевидно, что f(0) = 0 в силу непрерывности функции f(x), но движение x = 0 не реализуется уравнением (1), т.к. $g_1(t) \not\equiv 0$ при $t \leqslant 0$.

Теорема. При выполнении указанных условий на функции f(x), $g_1(t)$ в уравнении (1) движение x=0 является расчетно устойчивым.

Доказательство. С целью обоснования сделанного утверждения построим для уравнения (1) функцию типа Ляпунова V(x,t), удовлетворяющую теореме 1.5 [1], и тогда расчетная устойчивость движения x=0 уравнения (1) будет следовать из указанной теоремы.

Возьмем

$$V(x,t) = \int_0^x f(\tau)d\tau + f_1(t), t \le 0,$$
 (2)

где функция $f_1(t)$ задана для всех $t\leqslant 0$ и дифференцируема по t при $t\leqslant 0$. Она будет определена ниже. Вычислим полную производную функции V(x,t) в силу уравнения (1). Получаем

$$\frac{dV}{dt} = f(x) \left(-\lambda^2 f(x) + g_1(t) \right) + f_1'(t) =
= -\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x) \frac{g_1(t)}{2\lambda} - \frac{g_1^2(t)}{4\lambda^2} + \frac{g_1^2(t)}{4\lambda^2} + f_1'(t) =
= -\left(\lambda f(x) - \frac{g_1(t)}{2\lambda} \right)^2 + \frac{g_1^2(t)}{4\lambda^2} + f_1'(t). \quad (3)$$

Зубов С.В. 151

Первое слагаемое в (3) неположительно. Выберем теперь функцию $f_1(t)$ следующим образом:

$$f_1(t) = \frac{1}{4\lambda^2} \int_t^{+\infty} g_1^2(\tau) d\tau + \int_t^{+\infty} h(\tau) d\tau, \tag{4}$$

где некоторая функция h(t) определена и непрерывна для всех $t\leqslant 0$, удовлетворяет неравенству $h(t)\leqslant 0$ при $t\leqslant 0$ и такова, что второй несобственный интеграл в (4) сходится. Тогда при дифференцировании функции $f_1(t)$ в (4) получаем, что

$$\frac{g_1^2(t)}{4\lambda^2} + f_1'(t) = -h(t) \geqslant 0$$

для всех $t\leqslant 0$, т.е. сумма двух последних слагаемых в (3) также неположительна. Таким образом, при данном выборе функции $f_1(t)$ из соотношений (3), (4) вытекает, что $\frac{dV}{dt}\geqslant 0$ при всех $t\leqslant 0$. По самому построению функции $f_1(t)$ получаем, что справедливо неравенство $f_1(t)\leqslant 0$ при всех $t\leqslant 0$. Кроме того, из свойств функции f(x) вытекает справедливость соотношения

$$\int_0^x f(\tau)d\tau > 0$$

для всех $x \neq 0$. Таким образом, определенная в (2) функция V(x,t) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.5 [1], из которой и следует, что движение x=0 уравнения (1) расчетно устойчиво. Теорема доказана полностью.

Пример. Если взять $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$, где p и q - целые положительные нечетные числа, $\frac{p}{q} > 1$, а $g_1(t) = (1+t)^{-\alpha}$, $\alpha = const > \frac{1}{2}$, то все условия доказанной теоремы выполняются. В качестве h(t) можно взять функцию $(1+t)^{-2}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зубов С.В., Зубов Н.В. Математические методы стабилизации динамических систем., Изд-во С.-Петерб. ун-та, (1996).

Special Matrix Transformations of Essentially Nonlinear Control Systems

Камачкин A.М., Xитров $\Gamma.М.$, Шамберов B.H.

akamachkin@mail.ru, chitrow@gmail.com, shamberov@mail.ru Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб. 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия; Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Лоцманская 3, Санкт-Петербург, 198008,

Специальные матричные преобразования существенно нелинейных систем управления

Сложные нелинейные системы управления, принципиально не поддающиеся линеаризации (содержащие, например, неоднозначные нелинейности), как правило, нельзя до конца исследовать аналитически. С другой стороны, применение только компьютерных технологий для их исследования часто дает повод сомневаться в достоверности полученных результатов. Поэтому, методы, основанные на декомпозиции пространства параметров существенно нелинейных многомерных систем приобретают особое значение.

Декомпозиция, как правило, производится с помощью линейных преобразований с невырожденными постоянными матрицами. Применение таких преобразований расщепляет многомерную систему на подсистемы более низких размерностей доступные полному и строгому анализу [1 - 14].

Изложим метод нахождения матрицы канонического преобразования, при котором матрица линейной части исходной системы приводится к первой естественной нормальной форме.

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot \{N[y(t) + \psi(t)], \ x(0) = x_0, \ y(t) = C \cdot x(t),$$
 (1)

где $A,\ B,\ C$ — вещественные матрицы размерности $n\times n,\ n\times m,\ m\times n$ соответственно; $x(t),\ \dot{x}(t)$ и y(t) — векторы размерности $n,\ n$ и $m\ (n\geqslant m)$ соответственно; $\psi(t)$ — вектор внешних возмущающих воздействий размерности m. Нелинейная часть системы представлена вектором нелинейных функций N[y(t)] размерности m. Элементы матриц B и C выступают в качестве параметров настройки и могут изменяться для придания системе (1) требуемых свойств.

Преобразованием $x(t) = T \cdot z(t)$ исходную систему (1) необходимо привести к виду

$$\dot{z}(t) = A_{\rm n} \cdot z(t) + B_{\rm T} \cdot \{N[y(t) + \psi(t)], \ z(0) = z_0, \ y(t) = C_{\rm T} \cdot z(t) \ .$$
 (2)

Пусть матрица A линейной части системы (1) такова, что существует невырожденная матрица T, такая, что преобразование $x(t) = T \cdot z(t)$ приводит матрицу A к виду $A_{\rm n} = T^{-1} \cdot A \cdot T$, где $A_{\rm n}$ - первая естественная нормальная форма матрицы A.

Матрица T при этом выбирается неоднозначно. Пусть $T=S\cdot Q_{\rm n}$, где S и $Q_{\rm n}$ - невырожденные матрицы такие, что $S^{-1}\cdot A\cdot S=A_{\rm n}$, а $Q_{\rm n}$ - матрица, описывающая неоднозначность выбора матрицы T, определяется из условия $A_{\rm n}=Q_{\rm n}^{-1}\cdot A_{\rm n}\cdot Q_{\rm n}$.

Таким образом, в преобразованной системе (2) $B_{\rm T} = Q_{\rm n}^{-1} \cdot S^{-1} \cdot B$, $C_{\rm T} = C \cdot S \cdot Q_{\rm n}$. Расщепление преобразованной системы (2) на подсистемы более низкой размерности, чем n можно получить приравниванием к нулю определенных элементов матриц $B_{\rm T}$ и $C_{\rm T}$.

Обозначим $P_{\rm n}$ множество невырожденных матриц $Q_{\rm n}$, которые при преобразовании подобия оставляют матрицу $A_{\rm n}$ неизменной, т.е. таких, что $Q_{\rm n}^{-1} \cdot A_{\rm n} \cdot Q_{\rm n} = A_{\rm n}$.

Очевидно, что такие $Q_{\rm n}$ образуют группу относительно операции умножения таких матриц.

Следовательно $P_{\rm n}$ – группа, которую можно назвать группой автоморфизмов матрицы $A_{\rm n}$. При этом группа $P_{\rm n}$ является подгруппой группы невырожденных матриц n-го порядка.

В явном виде группа $P_{\rm n}$ находится из системы уравнений $A_{\rm n}\cdot Q_{\rm n}=Q_{\rm n}\cdot A_{\rm n}$ относительно элементов матрицы $Q_{\rm n}.$

Например: группа автоморфизмов P_2 для матрицы A_2 – двухпараметрическая; группа автоморфизмов P_3 для A_3 при различных условиях на ее коэффициенты может быть однопараметрической, двухпараметрической и трехпараметрической. Процесс построения групп P_n (n > 3) может быть продолжен при неизменном условии при любом n: det $Q_n \neq 0$.

Параметры, входящие в матрицу Q_n , позволяют целенаправленно варьировать декомпозиции системы (2).

- [1] Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Декомпозиция многомерных нелинейных систем со сложными структурами // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (STAB-2012): Тезисы докладов XII Международной конференции. Москва, ИПУ РАН, 5 июня 8 июня 2012 г. М.: Изд-во ИПУ РАН, 2012. С. 162 163.
- [2] Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Метод декомпозиции в многомерных динамических системах // Устойчивость и процессы управления: Всероссийская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения В.И.Зубова, СПб, 2010. С. 69.
- [3] Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Существование и устойчивость периодических решений неавтономных многомерных нелинейных систем // Со-

- временные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ 2015): сб. трудов VII Международной научной конференции. Воронеж, 14-21 сентября, 2014. Воронеж. Изд-во «Научная книга», 2014 г. С 175-177.
- [4] A. M. Kamachkin, V. N. Shamberov; The Decomposition Method of Research into the Nonlinear Dynamical Systems' Space of Parameters / Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, № 81, pp. 4009 – 4018.
- [5] Аунг П.В., Шамберов В.Н. Вынужденные колебания в системе с сухим трением, находящейся под внешним гармоническим воздействием / Системы управления и информационные технологии. №4(58). Изд-во «Научная книга», Воронеж. 2014 г. С. 4 6.
- [6] Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Существование периодических движений в неавтономных многомерных нелинейных системах / Системы управления и информационные технологии. №1(59). Изд во «Научная книга», Воронеж. 2015 г. С. 16 19.
- [7] Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Определение бифуркационной структуры пространства параметров методом декомпозиции / Системы управления и информационные технологии. Москва-Воронеж. Изд-во «Научная книга», № 4(50), 2012. С. 11 13.
- [8] Камачкин А.М., Согонов С.А., Шамберов В.Н. Вынужденные периодические решения нелинейных многосвязных систем / Системы управления и информационные технологии. Научно-технический журнал №1(55). ООО Издательство «Научная книга», Воронеж. 2014 г. С. 8 -12.
- [9] Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Параметрическая декомпозиция в задачах исследования динамического поведения нелинейных систем // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ -2015): сб. трудов VIII Международной научной конференции. Воронеж, 21 26 сентября, 2015. Воронеж. Изд-во «Научная книга», 2015 г. С 169 172.
- [10] Потапов Д.К. Управление спектральными задачами для уравнений с разрывными операторами // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 190-200.
- [11] Евстафьева В.В. О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3. № 2. С. 20-27.
- [12] A.M.Kamachkin, G.M.Chitrov, V.N.Shamberov. Algebraical aspects of parametrical decomposition method / 2015 International Conference«Stability and Control Processes» in Memory of V.U.Zubov (SCP-2015),IEEE, pp. 52 – 54 (DOI: 10. 1109 / SCP. 2015. 7342056).
- $[13] \quad A.M. Kamachkin, V.N. Shamberov. \ The method of parametrical decomposition. \\ Base subsystems and their state space / 2016 1nternation Conference "Stability" and their state space / 2016 1nternation Conference (Stability Stability Stabil$

Мышков С.К. 155

and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference), IEEE (DOI: 10.1109/stab. 2016.7541190).

[14] Шамберов В.Н., Камачкин А.М. Колебания в многомерных динамических системах с сухим трением, находящихся под внешним периодическим воздействием / Труды X Всероссийской научной конференции имени Ю.И.Неймарка «Нелинейные колебания механических систем», Нижний Новгород, 26 – 29 сентября 2016 г., с 801 – 810.

On the Minimax Approach in a Singularly Perturbed Control Problem

Мышков С.К.

skmyshkov@mail.ru

СПбГУ, Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, Почтовый код, Россия

О минимаксном подходе в сингулярно возмущенной задаче управления

Рассматривается следующая сингулярно возмущенная линейноквадратичная задача управления:

$$E(\mu)\dot{x} = P(\mu)x + Q(\mu)u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$z(t) = H(\mu)x(t) = H_1(\mu)x_1(t), \tag{2}$$

$$u = Mz, (3)$$

$$J(u) = \int_0^\infty (x^* A(\mu) x + x^* B(\mu) u + u^* B^*(\mu) x + u^* C(\mu) u) dt, \tag{4}$$

где $x \in R^n, x = col(x_1, x_2)$ — вектор координат состояния, $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$ — «медленные» (доминирующие) и «быстрые» координаты, $n_1 + n_2 = n$; $E(\mu) = diag(E_{n_1}, \mu E_{n_2}), E_{n_k}$ — единичные матрицы; $u \in R^r$ — управление; $z \in R^m$ — измерение, $m \leqslant n_1$; $\mu > 0$ — малый параметр; $t \geqslant 0$ — время. Все матрицы не зависят от времени и разлагаются в ряды по степеням μ , абсолютно сходящиеся при $|\mu| < \bar{\mu}$; например, для блоков $P_{ij}, i, j = 1, 2$ матрицы $P(\mu)$ имеет место разложение

$$P_{ij}(\mu) = \hat{P}_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} P_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2.$$
 (5)

Предполагается, что подинтегральная квадратичная форма положительно полуопределенная, $C(\mu) > 0$, $P_{22}(\mu)$ -гурвицева и $rank(H_1(\mu)) = m \, \forall \mu \in [0, \bar{\mu})$. Из (2),(3) следует, что в канале управления используются только доминирующие координаты и при $m < n_1$ информация о них неполная. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{r \times m}$ - множество матриц M таких, что система (1), замкнутая управлением (3), асимптотически устойчива и $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Тогда

156 Мышков С.К.

 $J(u)=x_0^*\Theta(M)x_0, \forall M\in\mathcal{M},$ где $\Theta(M)$ -решение уравнения Ляпунова для задачи (1)-(4). В регулярном случае оптимального значения матрицы M, не зависящего от $x_0,$ не существует. Поэтому необходима подходящая модификация исходной задачи. Ниже используется минимаксный подход, при котором оптимизируется функционал

$$\hat{J}(u) = \max_{\|x_0\|=1} x_0^* \Theta(M) x_0 = \lambda_{max}(\Theta(M)).$$
 (6)

Решение $u_0=M_0z$ задачи оптимизации (6) будет минимаксным управлением. Необходимые условия существования минимаксного управления имеют вид:

$$\Theta P_e + P_e^* \Theta + W(M) = 0, \tag{7}$$

$$LP_e^* + P_eL + v * v^* = 0, (8)$$

$$\Theta v = \lambda v, \tag{9}$$

$$CMHLH^* + (Q_e^*\Theta + B^*)LH^* = 0,$$
 (10)

где λ, v - максимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы Θ ; L-положительно полуопределенная n-матрица; $P_e = E^{-1}(\mu)[P+QMH], Q_e = E^{-1}(\mu)Q$ — матрицы замкнутой системы (1)-(3); матрица $W(M) = A + BMH + (BMH)^* + (MH)^*CMH$. С помощью метода асимптотических представлений доказывается, что

$$M_o = \hat{M}_s + O_1(\mu), \quad I(u_o) = \hat{\lambda}_s + O_2(\mu).$$
 (11)

Здесь \hat{M}_s , $\hat{\lambda}_s$ — решение соответствующей редуцированной задачи. Получены условия существования и единственности минимаксного управления и разработан алгоритм решения сингулярно-возмущенной линейно-квадратичной задачи управления. На примерах систем 3-5-го порядка в среде MatLab анализируются некоторые особенности используемого итеративного метода.

- [1] Мышков С.К., "Минимаксное управление сингулярно возмущенной системой с неполной информацией", Вестник Санкт-Петербургского университета, 10, No. 4, 284–291 (2009).
- [2] Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н., Введение в минимакс, Наука, (1973).

Synthesis of Optimal Boundary Control of Parabolic Systems with Distributed Parameters on the Graph

Провоторов В.В., Подвальный С.Л.

wwprov@mail.ru, spodvalny@yandex.ru

Воронежский государственный университет, Университетская площадь, 1, Воронеж, 394006, Российская Федерация; Воронежский государственный технический университет, Московский проспект, 14, Воронеж, 394026, Российская Федерация

Синтез оптимального граничного управления параболической системы с распределенными параметрами на графе

Рассматривается задача оптимального граничного управления параболической системой с распределенными параметрами на графе. Состояние системы определяется слабым решением начально-краевой задачи для параболического уравнения, управляющее воздействие на систему и наблюдение за ее состоянием осуществляются в граничных узлах графа на всем временном промежутке. Получены необходимые и достаточные условия существования оптимального управления с использованием сопряженного состояния системы, решена задача синтеза оптимального управления. Представленные результаты являются основополагающими при исследовании задач граничного управления динамикой ламинарных течений многофазных сред.

Используются понятия и обозначения, принятые в [1, 2]:

 Γ — ограниченный ориентированный геометрический граф с ребрами γ , параметризованными отрезком [0,1];

 $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ — множества граничных и внутренних узлов графа, соответственно;

 Γ_0 — объединение всех ребер, не содержащих концевых точек;

$$\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t), \ \partial \Gamma_t = \partial \Gamma \times (0, t) \ (t \in [0, T]).$$

Необходимые пространства и множества:

 $C(\Gamma)$ — пространство непрерывных на Γ функций;

 $L_p(\Gamma)$ (p=1,2) — банахово пространство измеримых на Γ_0 функций, суммируемых с p-й степенью (аналогично определяются пространства $L_p(\Gamma_T)$):

 $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}=\int\limits_0^T(\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2}dt;$

 $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$;

 $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$ (аналогично вводится пространство $W^1(\Gamma_T)$;

 $V_2(\Gamma_T)$ — множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$||u||_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0 \le t \le T} ||u(\cdot, t)||_{L_2(\Gamma)} + ||u_x||_{L_2(\Gamma_T)}$$
(1)

и сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$.

Введем пространство состояний параболической системы и вспомогательных пространств. Для этого рассмотрим билинейную форму $\ell(\mu,\nu)=\int\limits_{\Gamma}\left(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx}+b(x)\mu(x)\nu(x)\right)dx$ с фиксированными измеримыми и ограниченными на Γ_0 функциями $a(x),\ b(x),\$ суммируемыми с квадратом. Пространство $W_2^1(\Gamma)$ содержит множество $\Omega_a(\Gamma)$ функций $u(x)\in C(\Gamma),\$ удовлетворяющих соотношениям $\sum\limits_{\gamma_j\in R(\xi)}a(1)_{\gamma_j}\frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx}=$

 $\sum_{\gamma_{j} \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_{j}} \frac{du(0)_{\gamma_{j}}}{dx} \text{ во всех узлах } \xi \in J(\Gamma) \ (R(\xi) \text{ и } r(\xi) - \text{множества ребер, соответственно ориентированных «к узлу <math>\xi$ » и «от узла ξ », $u(\cdot)_{\gamma}$ — сужение функции $u(\cdot)$ на ребро γ). Замыкание в норме $W_{2}^{1}(\Gamma)$ множества $\Omega_{a}(\Gamma)$ обозначим через $W^{1}(a,\Gamma)$ (если допустить, что функции u(x) из $\Omega_{a}(\Gamma)$ удовлетворяют еще и краевому условию $u(x)|_{\partial\Gamma}=0$, то получим пространство $W_{0}^{1}(a,\Gamma)$). Пусть далее $\Omega_{a}(\Gamma_{T})$ — множество функций $u(x,t) \in V_{2}(\Gamma_{T})$, чьи следы определены на сечениях области Γ_{T} плоскостью $t=t_{0}$ ($t_{0}\in[0,T]$) как функции класса $W^{1}(a,\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x}$$
(2)

для всех узлов $\xi\in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ по норме (1) обозначим через $V^{1,0}(a,\Gamma_T); V^{1,0}(a,\Gamma_T)\subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$. Другим подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ является $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — замыкание в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (2) для всех узлов $\xi\in J(\Gamma)$ и для любого $t\in [0,T]$ (аналогично вводится пространство $W^1(a,\Gamma_T)); V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — пространство состояний параболической системы, $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ и $W^1(a,\Gamma_T)$ — вспомогательные пространства.

В пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \tag{3}$$

представляющее собой систему дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на каждом ребре γ графа Γ . Состояние системы

(3) в области $\overline{\Gamma}_T$ определяется слабым решением y(x,t) уравнения (3), удовлетворяющим начальному и краевому условиям

$$y \mid_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad a(x) \frac{\partial y}{\partial x} \mid_{x \in \partial \Gamma_T} = \varphi(x, t).$$
 (4)

Функция $\varphi(x,t)$ является граничным управлением системы (3), предположения относительно функций a(x) и b(x) указаны выше; $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$.

Определение 1. Слабым решением начально-краевой задачи (3), (4) называется функция $y(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Gamma} y(x,t) \eta(x,t) dx - \int\limits_{\Gamma_t} y(x,t) \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} dx dt + \ell_t(y,\eta) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x,0) dx + \int\limits_{\partial \Gamma_t} \varphi(x,t) \eta(x,t) dx dt + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t) \eta(x,t) dx dt$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T);$ $\ell_t(y,\eta)$ — билинейная форма, определенная соотношением $\ell_t(y,\eta) = \int\limits_{\Gamma_t} \left(a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x)y(x,t)\eta(x,t)\right) dxdt.$

Теорема 1. Начально-краевая задача (3), (4) однозначно слабо разрешима в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Для доказательства используется метод Фаэдо-Галеркина со специальным базисом — системой обобщенных собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ краевой задачи $-\frac{d}{dx}(a(x)\frac{du(x)}{dx})+b(x)u(x)=\lambda u(x), \ \frac{du(x)}{dx}=0$ в $W_2^1(a,\Gamma)$, т. е. множество чисел λ_n , каждому из них соответствует по крайней мере одно нетривиальное обобщенное решение $u_n(x)\in W_2^1(a,\Gamma)$, удовлетворяющее тождеству $\ell(u,\eta)=\lambda(u,\eta)\ \forall\ \eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma)\ ((\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$, $L_2(\partial\Gamma_T)$ или $L_2(\Gamma_T)$).

Приближенные решения $y^N(x,t)$ строятся в виде

$$y^{N}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} c_{i}^{N}(t)u_{i}(x),$$

 $c_i^N(t)$ — абсолютно непрерывные на $\left[0,T\right]$ функции, определяемые из системы

$$\left(\frac{\partial y^N}{\partial t}, u_i\right) + \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{\partial y^N(x, t)}{\partial x} \frac{du_i(x)}{dx} + b(x) y^N(x, t) u_i(x)\right) dx = (f, u_i),$$

$$c_i^N(0) = (\widetilde{\varphi}, u_i), \ i = \overline{1, N}.$$

Дальнейшие рассуждения основаны на априорных оценках норм слабых решений задачи (3), (4) и построении слабо сходящейся по норме $W^{1,0}(\Gamma_T)$ подпоследовательности $\{y^{N_k}\}_{k\geqslant 1}$ к решению $y(x,t)\in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$. Показывается, что элемент y(x,t) является слабым решением задачи (3)–(5), принадлежащим $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

В силу линейности задачи (3), (4) доказательство единственности проводится стандартным образом: предполагается существование двух различных решений $y_1(x,t), y_2(x,t)$ класса $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ и показывается справедливость неравенства $||y||_{2,\Gamma_t} \le 0$ ($y(x,t)=y_1(x,t)-y_2(x,t)$), а значит, совпадение решений $y_1(x,t), y_2(x,t)$.

Следствие. Слабое решение начально-краевой задачи (3), (4) непрерывно зависит от исходных данных f(x,t), $\varphi(x)$ и $\varphi(x,t)$, тем самым показана корректность по Адамару начально-краевой задачи (3), (4) в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$. Состояние $y(x,t)\in V_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$ системы (3) определяется слабым решением y(v)(x,t) задачи (3), (4) $(v(x,t)=v(x,t));\ L_2(\partial\Gamma_T)$ — пространство наблюдений, наблюдение имеет важный для приложений вид $Cy(v)=My(v)|_{\partial\Gamma_T}$ ($M:L_2(\partial\Gamma_T)\to L_2(\partial\Gamma_T)$ — линейный непрерывный оператор, C — оператор граничного наблюдения). Здесь $y(v)|_{\partial\Gamma_T}$ — след функции y(v) на поверхности $\partial\Gamma_T$; функционал J(v), требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{U}_\partial\subset\mathbb{U}$, имеет вид $J(v)=\|My(v)-z_0\|_{L_2(\partial\Gamma_T)}^2+(Nv,v)_{\mathbb{U}}$, где $z_0(x,t)\in L_2(\partial\Gamma_T)$ — заданное наблюдение.

Для системы (3) определим сопряженное состояние $\omega(v)(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$ как функцию, удовлетворяющую интегральному тождеству (вариационное соотношение)

$$-\int_{\Gamma_T} \frac{\partial \omega(v)(x,t)}{\partial t} \zeta(x,t) dx dt + \ell_T(\omega(v),\zeta) = \int_{\partial \Gamma_T} M^*(My(v)(x,t) - z_0(x,t)) \zeta(x,t) dx dt$$

при любых функций $\zeta(x,t) \in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$. Для доказательства существования единственного слабого решения $\omega(v)(x,t)$ достаточно применить результаты теоремы 1, заменив t на T-t. При этом необходимо учитывать сепарабельность пространства $W^1(a,\Gamma_T)$.

Теорема 2. Для того чтобы элемент $u(x) \in \mathbb{U}_{\partial}$ был оптимальным управлением системы (3), необходимо и достаточно, чтобы удовлетво-

рялись следующие соотношения:

$$\int\limits_{\Gamma} y(u)(x,t)\eta(x,t)dx - \int\limits_{\Gamma_t} y(u)(x,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y(u),\eta) = \\ = \int\limits_{\Gamma} y_0(x)\eta(x,h)dx + \int\limits_{\partial \Gamma_t} u(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$;

$$-\int_{\Gamma_T} \frac{\partial \omega(u)(x,t)}{\partial t} \zeta(x,t) dx dt + \ell_T(\omega(u),\zeta) = \int_{\partial \Gamma_T} M^*(My(v)(x,t) - z_0(x,t)) \zeta(x,t) dx dt$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W^{1,0}(a,\Gamma_T);$

$$\int_{\partial \Gamma_T} \left(\omega(u)(x,t) + Nu(x,t) \right) \left(v(x,t) - u(x,t) \right) dxdt \geqslant 0$$

для любых $v \in \mathbb{U}_{\partial}$. Здесь $y(u) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T), \ \omega(u) \in W^1(a,\Gamma_T)$ $u \omega(u)(x,T)=0, \ x\in\Gamma$.

Задачу синтеза оптимального граничного управления рассмотрим для случая отсутствия ограничений на управление: $\mathbb{U}_{\partial} = \mathbb{U}$. Тогда оптимальное управление определяется из решения системы двух интегральных тождеств (вариационных соотношений) вида:

$$\int_{\Gamma} y(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_t} y(x,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y,\eta) =$$

$$= \int_{\Gamma} y_0(x)\eta(x,h)dx - \int_{\partial \Gamma_t} N^{-1}\omega(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$;

$$-\int_{\Gamma_T} \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} \zeta(x,t) dx dt + \ell_T(\omega,\zeta) = \int_{\Gamma} M^*(My(u)(x,t) - z_0(x,t)) \zeta(x,t) dx$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$. Оптимальное управление имеет вид $u(x,t) = -N^{-1}\omega(x,t)$. Соотношение (10) осуществляет синтез (обратную связь) оптимального граничного управления системы (3): оптимальное управление определяется через сопряженное состояние этой системы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Provotorov V.V. "Boundary control of a parabolic system with distributed parameters on a graph in the class of summable functions", *Automation and Remote Control*, 76, No. 2, 318-322 (2015).

[2] Podvalny S.L., Provotorov V.V., "The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph", International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 117-119 (2015).

Generalized Solutions of Bounded p-Variation of Nonlinear Control Systems and Nonsmooth Optimal Impulsive Control Problems

Самсонюк О.Н., Старицын М.В.

samsonyuk.olga@gmail.com

ИДСТУ СО РАН, 134, ул. Лермонтова, Иркутск, 664033, Россия

Обобщенные решения ограниченной p-вариации нелинейных управляемых систем и негладкие задачи оптимального управления

Рассмотрим управляемую динамическую систему вида

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)v, \qquad x(a) = x_0,$$
 (1)

$$v(t) \in \mathbb{R}^m, \qquad t \in T,$$
 (2)

где T=[a,b] — заданный конечный отрезок времени и $x_0\in\mathbb{R}^n$ — заданный вектор начальных условий. Траектории $x(\cdot)$ — абсолютно непрерывные функции $T\mapsto\mathbb{R}^n$, а управления $v(\cdot)$ — измеримые существенно ограниченные функции $T\mapsto\mathbb{R}^m$. Как нетрудно видеть, множество решений Каратеодори системы (1),(2) не замкнуто в «естественной» топологии равномерной сходимости: последние могут быть сколь угодно близки поточечно к разрывным функциям. Задачи оптимизации, поставленные в таких системах, как правило, не имеют решения и относятся к классу т.н. вырожденных задач оптимального управления [1].

В первой части доклада изучается проблема импульсно-траекторного расширения системы (1), (2). Эта проблема состоит в построении замыкания множества траекторий в некоторой ослабленной топологии, что соответствует переходу к подходящим образом определенным обобщенным управлениям и соответствующим обобщенным решениям.

Обобщенные решения (далее — "об. решения") системы (1), (2), имеющие ограниченную полную вариацию на отрезке T и отвечающие импульсным воздействиям типа ограниченной борелевской меры, изучены в большом количестве публикаций (см., например, [3,4,5,6,9,13,17]). Они возникают в системе (1), (2) при наличии априорного ограничения на управления v (и соответствующие \dot{x}) в пространстве L_1 . Ослабление этого ограничения приводит к появлению об. решений неограниченной ва-

риации, исследование которых на сегодняшний день исчерпывается частными случаями систем, когда матричная функция G — множитель при управлении v — удовлетворяет условию инволютивности столбцов, или более жесткому условию коммутативности типа Фробениуса [1, 2, 4, 8]. На этом фоне выделим недавнюю работу [7], где в качестве потенциального объекта исследования указаны импульсные системы с траекториями ограниченной p-вариации, p > 1. Такой подход позволяет охватить существенно более широкий класс входных воздействий и, как ожидается, позволит уйти от указанных жестких предположений на векторное поле G. C другой стороны, подобные модели естественно возникают в ряде задач теории случайных процессов [14, 15, 16]. При этом сама теория управляемых систем с решениями ограниченной р-вариации отличается весьма оригинальным и развитым математическим аппаратом. Исследования динамических систем с непрерывными решениями ограниченной р-вариации, по-видимому, инспирированы именно тематикой стохастических дифференциальных уравнений, где локальная неограниченность полной вариации «входного сигнала» является типичной ситуацией. Однако, как отмечается в ряде источников, основные результаты в этом направлении носят именно детерминированный характер и составляют ядро относительно нового направления теории динамических систем, называемого в иностранной литературе «rough path theory» (см., например, работы [12, 14, 15, 16]). Заметим, что случай p=2 является, в некотором смысле, пограничным: при $p \in [1, 2)$ решение управляемой системы описывается посредством прямого обобщения интеграла Лебега-Стилтьеса, называемого интегралом Янга [11, 19], в то время как при $p \geqslant 2$ решения требуют более тонкого, алгебраического представления посредством формальных рядов Чена и т.н. итерированных интегралов.

Пусть $p\geqslant 1$. Следуя [18], p-вариацией функции $g:T\to \mathbb{R}^k$ на отрезке T назовем величину $V_p(g;T)$, определенную правилом:

$$V_p(g;T) := \left(\sup_{\pi} \sum_{i=1}^{N} \left| \left| g(t_i) - g(t_{i-1}) \right| \right|^p \right)^{1/p}.$$

Здесь ѕир берется по всем конечным разбиениям $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $T, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$. Величина $V_p(g;T)$ может быть конечной или бесконечной. Если $V_p(g;T) < \infty$, то говорят, что функция g имеет ограниченную p-вариацию. Обозначим через $BV_p(T,\mathbb{R}^k)$ банахово пространство функций ограниченной p-вариации $g:T \to \mathbb{R}^k$ с нормой $||g||_{BV_p} = ||g||_{\infty} + V_p(g;T)$. Отметим, что любая функция $g \in BV_p(T,\mathbb{R}^k)$ имеет односторонние пределы g(t-), g(s+) во всех точках $a \le s < t \le b$, причем число точек ее разрыва не более чем счетно [10].

Основной результат первой части доклада — конструктивное представление замыкания множества траекторий системы (1), (2) в топологии поточечной сходимости в пространстве $BV_p(T,\mathbb{R}^n)$. Как будет показано, в случае $p\in[1,2)$ такое замыкание — множество обобщенных решений — описывается специального вида дискретно-непрерывным дифференциальным уравнением Янга. Роль обобщенных управлений здесь играют функции $w\in BV_p(T,\mathbb{R}^m)$, непрерывные справа на промежутке (a,b] и удовлетворяющие условию w(a)=0 (предположение о непрерывности справа носит технический характер и не снижает общности).

Примем предположения (H): функции f,G непрерывны, f(t,x) локально липшицева по переменной x и удовлетворяет условию не более чем линейного роста; функция G(t,x) ограничена, при всех $t\in T$ имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial}{\partial x}G$ по переменной x, удовлетворяющую условию Гёльдера с показателем $\alpha>p-1$, кроме того G имеет ограниченную q-вариацию по переменной t равномерно по $x\in\mathbb{R}^n$ с некоторым q, 1/p+1/q>1; наконец, выполнено условие корректности Фробениуса: $\frac{\partial}{\partial x}G_iG_j-\frac{\partial}{\partial x}G_jG_i=0\ \forall\ (t,x)\in T\times\mathbb{R}^n$, где $G_i,\ i=\overline{1,n}$, — столбцы матрицы G. Отметим, что мы не предполагаем гладкость функции f и непрерывность частной производной $\frac{\partial}{\partial t}G$.

Пусть дано обобщенное управление $w(\cdot)$. Рассмотрим дискретнонепрерывное интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(t, x(t)) dt + \int_a^t G(t, x(t)) dw_c(t) + \sum_{s \leqslant t, s \in S_d(w)} (z_s(1) - x(s-)), \quad t \in (a, b], \quad x(a) = x_0.$$
(3)

Здесь $S_d(w)=\{s\in T\mid [w(s)]:=w(s)-w(s-)\neq 0\}$ — множество точек скачка $w(\cdot)$. Интеграл по непрерывной составляющей $w_c\in BV_p(T,\mathbb{R}^m)$ функции $w(\cdot)$ в правой части (3) понимается в смысле Янга, а функции $z_s(\cdot), s\in S_d(w)$, определены как решения дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_s(\tau)}{d\tau} = G(s, z_s(\tau))[w(s)], \quad z_s(0) = x(s-), \qquad \tau \in [0, 1].$$

Под решением уравнения (3), отвечающим заданному обобщенному управлению $w(\cdot)$ и начальному условию x_0 , понимается непрерывная справа на (a,b] функция $x \in BV_p(T,\mathbb{R}^n)$, подстановка которой в (3) обращает уравнение в тождество.

Теорема 1. Пусть $p \in [1,2)$, и выполнены предположения (H). Тогда:

1) уравнение (3) имеет единственное решение $x \in BV_p(T, \mathbb{R}^n)$ при заданном управлении $w(\cdot)$ и начальном условии x_0 ;

2) существует последовательность управлений $\{v_k(\cdot)\}\subset L_\infty(T,\mathbb{R}^m)$, первообразные элементов которой имеют равномерно ограниченные рвариации, такая что соответствующие решения $x_k(\cdot)$ системы (1),(2) также имеют равномерно ограниченные р-вариации и поточечно сходятся κ $x(\cdot)$ на T.

Во второй части доклада рассматривается негладкая задача оптимального управления на множестве об. решений системы (1), (2) с терминальными ограничениями типа включения. Исследуется связь данной задачи с соответствующей вырожденной задачей оптимального управления (поставленной на обычных траекториях этой системы, отвечающих управлениям $v \in L_{\infty}(T, \mathbb{R}^m)$ при наличии равномерного ограничения на полную p-вариацию первообразных, $p \in [1, 2)$).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 16-31-60030, и поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН "Интеграция и развитие" на 2017 год, проект № II.2 Π/I .1-2.

- [1] Гурман В.И., Вырожденные задачи оптимального управления, М.: Наука, (1977).
- [2] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н., Оптимальное импульсное управление с приложениями, М.: Физматлит, (2003).
- [3] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н., *Неравенства Гамильтона-Якоби и вариационные условия оптимальности*, Иркутск: Изд-во Иркутского государственного университета, (2015).
- [4] Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Импульсные процессы: модели и приложения, М.: Наука, (1991).
- [5] Миллер Б.М., "Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными и дискретно-непрерывными системами", Автоматика и телемеханика, No. 12, 3-32 (1993).
- [6] Миллер Б.М., Рубинович Е.Я., Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями, М.: Наука, (2005).
- [7] Aronna M. S., Rampazzo F., "On optimal control problems with impulsive commutative dynamics", In Proc. of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control, 1822-1827 (2013).
- [8] Bressan A., Rampazzo F., "On differential systems with vector-valued impulsive controls", *Boll. Un. Mat. Ital. B*(7), 2, 641-656 (1988).
- [9] Bressan A., Rampazzo F., "Impulsive control systems without commutativity assumptions", *Optim. Theory Appl.*, 81, No. 3, 435-457 (1994).
- [10] Chistyakov V.V., Galkin O.E., "On maps of bounded p-variation with p>1", Positivity, 2. 19-45 (1998).

- [11] Dudley R.M., Norvaisa R., Product integrals, Young integral and p-variation, Springer, (1999).
- [12] Dudley R.M., Norvaisa R., Concrete functional calculus, Springer, (2011).
- [13] Goncharova E., Staritsyn M., "Optimal control of dynamical systems with polynomial impulses", *Discr. Cont. Dynam. Syst. Ser. A*, 35, 4367-4384, (2015).
- [14] Lejay A., "An introduction to rough paths", Lecture Notes in Mathematics, 1832, 1-59 (2003).
- [15] Lyons T., "Differential equations driven by rough signals", Revista Matemática Iberoamericana, 215-310 (1998).
- [16] Lyons T., Qian Z., System control and rough paths, Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Clarendon Press, (2002).
- [17] Motta M., Rampazzo F., "Space-time trajectories of nonlinear systems driven by ordinary and impulsive controls", *Differential Integral Equations*, 8, 269-288 (1995).
- [18] Wiener N., "The quadratic variation of a function and its Fourier coeficients", J. Math. Phys., 3, 72-94 (1924).
- [19] Young L.C., "An inequality of the Hólder type, connected with Stieltjes integration", Acta Math, 67, 251-282 (1936).

Impulsive Optimal Control Problems with Hysteresis Самсонюк О.Н., Тимошин С.А.

samsonyuk.olga@gmail.com, sergey.timoshin@gmail.com ИДСТУ СО РАН, 134, ул. Лермонтова, Иркутск, 664033, Россия

Задачи оптимального импульсного управления с гистерезисом

Рассматривается негладкая задача оптимального импульсного управления с гистерезисом, заданным эволюционным вариационным неравенством в пространстве функций ограниченной вариации.

Пусть T=[a,b] — заданный отрезок времени, $BV(T;\mathbb{R})$ — банахово пространство функций ограниченной вариации $T\mapsto \mathbb{R}$. Пусть даны $x\in BV(T;\mathbb{R})$ и r>0. Рассмотрим вариационное неравенство

$$\int_{a}^{b} \left(\zeta(t) - x(t+) - y(t+) \right) dy(t) \leqslant 0 \qquad \forall \zeta \in BV(T; [-r, r]), \tag{1}$$

$$x(a) - y(a) = x_0 - y_0 \in [-r, r], \qquad x(t) - y(t) \in [-r, r] \qquad \forall t \in T.$$
 (2)

Здесь интеграл понимается в смысле интеграла Янга [7]. Вариационное неравенство (1), (2) имеет единственное решение $y \in BV(T; \mathbb{R})$, соответствующее входу $x(\cdot)$ и начальному условию y_0 . Оператор решения (1), (2)

 $y = \mathcal{F}(x; y_0)$ является оператором гистерезиса типа обобщенный люфт, его свойства изучены в [4, 5, 6].

Рассмотрим задачу оптимального импульсного управления (P):

$$J(x,y,\mu) = \int_a^b f_0(t,x(t),y(t))dt + |\mu|(T) \to \min$$
 (3)

при условиях

$$dx = f(t, x, y)dt + g(t, x)\mu, \qquad x(a) = x_0.$$
 (4)

Здесь $x(\cdot)$ — непрерывная справа на промежутке (a,b] функция ограниченной вариации, $y(\cdot)$ — решение вариационного неравенства (1), (2), соответствующее $x(\cdot)$ и заданному начальному значению y_0 , управляющая мера μ — \mathbb{R} -значная ограниченная борелевская мера, $|\mu|$ — полная вариация меры μ . Предполагается, что функции $f_0(t,x,y)$, f(t,x,y), g(t,x) непрерывны, локально липшицевы по переменным x,y и удовлетворяют условию не более чем линейного роста по x,y при всех $t \in T$.

Решение уравнения (4) понимается как решение интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(t, x(t), y(t)) dt + \int_a^t g(t, x(t)) \mu_{\mathbf{C}}(t) + \sum_{s \leqslant t, s \in S_d(\mu)} (z_s(1) - x(s-)), \quad t \in (a, b], \quad x(a) = x_0.$$
(5)

Здесь $S_d(\mu) = \{s \in T \mid \mu(\{s\}) \neq 0\}$ — множество атомов меры μ , $\mu_{\mathbf{C}}$ — непрерывная составляющая μ в разложении Лебега, функции $z_s(\cdot)$, $s \in S_d(\mu)$, — решения соответствующих дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_s(\tau)}{d\tau} = g(s, z_s(\tau))c_s, \quad z_s(0) = x(s-), \quad \tau \in [0, 1],$$

где $c_s := \mu(\{s\}), s \in S_d(\mu).$

Задача оптимального импульсного управления (1)–(4) является релаксационным расширением вырожденной задачи оптимального управления (P_0) :

$$J_{\mathbf{0}}(x,y,v) = \int_{a}^{b} \left(f_{\mathbf{0}}(t,x(t),y(t)) + |v(t)| \right) dt \to \inf$$
 (6)

при условиях

$$\dot{x} = f(t, x, y) + g(t, x)v,$$
 $x(a) = x_0,$ (7)

$$\dot{y} \in \partial I_{[-r,r]}(x-y), \qquad y(a) = y_0. \tag{8}$$

Здесь $x,y\in W^{1,1}(T,\mathbb{R}),\ v\in L_\infty(T,\mathbb{R}),\ x_0-y_0\in [-r,r],\ I_{[-r,r]}$ — индикаторная функция отрезка [-r,r], т. е.

$$I_{[-r,r]}(z) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & z \in [-r,r], \\ +\infty, & z \not\in [-r,r], \end{array} \right.$$

 $\partial I_{[-r,r]}(z)$ — субдифференциал $I_{[-r,r]},$ вычисленный в точке z.

Задача (P_0) в общем случае не имеет решения в классе абсолютно непрерывных траекторий и измеримых существенно ограниченных управлений. Это связано с поточечной неограниченностью правой части системы (7). Множество решений (7), (8) не замкнуто в топологии равномерной сходимости, траекторные компоненты минимизирующих последовательностей могут поточечно сходиться к разрывным функциям, а соответствующие управления — в смысле распределений к обобщенным функциям. При этом специальный вид функционала J_0 обеспечивает существование оптимального решения в расширенной задаче, соответствующей замыканию множества траекторий в слабой* топологии в пространстве функций ограниченной вариации. Задачи оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной вариации и управлениями-мерами при отсутствии гистерезисной нелинейности изучены в большом количестве публикаций (см., например, библиографию в [1, 2]).

В докладе будут представлены результаты по поточечной аппроксимации решений совместной системы (1), (2), (4) последовательностями абсолютно непрерывных решений (7), (8), доказана теорема существования и единственности решения (1), (2), (4), соответствующего заданной управляющей мере μ и начальным условиям x_0 , y_0 . Основной результат доклада представляют необходимые условия оптимальности в форме обобщенного принципа максимума для задачи (P). Идея доказательства условий оптимальности основывается на сочетании известного метода разрывной замены времени [2] и аппроксимации вариационного неравенства подходящим дифференциальным уравнением [3].

- [1] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н., Оптимальное импульсное управление с приложениями, 2-е изд., М.: Физматлит, (2003).
- [2] Миллер Б.М., Рубинович Е.Я., Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями, М.: Наука, (2005).
- [3] Brokate M., Krejčí P., "Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality", Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 18, No. 2, 331–348 (2013).

- [4] Krejčí P., Laurençot Ph., "Generalized variational inequalities", J. Convex Anal., 9, 159–183 (2002).
- [5] Recupero V., "On a class of scalar variational inequalities with measure data", Applicable Analysis, 88, No. 12, 1739–1753 (2009).
- [6] Recupero V., "BV solutions of the rate independent inequalities", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., X, No. 5, 269–315 (2011).
- [7] Young L.C., "An inequality of the Holder type, connected with Stieltjes integration", Acta Math, 67, 251-282 (1936).

Combined Control Synthesis Algorithm

Смирнов Н.В., Смирнов А.Н., Смирнов М.Н., Смирнова М.А. n.v.smirnov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб. 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

Комбинированный алгоритм синтеза управлений

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u,\tag{1}$$

где x — вектор фазового состояния размерности n; u-r-мерный вектор управления; матрицы P(t), Q(t) размерностей $(n \times n)$, $(n \times r)$, имеют вещественные, непрерывные и ограниченные при $t \geqslant 0$ элементы.

Известно, что программное управление для линейной однородной системы (1), переводящее ее в начало системы координат за конечное время, может быть представлено в эквивалентной форме позиционного управления [1, с. 218]:

$$u = M(t)x, \quad M(t) = -B^{T}(t)A^{-1}(t,T)Y^{-1}(t),$$
 (2)

где Y(t) — фундаментальная матрица системы (1) при u=0,

$$B(t) = Y^{-1}(t)Q(t), \quad A(t,T) = \int_t^T B(\tau)B^T(\tau)d\tau.$$

Предположим, что управление (2) существует и построено, тогда замкнем им систему (1):

$$\dot{x} = (P(t) + Q(t)M(t)) x. \tag{3}$$

Отметим основное свойство позиционного управления (2). Замкнутая система (3) при любом начальном векторе $x(0) = x_0$ (в том числе и возмущенном по отношению к некоторому фиксированному значению) имеет

решение, проходящее через точку x(T)=0. Это означает, с одной стороны, что нет необходимости дополнительно решать задачу стабилизации. С другой стороны, норма матрицы коэффициентов усиления M(t) позиционного управления неограниченно возрастает по мере приближения к финальной точке. Это так, поскольку при такой конструкции управления точка x=0 является особой точкой замкнутой системы, так как через нее проходит бесконечно много интегральных кривых.

Для преодоления этого негативного свойства позиционного управления и обеспечения его конструктивного применения в прикладных задачах возникла идея комбинированного алгоритма, когда на первом этапе, пока норма матрицы M(t) не превзошла допустимых значений, применяется позиционное управление. Оно гарантированно (без дополнительной стабилизации) переводит систему в достаточно близкую окрестность начала координат, а затем включается стандартное программное управление, которое переводит замкнутую систему в ноль и, таким образом, завершает решение поставленной задачи. Как показали численные эксперименты, длина финального участка невелика, т. е. программное движение также не требует дополнительной стабилизации, хотя система стабилизации и может присутствовать на случай «форс-мажорных» обстоятельств.

Далее в работе показаны возможности применения предложенного подхода. Прежде всего это задачи синтеза управлений в классе билинейных систем

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)U(t)x,\tag{4}$$

где x-n-мерный вектор фазового состояния; матрицы P(t), Q(t) размерностей $(n\times n)$, $(n\times r)$; $U(t)-(r\times n)$ -матрица управлений. Матрица U(t) может иметь различную структуру в зависимости от конкретной прикладной задачи. Например, непосредственно все ее элементы могут быть управляемыми параметрами, либо представлять собой некоторые (линейные или нелинейные) функции заданного набора управляемых параметров, каждый из которых удовлетворяет своим ограничениям [2–12]. Задача управления состоит в том, чтобы перевести систему (4) из заданного фазового состояния x_0 при t=0 в конечное состояние x=0 при t=T. Найдены условия, при выполнении которых данная задача имеет решение с применением вспомогательной линейной системы (1) и позиционного управления (2).

- [1] Зубов В.И. Лекции по теории управления. СПб.: Лань, 2009.
- [2] Peresada V.P., Smirnov N.V., Smirnova T.E. Development control of a multicommodity economy based on the dynamical input-output model // Becm-

- ник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 4. С. 119–132.
- [3] Смирнов Н.В., Смирнова Т.Е. Прогнозирование макроэкономических тенденций и управление многопродуктовой экономикой на основе динамических моделей межотраслевого баланса // Финансы и бизнес. 2015. № 1. С. 42–53.
- [4] Пономарев А.А. Построение субоптимального управления в регуляторе «предиктор-корректор» // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 141–153.
- [5] Волик К.М., Смирнов Н.В., Смирнова Т.Е. Моделирование инвестиционных программ на основе импульсных программных управлений // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В.И. Зубова. СПб, 2015. С. 419–420.
- [6] Баранов О.В., Смирнов Н.В., Смирнова Т.Е. Гибридная многопрограммная стабилизация с применением нелинейного дискретного идентификатора // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора, чл.корр. РАН В.И. Зубова. СПб, 2015. С. 507–508.
- [7] Баранов О.В., Попков А.С., Смирнов Н.В. Оптимальная стабилизация квадрокоптера в режиме реального времени // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В.И. Зубова. СПб, 2015. С. 115–116.
- [8] Арзуманян Н.К., Смирнов М.Н., Смирнова М.А. Моделирование системы управления тормозными усилиями автомобиля в Simulink // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 357–363.
- [9] Баранов О.В. Моделирование процесса управления беспилотным летательным аппаратом квадрокоптером // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 23–28.
- [10] Смирнов М.Н., Смирнова М.А. Вопросы синтеза стабилизирующих управлений при наличии неопределенных внешних возмущений // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 503–508.
- [11] Волик К.М., Смирнов Н.В. Построение области достижимости в управляемой динамической модели межотраслевого баланса // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 597–604.
- [12] Смирнов М.Н. Метод учета ограниченных внешних воздействий при синтезе обратных связей с многоцелевой структурой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 2. С. 130–140.

Numerical Solving of Some Minimax Control Problems $Cpouro\ B.A.$

srochko@math.isu.ru

Иркутский государственный университет, ул. К. Маркса, д. 1, г. Иркутск, 664003, Россия

К численному решению некоторых задач минимаксного управления

В докладе с позиций итерационного улучшения допустимых управлений в классе вариаций игольчатого типа изучаются две минимаксные залачи:

- 1) простейшая задача относительно системы интегральных функционалов, зависящих только от управления;
- 2) модульная задача (минимизация максимума модулей) относительно набора стандартных функционалов, связанных с нелинейной динамической системой.

В качественном плане (условия оптимальности) указанные задачи исследованы достаточно полно как в самостоятельной постановке, так и через редукцию к стандартным задачам с ограничениями (см., например, [1,2]). При этом соответствующие условия оптимальности представляются опять-таки в минимаксной форме (поточечный и интегральный принципы минимакса), что затрудняет их численную реализацию и построение процедур улучшения.

В данном докладе для решения проблемы улучшения используется конструктивная процедура варьирования в форме обобщённой выпуклой комбинации пары управлений с функцией варьирования характеристического типа. Для поиска функциональных элементов варьирования с целью улучшения рассматриваемого управления конструируются специальные вспомогательные задачи с параметром, которые включают в себя систему интегральных уравнений вместе с дополнительными ограничениями поточечного характера. Анализируется вопрос о разрешимости вспомогательных задач. При этом необходимые условия оптимальности (условия неулучшения) связаны с отсутствием решений вспомогательных задач для любого значения параметра.

В рамках предлагаемой формализации численное решение вспомогательных задач естественно проводить на основе метода наименьших квадратов. В результате итерация улучшения связана с решением специальных задач оптимального управления на минимум евклидовой нормы конечного состояния в простейшей системе фазовых уравнений, правая часть которых зависит только от управления и времени. Эффективные

Срочко В.А. 173

методы глобального решения такого сорта задач представлены, например, в [3].

Простейшая задача минимаксного управления

На множестве допустимых управлений (r-мерные измеримые векторфункции с ограничением типа включения)

$$W = \left\{ u \in L_{\infty}^{r}(T) : u(t) \in U, t \in T = [t_{0}, t_{1}] \right\}$$

определим набор интегральных функционалов

$$\Phi_i(u) = \int_T g_i(u(t), t) dt, \ i = \overline{1, m}.$$

Образуем функционал максимума

$$\Phi(u) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Phi_i(u)$$

и поставим задачу минимаксного управления

$$\Phi(u) \to \min, \ u \in W. \tag{P}$$

Процедура игольчатого варьирования

Определим процедуру допустимого варьирования для управления $u \in W$ следующим образом:

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), \ t \in T,$$
$$v \in W, \ \chi \in \mathcal{X}_{\alpha}, \ \alpha \in [0, 1].$$

Здесь

$$\mathcal{X}_{\alpha} = \left\{ \chi \in L_{\infty}(T) : \chi(t) = 0 \lor 1, \int_{T} \chi(t) dt = \alpha (t_1 - t_0) \right\}$$

– множество функций варьирования.

Модульная задача минимаксного управления

На множестве допустимых управлений W определим набор функционалов

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x(t), u(t), t) dt, \ i = \overline{1, m},$$

где связь $u(t) \Rightarrow x(t)$ описывается с помощью динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \ x(t_0) = x^0.$$

Образуем функционал-свёртку как максимум модулей

$$\Phi(u) = \max_{1 \le i \le m} |\Phi_i(u)|$$

и поставим задачу оптимального управления

$$\Phi(u) \to \min, \ u \in W. \tag{Q}$$

Проведём игольчатое варьирование управления u(t) на основе семейства $u_{v,\chi}(t)$ с параметрами $v \in W, \chi \in \mathcal{X}_{\alpha}, \alpha \in [0,1]$. Приращения функционалов $\Phi_i, i = \overline{1,m}$ представляются следующим образом:

$$\Phi_i(u_{v,\chi}) - \Phi_i(u) = -\int_T \chi(t) \Delta_{v(t)} H^i[t, u] dt + o_i(\alpha).$$

Здесь

$$\Delta_v H^i[t, u] = H^i(\psi^i(t), x(t), v, t) - H^i(\psi^i(t), x(t), u(t), t).$$

Сформируем множество индексов активных функционалов

$$I(u) = \left\{ i = \overline{1, m} : |\Phi_i(u)| = \Phi(u) \right\}.$$

Вспомогательная задача улучшения

С учётом формулы приращения и определения множества \mathcal{X}_{α} получаем вспомогательную задачу с параметром α (система интегральных уравнений относительно v, χ с дополнительными условиями)

$$\int_{T} \chi(t) \Delta_{v(t)} H^{i}[t, u] dt = \alpha \Phi_{i}(u), i \in I(u),$$

$$\int_{T} \chi(t) dt = \alpha (t_{1} - t_{0}), v(t) \in U, \chi(t) \in \{0, 1\}.$$
(Q\alpha)

Вспомогательная задача (Q_{α}) позволяет построить допустимые управления $u_{\alpha}(t), t \in T$ со свойством локального спуска по функционалу Φ .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Демьянов В. Ф., Виноградова Т. К., Никулина В. Н. и др., *Негладкие задачи теории оптимизации и управления*, Л.: Изд-во ЛГУ, (1982).
- [2] Демьянов В. Ф., Рубинов А. М., Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление, М.: Наука, (1990).
- [3] Срочко В. А., Итерационные методы решения задач оптимального управления, М.: Физматлит, (2000).

Feedback Necessary Optimality Condition for Nonsmooth Optimal Impulsive Control Problems

Старицын М.В., Сорокин С.П.

starmaxmath@gmail.com, sorsp@mail.ru

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Мастросова СО РАН, Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия

Необходимое условие оптимальности позиционного типа для негладких задач оптимального импульсного управления

Доклад посвящен исследованию негладкой задачи оптимального управления вида

$$I = l(x(T)) = \langle c, x(T) \rangle \to \min;$$
 (1)

$$dx = f(t, x) dt + g(t, x) d\mu, \quad x(0^{-}) = x_0, \tag{2}$$

$$|\mu|([0,T]) \leqslant M. \tag{3}$$

Здесь [0,T] — заданный отрезок времени, $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и $g:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — заданные вектор-функции, измеримые по t и удовлетворяющие условию не более чем линейного роста по переменной x (гладкость их не предполагается); $x_0\in\mathbb{R}^n$ — заданный вектор, $x(0^-)$ — левый предел функции x в нуле (траектории предполагаются непрерывными справа). Управление μ может условно трактоваться как скалярная знакопеременная мера Лебега-Стилтьеса, и $|\mu|$ имеет смысл ее полной вариации. Величина M>0 задает ограничение на полный ресурс управления.

С помощью метода разрывной замены времени [2] данная задача преобразуется к негладкой модели (P) с ограниченными управлениями, к

которой и приковано основное внимание в докладе:

$$J(\sigma) = l(x(T)) = \langle c, x(T) \rangle \to \min;$$

$$\dot{x} = (1 - |v|)f(t, x) + vg(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = 1 - |v|, \quad y(0) = 0, \quad y(T) = y_T,$$

$$|v| \leq 1.$$
(5)

Входные данные удовлетворяют описанным выше условиям. Здесь в качестве управления выступает измеримая ограниченная вектор-функция $v:[0,T]\to\mathbb{R},$ а траекторией является абсолютно непрерывная векторфункция $z=(x,y):[0,T]\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R};$ через $\sigma=(z,v)=(x,y,v)$ обозначается процесс системы (4), (5).

Отметим, что в задаче (P) принцип максимума Понтрягина [3] лишь необходим для оптимальности некоторого процесса $\bar{\sigma}=(\bar{z},\bar{v})^1$ (далее наше внимание будет приковано именно к процессу $\bar{\sigma}$, допустимому и, по некоторым причинам, «претендующему» на оптимальность).

Также заметим, что линейность целевой функции предполагается для простоты изложения. Случай нелинейной функции l (при разных предположениях на её «гладкость») может опираться на результаты [4].

Обсуждаемое условие оптимальности использует позиционные управления, под которыми понимаются произвольные (вообще говоря, разрывные) функции

$$\mathbf{v}(t, x, y) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

Мы будем пользоваться следующими двумя понятиями решения системы (4), (5), замкнутой позиционным управлением \mathbf{v} : а) решения Каратеодори $z(\cdot) = (x,y)(\cdot)$, отвечающие управлениям $v(\cdot) = (\cdot,x(\cdot),y(\cdot))$, если только последние оказываются измеримыми на [0,T] функциями; б) кривые Эйлера (конструктивные движения Красовского-Субботина), т.е. равномерные пределы ломаных Эйлера [5,6,7]. Множество решений указанных типов будем обозначать через $\mathcal{Z}(\mathbf{v})$.

Введем функцию Понтрягина

$$H(t, x, \psi, \xi, v) = \psi'((1 - |v|)f(t, x) + vg(t, x)) + \xi(1 - |v|)$$

и сопряженное включение (символ $\partial_x H$ обозначает частный обобщенный дифференциал Кларка по переменной x [1, 5, 8]):

$$\dot{\psi}(t) \in \partial_x H(t, x, \psi, \xi, v), \quad \psi(T) = -c, \quad \xi = const.$$
 (6)

 $^{^1\}Pi$ о этой же причине принцип максимума из [2] не является достаточным условием оптимальности для исходной импульсной модели.

Рассмотрим следующее экстремальное многозначное отображение:

$$\mathbf{V}_{\xi}(t, x, \psi) = \operatorname*{Argmax}_{v \in [-1, 1]} H(t, x, \psi, \xi, v).$$

В соответствии с идеей позиционного принципа минимума [9, 10, 11] для заданного процесса $\bar{\sigma}=(\bar{z},\bar{v})$ с котраекторией $(\bar{\psi},\bar{\xi})$ — соответствующим решением сопряженной системы (6) — в качестве позиционных управлений потенциального спуска по целевому функционалу следует выбирать функции $\mathbf{v}(t,x)\in\mathbf{V}_{\bar{\xi}}(t,x,\bar{\psi}(t))$, т.е. \mathbf{v} конструируются из селекторов указанного выше многозначного отображения, суженного на котраекторию $(\bar{\psi},\bar{\xi})$. Однако очевидно, что решения системы (4), (5), отвечающие таким позиционным управлениям, вообще говоря, не будут допустимы в задаче (P) — нарушается терминальное условие $y(T)=y_T$. Для учета последнего введем следующее «подправленное» многозначное отображение (использующие очевидное описание множества управляемости системы (5) в точку (T,y_T)):

$$\check{\mathbf{V}}_{\xi}(t, x, y, \psi) = \begin{cases}
\{0\}, & y \leq t - T + y_T, \\
\{-1, 1\}, & y \geqslant y_T, \\
\mathbf{V}_{\xi}(x, \psi), & \text{в противном случае.}
\end{cases} (7)$$

Обозначим через \mathbf{V}_{ξ} множество всех позиционных управлений \mathbf{v} , состоящих из селекторов многозначного отображения (7), суженного на котраекторию $\bar{\psi}$ с произвольным параметром $\xi \in \mathbb{R}$, т.е. функции $\mathbf{v}(t,x,y) \in \check{\mathbf{V}}_{\xi}(t,x,y,\bar{\psi}(t))$.

Теорема (Позиционный принцип максимума).

Для оптимальности процесса $\bar{\sigma}=(\bar{z},\bar{v})$ в задаче (P) необходимо, чтобы траектория $\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})$ доставляла минимум в следующей экстремальной задаче сравнения (CP):

$$\langle c, x(T) \rangle \to \min; \quad z = (x,y) \in \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}} \bigcup_{\mathbf{v} \in \check{\mathbf{V}}_{\xi}} \mathcal{Z}(\mathbf{v}).$$

Полученное необходимое условие, кажущееся только теоретическим фактом, носит весьма конструктивный характера: оно может эффективно использоваться в качестве способа «отбраковки» неоптимальных управлений. Указанное свойство инициирует организацию итеративных процессов «улучшения» управления на базе Теоремы, однако, при этом возникает ряд вопросов.

Во-первых, выбор параметра $\xi \in \mathbb{R}$ весьма не очевиден (особенно для неэкстремальных в смысле ПМ процессов). Тем не менее нетрудно указать пределы варьирования ξ [12].

Во-вторых, неоднозначность решения включения (6), с одной стороны, добавляет большей гибкости для поиска «бракующих» позиционных управлений, с другой стороны, требует конструктивного ответа или рекомендаций по преодолению этой неопределенности. Численная реализация процедур последовательного решения задач вида (P) требует разработки дискретного аналога Теоремы для соответствующих дискретизованных моделей оптимизации (такие результаты активно развиваются авторами, причем используемый подход не ограничен какими-либо конкретными способами дискретизации непрерывных задач; главное — в постановках не требуется выпуклости входных данных).

В завершение доклада обсуждается вопрос расшифровки Теоремы в термины исходной задачи (1)–(3).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 16-31-60030, 16-31-60068.

- [1] Демьянов В.Ф., Никулина В.Н., Шаблинская И.Р., "Задача оптимального управления с негладкими дифференциальными связями", Дифференц. уравнения, 21, 1324–1330 (1985).
- [2] Миллер Б.М., Рубинович Е.Я., Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями, М.: Наука (2005).
- [3] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М.: Физматгиз (1961).
- [4] Дыхта В. А. "Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления", Доклады Академии наук, 462, № 6, 653-656 (2015).
- [5] Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R., Nonsmooth analysis and control theory, N.Y.: Springer-Verlag (1998).
- [6] Красовский Н.Н., Субботин А.И., Позиционные дифференциальные игры, М.: ФИЗМАТЛИТ (1974).
- [7] Субботин А.И., Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации, Москва—Ижевск: Ин-т компьютерных исследований (2003).
- [8] Кларк Ф., Оптимизация и негладкий анализ, М.: Наука (1988).
- [9] Дыхта В.А., "Принцип минимума с контрстратегиями и нестандартная двойственность в оптимальном управлении" [электронный ресурс], Тр. VI Межд. науч. семинара «Обобщенные постановки и решения задач управления» (GSSCP-2012) (2012).
- [10] Дыхта В.А., "Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона-Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями", Автоматика и телемеханика, № 5, 31–49 (2014).

- [11] Дыхта В.А., "Вариационные условия оптимальности с позиционными управлениями спуска, усиливающие принцип максимума", Известия ИГУ. Сер. Математика, 8, 34–51 (2014).
- [12] Sorokin S., Staritsyn M., "Feedback Necessary Optimality Conditions for a Class of Terminally Constrained State-Linear Variational Problems Inspired by Impulsive Control", *Numerical Algebra, Control and Optimization* (to appear).

Correcting Control Construction for One Supply Chain Трофимова И.В., Соколов Б.В., Иванов Д.А.

dmitry.ivanov@hwr-berlin.de

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7-9, Санкт-Петербург, 199034, Россия; Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, 14 линия, дом 39, Санкт-Петербург, 199178, Россия; Берлинская школа экономики и права, Ваdensche Strabe 52, Берлин, 10825, Германия

Построение корректирующего управления для одной цепи поставок

Развитие современного мирового рынка товаров и необходимость поддерживать конкурентоспособность компаний объясняет их растущие требования к работе современных цепей поставок (ЦП): операции с большим количеством продуктов, обеспечение высокого качества и скорости поставок, удовлетворение необходимым экологическим стандартам, возможность работы с новыми, только появляющимися, на рынке продуктами, использование современных технологии и т.д. Другими словами современный рынок является динамичной средой и, соответственно, цепи поставок также должны быть высоко динамичными системами. Однако, на данный момент существование большого числа математических моделей, описывающих динамику работы ЦП, объясняется индивидуальностью их практического использования. В части из них для оптимизации работы ЦП применяются методы современной теории управления, например, в работах [1, 2, 3].

Для большинства компаний особо важно сохранять выполнение сроков поставок, при этом минимизируя дополнительные издержки, при условии возникновения непредвиденных обстоятельств, которые, например, могут произойти во время транспортировки или хранения продукции. В этих случаях необходимо проводить анализ и управление работой цепи поставок. В настоящее время технические возможности получения информации о текущем состоянии ЦП позволяют улучшить ее работу в таких ситуациях, в этих случаях решаются задачи управления ЦП в условиях внешних воздействий [4, 5].

В данном докладе рассматривается задача управления цепью поставок на фиксированном интервале времени, при учете поступающей информации о ее текущем состоянии. Для описания работы цепи используется модель M_{ζ} [6, 7]:

$$M_{\zeta} = \begin{cases} \mathbf{u}(t) \mid \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \zeta) \\ h_0(\mathbf{x}(t_0)) \leqslant 0, \ h_1(\mathbf{x}(t_f)) \leqslant 0 \\ q^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leqslant 0, \ q^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \end{cases}$$
(1)

в которой вектор $\mathbf{x}(t)$ – характеризует выполнение операций в цепи поставок, например, объемы поставок и хранимой продукции в момент времени t, вектор управляющий воздействий обозначен $\mathbf{u}(t)$ (план работы цепи). Здесь с помощью h_0, h_1 заданы начальное и конечное значения в заданные моменты времени t_0, t_f , а равенством и неравенством с $q^{(1)}, q^{(2)}$ описаны линейные и нелинейные ограничения модели. Функция f является линейной по \mathbf{x} , \mathbf{u} . Функция $\zeta(t)$ является кусочно-непрерывной и ограниченной, она описывает внешние воздействия, предполагается, что в явном виде она не известна, но ее о внешних воздействиях на систему можно судить по получаемой в определенные моменты времени информации о текущем состоянии системы. Обозначим показатель качества J_G , оценивающий дополнительные издержки в случае отклонения от запланированного режима работы ЦП.

Постановка задачи: построить управление $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ (на основе корректировки программного управления $\mathbf{u}(t)$) в процессе реализации плана работы ЦП на $[t_0,t_f)$, удовлетворяющее ограничениям и краевым условиям модели (1), компенсирующее ограниченные внешние воздействия (возмущения) и обеспечивающее минимальное значение показателя качества \tilde{J}_G .

Для решения задачи при $\zeta = 0$ программное управление $\widetilde{\mathbf{u}}(t)$ может быть построено методом, предложенным в [6]. При наличии внешнего воздействия ζ в работе авторами был проведен анализ области достижимости и получены ее оценки [7].

Для корректировки построенного программного управления при наличии ζ здесь предложено строить позиционное управление в классе кусочно-постоянных ограниченных функций с использованием методов теории оптимального управления и методов линейного программирования [8, 9]. Результаты реализации данного подхода демонстрируются в работе на числовых примерах при различных значениях входных данных и параметров модели.

Исследования, выполненные для данной работы, проводились при финансовой поддержке: СПб ГПУ (мероприятие 6.1.1), ИТМО (субсидия 074-U01), Программы НТС Союзного государства "Мо-ниторинг-

СГ"(проект 1.4.1-1), грантов РФФИ (№№15-07-08391, 15-08-08459, 16-07-00779, 16-08-00510, 16-08-01277, 16-29-09482-офи-м, 17-08-00797, 17-06-00108, 17-01-00139, 17-20-01214), госзадания Министерства образования и науки РФ №2.3135.2017/K, в рамках бюджетных тем №№0073-2014-0009, 0073-2015-0007.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ortega. M., "Control theory applications to the production-inventory problem: a review", *International Journal of production Research*, 8(2), 74-80 (2000).
- [2] Perea E., Grossman I., Ydstie E., and TahmassebiT. "Dynamic modeling and classical control theory for supply chain management" *Computer and Chemical Engineering*, 24, 1143-1149 (2000).
- [3] Subramanian K., Rawlings J. B. "Integration of control theory and scheduling methods for supply chain management" *Computer and Chemical Engineering*, 51, 4-20 (2013).
- [4] Garcia CA., Ibeas A. "Inventory control for the supplychain: An adaptive control approach based on the identification of the lead-time" Omega, 40, 314-327 (2012).
- [5] Schwartz D., Wang W. "Simulation-based optimization of process control policies for inventory management in supply chains" *Automatica*, 125(2), 1311-1320 (2006).
- [6] Ivanov D.A., Sokolov B.V. Adaptive Supply Chain Management, Springer, (2010).
- [7] Ivanov D.A., Sokolov B.V., Dolgui A.B., Solovyeva I.V. "Application of Control Theoretic Tools to Supply Chain Disruptions Management" *Proceedings of 7th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control. Saint-Petersburg*, 1926-1931 (2013).
- [8] Габасов Р.Ф., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. "Численные методы оптимизации нестационарных многомерных систем с полиэдральными ограничениями" Журнал вычислительной математики и математической физики, 45, No. 4, 617–636 (2005).
- [9] Соловьева И.В., Смирнов Н.В. "Применение метода позиционной оптимизации для многопрограммной стабилизации билинейных систем" Вести. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления, 3, 253-261 (2009).

Investigation of Controllability of Polysystems in Discrete Time Based on Properties of Their Invariant Measures $Xpsumes\ C.M.$

СПбПУ, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, Россия; СПбГУ, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

Исследование управляемости полисистем в дискретном времени на основе свойств их инвариантных мер

Рассматривается некоторый класс динамических систем с конечным числом управляющих значений. Предполагая, что динамическая система управляема в непрерывном времени, исследуется ее управляемость в дискретном времени. Возможность изменения управляющих воздействий лишь в фиксированные дискретные моменты времени может быть обусловлена многими обстоятельствами. В частности, это может быть связано с конструктивными особенностями системы управления, при которых не могут допускаться слишком частные переключения управляющих воздействий. Из-за дискретности времени дифференциальногеометрические методы исследования управляемости не всегда применимы. Поэтому в качестве альтернативного подхода применяются методы на основе теории меры, а именно, с помощью инвариантных мер некоторой вспомогательной полисистемы, ассоциированной с исходной, описываются свойства системы управления и даются условия ее управляемости в дискретном времени. В типичных случаях оказывается, что в дискретном времени можно гарантировать только некоторый ослабленный вариант управляемости, а именно так называемую аппроксимативную управляемость. Это приводит к задаче исследования зависимости времени управления от точности управления. Попутно с задачей исследования управляемости возникает задача нахождения дискретных моментов переключений управлений. Эта задача сводится к нахождению целочисленных решений некоторых уравнений или неравенств. Из-за дискретности множеств, к которым могут принадлежать искомые решения, для нахождения этих решений нельзя применять методы (например, метод Ньютона), применяемые для решения неравенств, заданных в непрерывных областях. Здесь также предлагаются некоторые альтернативные методы нахождения решений. В терминах инвариантных мер удается оценить скорость сходимости последовательностей приближенных решений, что дает возможность оценить время управления, необходимое для обеспечения целевого условия. Полученные результаты опираются на результаты работ [1, 2, 3, 4, 5].

Хрящев С.М. 183

1. Постановка задачи, основные определения и обозначения.

Пусть $\mathbb{X}=\{x\}=\mathbb{R}^n$ — некоторое n-мерное пространство состояний, $\mathbb{U}=\{u\}=\mathbb{R}^1$ — управляющее пространство, $\mathbb{R}=\{t\}$ — пространство моментов времени. Предполагается что для некоторого фиксированного натурального $l\in\mathbb{N}$ и вещественного $u_i\in\mathbb{U}, i=1,\ldots,l$ существует семейство отображений $F_{u_i}^t:\mathbb{X}\to\mathbb{X},\ t\in\mathbb{R}$ с полугрупповым свойством. Таким образом, объект управления задается в виде конечного набора l динамических систем, т. е. в виде полиситемы

$$\{F_{u_1}^t, \dots, F_{u_t}^t\}. \tag{1}$$

Считается, что каждая динамическая система функционирует в своем собственном непрерывном времени R_+ , а полисистема функционирует в многомерном временном пространстве R_+^l .

Управление полиситемой заключается в выборе в каждый момент времени какой-либо динамической системы из заданного набора. Если $t_{j-1} \leqslant t_j, \ j=1,\ldots,l$, $l\geqslant n$ — моменты переключений, то состояние полисистемы в конечный момент времени будет следующее

$$(F_{u_l}^{\tau_l} \circ F_{u_{l-1}}^{\tau_{l-1}} \circ \cdots \circ F_{u_1}^{\tau_1})(x_0) := F^{\tau}(x_0), \tag{2}$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l) \in \mathbb{R}^l_+, \, \tau_j = t_j - t_{j-1}.$

Полисистема, заданная набором (1), называется ε -управляемой из состояния $x_0 \in \mathbb{X}$ в состояние $x_* \in \mathbb{X}$, если для $\varepsilon > 0$ существует вектор времен $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l) \in \mathbb{R}^l_+$, такой что

$$|F^{\tau}(x_0) - x_*| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Предполагается, что в непрерывном времени полисистема (1) имеет некоторое множество достижимости X_* (многообразие размерности n), состоящее из точек, достижимых из некоторого назначенного начального состояния x_0 .

Наряду с непрерывным многомерным временным пространством \mathbb{R}^l_+ рассматривается дискретное многомерное временное пространство \mathbb{Z}^l_+ , элементы которого являются наборами моментов переключений в дискретном времени.

Основной задачей исследования является описание множеств достижимости в дискретном времени. Другой задачей исследования является задача оценивания времени управления, необходимого для достижения поставленной цели, через известные характеристики системы.

Для $\varepsilon=0$ условие (3) в непрерывном времени записывается в виде уравнения $F^{\tau}(x_0)=x_*,$ которое задает поверхность переключений.

Хрящев С.М.

Пусть τ_* есть такое значение, которое удовлетворяет рассмотренное уравнение и имеет минимальную норму. Множество таких τ_* , соответствующих всевозможным конечным значениям $x_* \in X_*$, обозначим M_+^n . Пусть m=l-n. Поверхность переключений может быть параметризованы функцией

$$\varphi_{\tau_*} : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^l_+, \quad \sigma \mapsto \varphi_{\tau_*}(\sigma) = \tau,$$
(4)

так что $\tau_* = \varphi_{\tau_*}(0)$.

Рассмотрим отображение, заданное формулой

$$\psi: \mathbb{M}^n_+ \to X_* \subset \mathbb{R}^n, \quad \tau_* \to \psi(\tau_*) = x_*, \tag{5}$$

где $\psi(\tau_*) := F^{\tau_*}(x_0).$

Основной задачей исследования является изучение свойств функций $\varphi_{\tau_*}(\sigma)$ and $\psi(\tau_*)$. Свойства функций $\varphi_{\tau_*}(\sigma)$ определяют возможность управления в дискретном времени. Суть нашего подхода решения поставленной задачи состоит в интерпретации функций $\varphi_{\tau_*}(\sigma)$ как решений некоторых дифференциальных уравнений. Это позволяет нам применить методы теории динамических систем для изучения свойств этих функций. Свойства функции $\psi(\tau_*)$ определяют обширность множества достижимости.

Для решения поставленной задачи вводится некоторая вспомогательная полисистема, ассоциированная с исходной полисистемой (1). В качестве своего пространства состояний эта ассоциированная полисистема имеет факторизованное многомерное временное пространство исходной (основной) полисистемы, т.е. тор $\mathbb{R}^l_+/\mathbb{Z}^l_+=\mathbb{T}^l$. Функционирование ассоциированной полисистемы в своем многомерном времени \mathbb{R}^m_+ , где m=l-n, интерпретируется с динамической точки зрения как последовательность преобразований пространства состояний следующего вида

$$G^{\sigma}: \mathbb{T}^l \to \mathbb{T}^l, \quad \tau_0 \mapsto G^{\sigma}(\tau_0).$$
 (6)

Интегральными поверхностями преобразования (6) являются функции φ_{τ_*} вида (4).

В пространствах состояний исходной и ассоциированных полисистем заданы стандартные меры объема V_x и V_τ соответственно. Кроме того, у ассоциированной полисистемы имеется множество инвариантных эргодических вероятностных борелевских мер $P_{\rm G}$, которые индуцированы этой полисистемой. Носители множества инвариантных мер образуют разбиение пространства состояний ассоциированной полисистемы. Каждый элемент этого разбиения обладает некоторыми специфическими свойствами.

Хрящев С.М. 185

В терминах этих мер (исходных и индуцированных) описываются многие свойства исходной системы. В частности, строятся функции распределения времен управления для различных конечных состояний x_* множества достижимости X_* .

2. Теоретико-вероятностные и статистические (асимптотические) функции распределения времён управления.

Для описания динамики невязок непрерывных и дискретных времён управления рассматривается мульти-процесс

$$h^{\sigma}(\tau_0) = |G^{\sigma}(\tau_0)| \pmod{1}, \quad \sigma \in \mathbb{N}^m. \tag{7}$$

Теоретико-вероятностная функция распределения значений $h^{\sigma}(\tau_0)$ определяется формулой

$$\mathcal{F}_{h^{\sigma}}(\varepsilon) = P_{G}(\tau_{0} \mid h^{\sigma}(\tau_{0}) < \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Так как мера $P_{\rm G}$ инвариантная, то процесс (6) стационарный. Следовательно, введенная функция распределения не зависит от σ .

Стандартным образом вводится статистические (асимптотические) функции распределения времён управления $\mathcal{F}_h(\varepsilon, \tau_0)$, зависящая от начального условия τ_0 . Очевидно, для любой эргодической инвариантной меры $P_{\rm G}$ справедливо равенство $\mathcal{F}_h(\varepsilon, \tau_0) = \mathcal{F}_h(\varepsilon)$, где $\tau_0 \in {\rm supp}\, P_{\rm G}$.

3. Скорость сходимости последовательности оценок, аппроксимирующих времена переключений управлений в дискретном времени.

Далее изучаются возможные классы распределений значений времен переключений управлений. С помощью каждого такого распределения, зависящего от начальных условий, можно оценить скорость сходимости оценок времен управления в дискретном времени. Они обеспечивают заданную точность управления. Пусть G — ассоциированная полугруппа преобразований, данная формулой (6), $P_{\rm G}$ — эргодическая вероятностная G-инвариантная мера и начальная оценка $\tau_0 \in {\rm supp}\, P_{\rm G}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для $P_{\rm G}$ -почти всех начальных условий au_0 скорость сходимости ε_s последовательности значений невязок $h^{\sigma_s}(au_0), \ au_0 \in {\rm supp}\, P_{\rm G}$ вида (7) дана уравнением

$$\varepsilon_s = \mathcal{F}_h^{-1} \left(\frac{v}{v_s} + o\left(\frac{v}{v_s}\right) \right), \quad s = 1, 2, \dots$$
 (8)

Особенно интересен случай, когда имеется эргодическая инвариантная мера $P_{\rm G}$ с положительной плотностью $p_{\rm G}$, вычисленной относительно меры объема ${\rm V}_{\tau}$ на торе. Таким образом, ${\rm V}_{\tau}$ – квазиинвариантная для преобразования G, данного уравнением (6). Одна такая мера характеризует почти все точки множества достижимых состояний в дискретном времени. В этом случае теорема 1 может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 2. Для V_{τ} -почти всех начальных условий τ_0 скорость сходимости ε_s последовательности значений невязок $h^{\sigma_s}(\tau_0)$ вида (7) дана уравнением (8).

Доказательства теорем 1 и 2 подобны доказательству теоремы, приведенной в работе [5]. С учетом свойств функции ψ вида (5) из этих теорем следуют следующие теоремы.

Теорема 3. Подмножество D множества достижимости X_* , состоящее из точек, которые не являются аппроксимативно достижимыми из начального состояния x_0 в дискретном времени, является множеством V_x -меры нуль в пространстве X_* .

Теорема 4. Для V_x -почти всех целевых значений x_* скорость сходимости ε_s последовательности невязок дана уравнением (8).

Чтобы найти целочисленные значения времени управления, вычисляются (согласно некоторому правилу) значения функции (4) до тех пор, пока значение невязки (3) не станет меньше, чем ε .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. M. Khryashchev, "Controllability and number-theoretic properties of dynamical polysystems" *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 16, No. 4, 388–396 (2013).
- [2] S. M. Khryashchev, "Application of statistical methods of number theory to control polysystems in discrete time." *Proceedings of the XII National Conference on Control Problems*, Russia, Moscow, Institute of Control Sciences, 917-928 (2014).
- [3] S. M. Khryashchev, "On control of continuous dynamical polysystems in discrete times." AIP Conf. Proc. 1648 , 450005 (2015) ; http://dx.doi.org/10.1063/1.4912664.
- [4] S. M. Khryashchev, "Statistic Methods for Control of Dynamical Polysystems." Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 18, No. 4, 489–501 (2015).
- [5] Khryashchev S.M. "Probabilistic Methods for Switching Control in Discrete Time." Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 19. No. 1, 62-70 (2016).

Section 3 Problems of Nonsmooth Mechanics

Bilevel Limit Analysis of Self-Hardening Rod Systems Under Moving Load

Alawdin P., Urbańska K.

p.aliawdin@ib.uz.zgora.pl, k.urbanska@ib.uz.zgora.pl Department of Civil Engineering, Faculty of Civil and Environmental Engineering, University of Zielona Góra, prof. Szafrana 1 str., 65-516, Zielona Góra, Poland

The problem of preventing failures of load-carrying systems, including building constructions and bridges, has become particularly urgent in recent years. It is closely connected with the analysis of construction failure that can be of sudden or gradual nature. The paper considers issues of creating load-carrying rod systems whose failure occurs gradually under one-path monotonic or repeatedly variable (moving) quasi-static loadings, which enables to prevent a catastrophic failure. Such systems have uprated strength, rigidity and safety (survivability), and therefore certain classes of they are called self-hardening systems (SHS) [1].

The rod structures are modelled as discrete mechanical systems, having finite degree of freedom. They carry loads and kinematic actions (including temperatures, support settlements, distortions or dislocations), prestressing and dead forces. The loads and actions may be monotonically increasing or quasi-static cyclic, any dynamic effects are not considered. The material is ideal elastic-plastic, hardening or softening, here the deformation diagrams take the form of piecewise continuous and non-smooth functions.

In analysis of SHS systems let us consider the structure under the constant (dead) load \mathbf{F}_c and variable (moving or live) load \mathbf{F}_v ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mu \mathbf{F}_v, \tag{1}$$

where moving loads μF_v belong to the domain Ω_F ;

$$\mu \mathbf{F}_{\mathbf{v}} \in \mathbf{\Omega}_{\mathbf{F}}(F_{j}(\mathbf{y}), j \in J) \tag{2}$$

the set Ω_F is specified by characteristics of actions cycles; μ is a parameter of load; y is a vector or scalar of the moving loads' coordinate.

The problem of bilevel limit analysis is written as follows. On the first level, at the system adaptation limit state the power of safety factors $\varphi(S, \lambda, K)$ of elements for the moving loads μF_v for the fixed load parameter

 μ , $\mu = const$, in a cycle must be minimized,

$$\sum_{i \in J} T^T \varphi(S, \lambda, K) \to \min$$
 (3)

under conditions $\mathbf{q} = \gamma(\mathbf{u}), \quad A_n(\mathbf{u})\mathbf{S} = \mathbf{F_c} + \mu \mathbf{F_y}(\mathbf{y}),$ (4), (5)

$$q = e + p + d, \quad e = k^{-1}(S) := \zeta(S),$$
 (6), (7)

$$p = \partial \psi \cdot \lambda, \quad \varphi(S, \lambda, K) := \varphi_p(S) - \zeta(\lambda) - K \leqslant 0,$$
 (8), (9)

$$\lambda \geqslant 0, \quad \varphi^T \lambda = 0,$$
 (10),(11)

$$u^- \leqslant u \leqslant u^+, \quad p^- \leqslant \delta \psi \cdot \lambda \leqslant p^+,$$
 (12), (13)

$$\det M_k(S) \geqslant \varepsilon_s, \quad k \in K_a. \tag{14}$$

Then, to determine the parameters of the limit actions on the structure, having upgraded bearing capacity, we propose the following energetic principle:

Of all the statically admissible residual forces, plastic multipliers and corresponding plastic strains, satisfying the conditions of general stability and rigidity of the system, the actual ones are for which the power of the safety factors in a cycle is maximum.

Finally, on the second level we maximize the parameter μ of the moving load $\mu {\pmb F}_v$

$$\mu \to \max$$
 (15)

Notations [1]:

 $u, F \in \mathbb{R}^n$ – vectors of generalized displacements and external forces (loads) of discrete system of structure (n - number of degree of its freedom);

 $q, e, p, d, S \in \mathbb{R}^m$ – vectors of full, elastic and plastic generalized strains as well as vectors of given distortions and internal forces (m – dimension of internal forces and strain vectors; the total number of braces);

 λ , φ , ψ , ζ , $K \in \mathbb{R}^z$ – vectors of generalized plastic multipliers, functions of yielding and plastic constants for [1:z] yielding regimes (z – number of yielding regimes);

 $F_j \in \mathbb{R}^n$ – vectors of generalized independed j-th loadings, $j \in J$ (J – set of independent actions);

 $T \in R^z$ – vectors of weight multipliers, corresponding to safety factors $\varphi(S, \lambda, K) \in R^z$;

 Ω_{F} – domains (sets) of forces F; indices e, r and p relate to elastic, residual and initial (prestressed) state parameters;

 ${m y}$ – vector or scalar of the moving loads' coordinate.

We analyzed the rods system of the structure viaduct WD-22 [2]. This viaduct is located in grade-separated interchange "Pyrzyce" on express road S3 in Poland. Load-bearing structure of this viaduct is a system composes with reinforced concrete beam reinforced by steel arch, steel braces and concrete construction. The numerical calculations of similar system were performed by the finite element method (FEM), using program Abaqus/Standard (ABAQUS 2010) [3] with geometrically and physically nonlinear analysis.

For this system we obtained the most unfavorable for the construction of the position y^* of moving load F_v . The value of moving load was taken from the ranges of load test. By the most unfavorable position y^* is understood such for which we obtained the minimal safety factors $\varphi(S(y), \lambda, K)$ or maximum value of the internal forces (bending moments) $|S^{\max/\min}(y)|$ for the coordinate y^* . Obtained envelopes of bending moments were performed for linear and non-linear analysis. Then, we searched the maximum load parameter, $\mu \to \max$. The numerical calculations show how much may be safety margin in structural design.

The paper considers issues of certain classes systems which have uprated strength, rigidity and safety, and therefore they are called self-hardening systems (SHS). The failure of such systems occurs gradually under one-path or repeatedly variable quasistatic moving loadings.

The mathematical models and methods of limit analysis for the SHS structures are also stated in this paper. Load-carrying capacity and shakedown of systems with regard to inelastic deformations and large displacements are considered.

As criteria of self-hardening systems are adopted the conditions of plastic yielding stability of structures. Yet with some extra conditions these criteria may be also applied to elastic systems, which have not arrived at the state of limit equilibrium. Here is given a set of known and new criteria for plastic yielding stability of structures.

The numerical calculations of SHS systems in this paper show that taking into account the constant load with equilibrium preloading cause the increase of load capacity.

The optimization problem [4] is formulated as a bilevel mathematic programming one. To find limit parameters of load actions the extreme energetic principle is suggested on the first level. On the second level of optimization the parameter of the moving load is maximized.

Examples of using the proposed methods are given, and analysis of self-hardening system is made.

References

- Alawdin P. W. Limit Analysis of Structures Under Variable Loads. Minsk: Technoprint, 2005.
- [2] Alawdin P., Urbańska K. Limit Analysis of Geometrically Hardening Rod Systems Using Bilevel Programming // 11th International Scientific Conference on Modern Building Materials, Structures and Techniques (MBMST), Vilnius, Litwa, 89-98, Procedia Engineering, Vol 57, 89-98 (2013).
- [3] ABAQUS User's Manual. 2010. Version 6.10, Hibbitt, Karlson and Sorensen, Jnc.
- [4] Dem'anov V. F., Stavroulakis G. E., Polyakova L. N., Panagiotopoulos P. D. Quasidifferentiability and Nonsmooth Modelling in Mechanics // Engineering and Economics / Nonconvex Optimization and Its Applications, 10, Kluwer Academic Publishers, 348 p. (1996).

Error Estimates for Numerical Integration of ODEs in the Minimax Formulation

Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Yu. levon-lkb@yandex.ru, irinapototskaya@yandex.ru, j_poupycheva@mail.ru

St. Petersburg State University, 35 Universitetskiy pr., Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia

Introduction

Wide class of ordinary differential equations one can reduce to the form of a polynomial differential system, i.e. a system of ODEs with polynomial right-hand sides (see, for example, [1-7]). One of the best methods for the numerical solution of such systems is the method of Taylor series (see, for example, [8-12]). In this section we consider the Cauchy problem for the polynomial ODE system, and then —

a theorem about the accuracy of its solutions by this method [9]. Next, we formulate the minimax problem, mentioned in the title of the present work. Using this minimax problem one can improve significantly the estimates of this theorem. After that we give the solutions of the corresponding minimax problems for a number of polynomial ODE systems. Here we consider two examples.

Consider the polynomial Cauchy problem

$$\dot{x}_j = a_j + \sum_{\substack{m \in [1:L+1] \\ 0 \le i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}}} a_j[i_1, \dots, i_n] x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}, \qquad x_j(t_0) = x_{j0}, (1)$$

where $L \in [1:\infty)$; $t, t_0, x_i, x_{i0}, a_i, a_i[i_1, \dots, i_n] \in C$; $j \in [1:n]$.

Let $x_j(t) = x_j(t, t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}), \ j \in [1:n]$ be the solution of the problem (1), and let us use the designations:

$$x_j^{(k)} = d^k x_j / dt^k, \ x_{j0}^{(k)} = x_j^{(k)}(t_0), \quad O_\rho(t_0) = \{t \in C | |t - t_0| < \rho\},$$

$$T_M x_j(t) = \sum_{m \in [0, M]} x_{j0}^{(m)} (t - t_0)^m / m!, \quad \delta T_M x_j(t) = x_j(t) - T_M x_j(t), \quad (2)$$

where T_M and δT_M are operators. In particular, for the function $b(\tau) = (1-\tau)^{-1/L}$ we obtain the equalities:

$$T_M b(\tau) = \sum_{m \in [0;M]} \prod_{l \in [0;m-1]} (1/L + l) \tau^m / m!, \quad \delta T_M b(\tau) = b(\tau) - T_M b(\tau).$$
 (3)

Theorem ([9-11]). If $0 < |x_{j0}| \le \alpha_j, j \in [1:n]$, then:

(a) The solution $x_j(t)$, $j \in [1:n]$ of the problem (1) is holomorphic for $t \in O_{\rho}(t_0)$, where

$$\rho = (Ls)^{-1}, \quad s = \max_{j \in [1:n]} s_j,$$

$$s_j = \alpha_j^{-1}(|a_j| + \sum_{m \in [1:L+1]} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = m \\ 0 \leqslant i_1, \dots, i_n \in Z}} |a_j[i_1, \dots, i_n]| \alpha_1^{i_1} \dots \alpha_n^{i_n});$$

(b) $|\delta T_M x_j(t)| \leq \alpha_j \cdot \delta T_M b(|t-t_0|\rho^{-1}), \quad t \in O_\rho(t_0), \ j \in [1:n].$ Having used the choice of the parameters α_j one can reduce s. This will improve the estimates provided by the theorem above. In the papers [4,9-11] it was shown (just in such a way) that the theorem is a powerful tool for numerical integration with guaranteed a priori estimation of truncation error. Now we formulate the minimax problem. Solving this problem allows one to find the optimal values of α_j :

Given $n, L \in [1:\infty)$; $a_1, \ldots, a_n \in C, 0 \neq x_{10}, \ldots, x_{n0} \in C$, and $a_1[i_1, \ldots, i_n], \ldots, a_n[i_1, \ldots, i_n] \in C$ for $0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant L+1$ Minimize $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \max_{j \in [1:n]} s_j$,

$$s_j = \alpha_j^{-1}(|a_j| + \sum_{\substack{m \in [1:L+1] \\ 0 \le i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}}} |a_j[i_1, \dots i_n]| \alpha_1^{i_1} \dots \alpha_n^{i_n})$$

Subject to $|x_{i0}| \leq \alpha_i, j \in [1:n].$

Examples

A. The Generalized Lotka-Volterra Equations

Consider the polynomial Cauchy problem (GLV- equations and initial data)

$$\dot{x}_j = x_j(r_j + \sum_{m \in [1:n]} a_{jm} x_m), \quad x_j(t_0) = x_{j0},$$
 (4)

where $t, t_0, x_j, x_{j0}, r_j, a_{jm} \in R; j \in [1:n]$.

The corresponding minimax problem is:

Given $n \in [1:\infty), r_1, \ldots, r_n \in R, 0 \neq x_{10}, \ldots, x_{n0} \in R \text{ and } a_{jm} \in R \text{ for } j, m \in [1:n]$

Minimize
$$s(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \max_{j\in[1:n]} (|r_j| + \sum_{m\in[1:n]} |a_{jm}|\alpha_m)$$

Subject to $|x_{j0}| \leq \alpha_j, j \in [1:n].$

It is evident, that the solution to this problem is $\alpha_j = |x_{j0}|, j \in [1:n]$.

B. The Lorenz Equations

Consider the Cauchy problem (Lorenz equations and initial data)

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \ \dot{y} = rx - y - xz, \ \dot{z} = -\beta z + xy;
 x(t_0) = x_0, \ y(t_0) = y_0, \ z(t_0) = z_0,$$
(5)

where $t, t_0, x, y, z \in R$; $0 \neq x_0, y_0, z_0 \in R$; $\sigma, r, \beta > 0$.

On letting $x_1 = x/x_0$, $x_2 = y/y_0$, $x_3 = z/z_0$ one obtains:

$$\dot{x_1} = -Ax_1 + Bx_2, \ \dot{x_2} = Cx_1 - x_2 - Dx_1x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -Ex_3 + Fx_1x_2; \ x_j(\tau_0) = \pm 1, \ j \in [1:3],$$

where $A=\sigma$, $B=\sigma y_0/x_0$, $C=rx_0/y_0$, $D=x_0z_0/y_0$, $E=\beta$, $F=x_0y_0/z_0$. If $a=|A|,\ b=|B|,\ c=|C|,\ d=|D|,\ e=|E|,\ f=|F|,\ u=\alpha_1/\alpha_2$, $\nu=\alpha_1\alpha_3/\alpha_2,\ w=\alpha_1\alpha_2/\alpha_3;\ \alpha_1=\sqrt{\nu w},\ \alpha_2=u\sqrt{\nu w},\ \alpha_3=u\nu$, then the corresponding minimax problem is:

 $\textbf{Given} \qquad a,b,c,d,e,f>0$

Minimize $s(u, \nu, w) = \max\{s_1, s_2, s_3\}, \quad s_1 = a + bu, \ s_2 = 1 + c/u + d\nu, \ s_3 = e + fw$

Subject to $(u, \nu, w) \in D, D = \{(u, \nu, w) | u, \nu, w > 0, \nu w \ge 1, u^2 \nu w \ge 1, u\nu \ge 1\}.$

First, we show that if $s(u, \nu, w)$ has a minimum value s_* at the point (u_1, ν_1, w_1) , then it reaches the same value with the additional condition $s_1 = s_2 = s_3 = s_*$. This follows from the fact, that:

— each of the functions $s_1(u, \nu, w)$, $s_2(u, \nu, w)$, and $s_3(u, \nu, w)$ strictly increases with respect to u, ν, w respectively and does not increase with respect to two its other arguments;

$$-((u_1,\nu_1,w_1)\in D,\ u\geqslant u_1,\ \nu\geqslant \nu_1,\ w\geqslant w_1)\implies (u,\nu,w)\in D.$$

Indeed, if the condition $s_1 = s_2 = s_3 = s_*$ is not satisfied, then to satisfy it one can act as follows:

 $s_* = s_1 = s_2 > s_3 \Longrightarrow$ increase w on condition $e + fw = s_*$;

 $s_* = s_1 = s_3 > s_2 \Longrightarrow \text{increase } \nu \text{ on condition } 1 + c/u + d\nu = s_*;$

 $s_* = s_2 = s_3 > s_1 \Longrightarrow \text{increase } u \text{ on condition } a + bu = s_*;$

 $s_* = s_1 > s_2, \ s_3 \Longrightarrow \text{increase } \nu \text{ and } w \text{ on condition } 1 + c/u + d\nu = s_* = e + fw;$

 $s_* = s_2 > s_1$, $s_3 \Longrightarrow$ increase u and w on condition $e + fw = s_* = a + bu$;

 $s_* = s_3 > s_1, \ s_2 \Longrightarrow \text{increase } u \text{ and (then) } \nu \text{ on condition } 1 + c/u + d\nu = s_* = a + bu$

Thus, supposing that $s_1 = s_2 = s_3 = s_*$, we obtain the formulas

$$u = (s_* - a)/b$$
, $\nu = (bu - c/u + a - 1)/d$, $w = (bu + a - e)/f$,

and then, instead of the previous one, we can consider the problem: find out minimal s_* , satisfying the inequalities $u, \nu, w > 0$, $\nu w \ge 1$, $u^2 \nu w \ge 1$, $\nu u \ge 1$. So, we have to find the minimal value $u = u_*$ satisfying the inequalities:

$$u > 0$$
, $bu - c/u + a - 1 > 0$, $bu + a - e > 0$, $(bu - c/u + a - 1)u \ge d$, (6)

$$(bu-c/u+a-1)(bu+a-e) \ge df$$
, $u^2(bu-c/u+a-1)(bu+a-e) \ge df$. (7)

Since the second inequality in (6) is a consequence of the first and the last inequalities, (6) is equivalent to

$$u \geqslant u' = \max\left\{\frac{c - ac}{b}, \frac{1 - a + \sqrt{(1 - a)^2 + 4b(c + d)}}{2b}\right\}.$$
 (8)

Since the first of inequalities (7) is a consequence of the second at $u \in (0, 1]$, and the second is a consequence of the first at $u \in [1, +\infty)$, it is reasonable instead of (7) to consider the following two systems of inequalities:

$$u \ge 1$$
, $\varphi(u) = (bu - c/u + a - 1)(bu + a - e) - df \ge 0$, (9)

$$0 < u \le 1$$
, $\psi(u) = u^2(bu - c/u + a - 1)(bu + a - e) - df \ge 0$. (10)

If the inequalities (6) (and hence also (8)) are satisfied, then the functions $\varphi(u)$, $\psi(u)$ are strictly increasing. If $u^{''}$ and $u^{'''}$ are minimum values of u, satisfying (9) and (10) respectively, then $u_* = \max\{u^{'}, u^{''}, u^{'''}\}$. All this

gives the following algorithm for finding the optimal values of the variables u, ν, w , using the above introduced functions $\varphi(u), \psi(u)$, and given values of a, b, c, d, e, f > 0:

$$a, b, c, a, e, f > 0:$$

$$1. \ u' = \max \left\{ (e - a)/b, (1 - a + \sqrt{(1 - a)^2 + 4b(c + d)})/(2b) \right\};$$

$$2. \ u' \geqslant 1 \Longrightarrow u_* = \left\{ \begin{array}{l} u', & if \ \varphi(u') \geqslant 0, \\ u'', & if \ \varphi(u') < 0, \ u'' \in (u', \infty); \end{array} \right.$$

$$3. \ u' < 1 \Longrightarrow u_* = \left\{ \begin{array}{l} u', & if \ \psi(u') \geqslant 0, \\ u'', & if \ \psi(u') \geqslant 0, \end{array} \right.$$

$$u'', & if \ \psi(u') < 0, \ \psi(1) \geqslant 0, \ u'' \in (1, \infty), \\ u''', & if \ \psi(u') < 0, \ \psi(1) < 0, \ u''' \in (u', 1];$$

$$4. \text{ Output: } u = u_*, \ w = (bu + a - e)/f, \ \nu = (bu - c/u + a - 1)/d,$$

References

[1] V. I. Charnyi "Two Methods of integrating the equations of motion Cosmic Research, Vol. 8. No. 5 (1970).

 $\alpha_1 = \sqrt{\nu w}, \ \alpha_2 = u\sqrt{\nu w}, \ \alpha_3 = \nu u, \ s = bu_* + a.$

- [2] L. K. Babadzanjanz, "Existence of the Continuations and Representation of the Solutions in Celestial Mechanics TRUDY ITA, vyp. XVII, 3–45 (1978) (in Russian).
- [3] L. K. Babadzanjanz, "Existence of the Continuations in the N-body problem *Celestial Mechanics*, 20, 43–57 (1979).
- [4] L. Babadzhanyants, "Error estimates for numerical integration of the N-body problem American Institute of Physics (Sov.Astron.Lett.7(6) Nov.-dec.-1981), 416-418 (1982).
- [5] L. K. Babadzanjanz, "On the global solution of the N-body problem Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Kluwer Academic Publishers, 56, 427– 449 (1993).
- [6] D. C. Carothers, E. G. Parker, J. S. Sochacki and P. G. Warne, "Some properties of solutions to polynomial systems of differential equations *Electronic Journal* of *Differential Equations*, Harlow, 40, Vol. 2005, 1–17 (2005).
- [7] L. K. Babadzanjanz and K. M. Bregman "Algorithm of the additional variables method *Vestnik St. Petersburg University*, Ser. 10, Issue 2, 3–12 (2012)(in Russian).
- [8] E. G. Parker and J. S. Sochacki, "Implementing the Picard Iteration Neural, Parallel, and Scientific Computation, 4, 97–112 (1996).
- [9] L. Babadzanjanz and D. Sarkissian, "Taylor series method for dynamical systems with control *Journal of Mathematical Scienses*, Springer New York, 6, Vol. 139, 7025-7046 (2006).
- [10] L. Babadzanjanz, "Taylor series method Vestnik St. Petersburg University, Ser. 10, Issue 2, 13–29 (2010) (in Russian).

Chernousko F. 195

[11] L. Babadzanjanz and A. Bolshakov, "Realization of the method of Taylor series for the solutions of ordinary differential equations Computational Methods and Programming, Research Computing Center of Moscow State University, Lomonosov Moscow State University, Vol. 13. 497 – 510 (2012) (in Russian).

[12] M. Rodriguez and R. Barrio, "Reducing rounding errors and achieving Brouwer's law with Taylor series method Appl. Numer. Math., 62, N 8, 1014– 1024 (2012).

Dynamics of a Body with Internal Moving Masses in the Presence of Dry Friction

Chernousko F.

chern@ipmnet.ru

Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, pr. Vernadskogo, 101-1, Moscow, 119526, Russia; Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Moscow Region, 141700, Russia

Movement of a body inside a resistive medium can be based upon special motions of internal masses contained within the body. This principle of locomotion can be useful for robotic systems moving in vulnerable or hazardous media because it does not require external devices such as wheels, legs, or tracks interacting with the outer environment. This type of mobile systems are sometimes called vibro-robots or capsubots; if necessary, they can be made hermetic.

Dynamics of mobile systems containing movable internal masses was studied in a number of papers, see [1-9]. However, in these papers only one-dimensional motions along a straight line were considered. For such systems, optimal periodic motions of internal masses were found [7] that correspond to the maximal average velocity of the main body moving in a resistive medium.

In this paper, we consider two-dimensional motions of a rigid body P along a horizontal plane. We assume that the body P contacts the horizontal plane OXY of inertial coordinate system OXYZ at three support point A_i , i=1,2,3, where dry friction forces obeying Coulomb's law act between the plane and the body. These forces \mathbf{F}_i are defined by formulas

$$\mathbf{F}_i = -fN_i\mathbf{v}_i/|\mathbf{v}_i|, \quad \text{if} \quad \mathbf{v}_i \neq 0, \quad |\mathbf{F}_i| \leqslant fN_i, \quad \text{if} \quad \mathbf{v}_i = 0,$$
 (1)

where f is the coefficient of friction, $N_i \ge 0$ is the normal reaction at the point A_i , \mathbf{v}_i is the velocity of this point, i = 1, 2, 3. In case of three support points, the system is statically determinate, so that normal reactions N_i can be obtained from equations of motion.

Body P carries movable masses that interact mechanically with the body but do not interact with the outer environment. We consider two versions (A and B) of movable internal masses.

196 Chernousko F.

A. In this case, body P carries a point mass Q that can move in a horizontal plane Z=h parallel to the support one. Position of mass Q is determined by two coordinates in the plane Z=h; motion of mass Q in this plane is controlled by two actuators.

B. Body P carries a rotor R that can rotate about a vertical axis O'Z' parallel to axis OZ (point O' is fixed relative to body P) and a point mass Q that can move along a straight line $O'\xi$ connected with the rotor. Positions of internal masses are defined by the angle of rotation of rotor R relative to body P and displacement of mass Q along line $O'\xi$. As in case A, relative motions of internal bodies are controlled by two actuators: one of them turns rotor R about its axis O'Z', and the other moves mass Q along the line $O'\xi$ [10].

We denote by C the center of mass of body P for case A, or body P+Q+R with $\xi=0$ for case B. We assume that the vertical axis passing through C is a principal central axis of inertia for respective bodies in these cases.

Any desired displacement in the plane OXY of the system in cases A and B can be designed as a combination of simpler motions, namely, one-dimensional translations, rotations, and also slow motions of point mass Q while body P stays at rest. The latter opportunity is possible when the velocity and acceleration of mass Q is small enough so that the friction forces keep body P at rest.

Since these simple partial motions are one-dimensional, they can be chosen as time-optimal. The corresponding time-optimal solutions are given in [7] for various constraints imposed on velocity and acceleration of moving internal bodies. Of course, using optimal solutions for partial motions does not lead to time-optimal solution for the total transfer.

As a result, the design of the total transfer is suggested, and the analysis of the corresponding equations of motion is performed.

It is shown that, if the actuators are powerful enough, in both cases A and B the mechanical system (P+Q) in case A and P+Q+R in case B) can be moved from an arbitrary initial position to any prescribed terminal position.

Thus, in certain sense, the controllability of mechanical systems under consideration is established.

- [1] J.-M. Breguet, R. Clavel, "Stick and slip actuators: design, control, performances and applications", *Proceedings of International Symposium Micromechatronics and Human Science (MHS)*, IEEE, New York, 89–95 (1998).
- [2] F. Fidlin, J.J. Thomsen, "Predicting vibration-induced displacement for a resonant friction slider", European Journal of Mechanics A/Solids, 20, No. 1, 155–166 (2001).

- [3] F. Schmoeckel, H. Worn, "Remotely controllable mobile microrobots acting as nano positioners and intelligent tweezers in scanning electron microscopes (SEMs)", Proceedings of International Conference Robotics and Automation, IEEE, New York, 3903--3913 (2001).
- [4] P. Vartholomeos, E. Papadopoulos, "Dynamics, design and simulation of a novel micro-robotic platform employing vibration microactuators", *Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control*, 128, No. 1, 122–133 (2006).
- [5] K. Zimmermann, I.Zeidis, C. Behn, Mechanics of Terrestrial Locomotion, Springer, Berlin (2009).
- [6] F.L. Chernousko, "On the motion of a body containing movable internal mass", Doklady Physics, 50, No. 11, 593-597 (2005).
- [7] F.L. Chernousko, "Analysis and optimization of the motion of a body controlled by a movable internal mass", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 70, No. 6, 915–941 (2006).
- [8] H. Li, K. Firuta, F.L. Chernousko, "A pendulum-driven cart via internal force and static friction", *Proceedings of International Conference "Physics and Control"*, St.Petersburg, 15–17 (2005).
- [9] H. Li, K. Firuta, F.L. Chernousko, "Motion generation of the Capsubot using internal force and static friction", *Proceedings of the 45th IEEE Conference Decision and Control*, San Diego, 6575–6580 (2006).
- [10] F.L. Chernousko, "Two-dimensional motions of a body containing internal moving masses", Meccanica, 51, No. 12, 3203-3209 (2016).

Analysis of Elastic Systems with Discontinuous Parameters *Goloskokov D., Matrosov A.*

dpg1954@mail.ru, avmatrosov@mail.ru

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, 5/7, Dvinskaya str., Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation; Saint-Petersburg State University, 7/9, Universitetskaya nab., Saint Petersburg, 199034, Russian Federation

We consider the construction as rectangular plates and shallow shells backed by a system of cross-ribs and loaded with high rigidity arbitrary transverse load.

The stress-strain state of such structures is described by the technical theories of plates and shallow shells. The effect of the ribs stiffeners is taken into account in the equations in the form of additional terms containing the multipliers with the δ -function of Dirac and its derivatives.

Unlike the majority of works on the calculation of reinforced plates and shells, here we are talking about the structures in which ribs represent an arbitrary thin-walled non-uniform beams playing a significant role in ensuring bearing capacity of the structure as a whole; itself the plate or shell may have a stepped variable thickness. In addition, it is essential to define the stressstrain state of all structural elements as itself plate or shell and stiffeners ribs.

Calculated models of the constructions are implemented in analytical decisions which are under construction in series with use of methods of Kantorovich and Steklov-Liouville-Fubini [1].

The results [2, 3, 4] show a fairly good convergence of the series in the resulting solutions. It should be noted, however, that the convergence of the series deteriorates on the lines of the location of ribs. Thus, to calculate stress-strain state directly at the rib it is necessary to keep in the series a considerable number of members.

The deterioration of convergence of the obtained series solutions is directly related to the amount of rigidity of the ribs, namely, the greater the rigidity of the ribs, the more members of the series that we to take in the decision to get an acceptable result. At low stiffness of ribs series converge well in the whole region, including on the singular lines. Apparently this fact was the reason for the erroneous claims about a good of convergence of series in the whole region contained in some works [9].

With the increasing the number of terms of the series occupied in the decision reflects another feature of the considered task - computational instability. This problem is solved by calculating with a long mantissa using the features of the Maple [5, 6, 7, 8].

To reduce the total number of solvable algebraic equations to obtain the solution of the problem, one can use the method of successive approximations. Known approaches to the construction method of successive approximations to calculate ribbed shells, which are used as the main system unsupported ("smooth") shell, structurally-orthotropic shell and the shell, reinforced ribs in one direction. In the first two cases, the objective in each approach is to define a stress state, respectively unsupported or structurally-orthotropic shell, loaded to a given load and load, defined as the discrepancy resolution main system as computed from the previous approximation. Such processes are approximations converge fairly quickly at a relatively low stiffness of ribs, but with the increase of the stiffness of the rib convergence is broken.

In the case where a known solution of the fundamental system of governing equations for the shell, reinforced by ribs in one direction, it is possible to offer an effective process approximations in determining the solution of this system for shell, reinforced by a cross system of ribs. This method is free from this drawback and provides a solution to the problem with the accuracy required for each set of ribs.

By taking as the main system shell, reinforced by ribs in one direction, build two sequences of approximations for shell, reinforced ribs respectively, the first and second directions. Each approach solves the problem for shell, reinforced by ribs in one direction, loaded with a given load and reactions of the ribs of the second direction. Thus, an iterative process, and the decision of one sequence is corrected by the inclusion in components of external load reactions of the ribs of the second direction found from another sequence in the previous step.

For obtaining acceptable results with a sufficiently large rigidity of the ribs requires the use of special representations of the solutions and special techniques for improving the convergence of series. Good results are obtained using so-called smoothing σ -multiplier Lanczos [10].

- [1] D. P. Goloskokov, Numerical-analytical methods of calculation of elastic thin-walled structures irregular structures, Saint Petersburg, A. Kardakov's Publisher, (2006) (in Russia).
- [2] D.P. Goloskokov, "Analyzing simply supported plates using Maple system", 2014
 International Conference on computer technologies in physical and engineering
 applications (ICCTPEA), 55-56 (2014). DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893273
- [3] D.P. Goloskokov, "Calculation of the ribbed plate in the mixed form "deflection function of efforts", 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 5-9 Oct., Saint-Petersburg, 386-388 (2015). DOI: 10.1109/SCP.2015.7342170
- [4] D. P. Goloskokov "Numerical-analytical method of calculating of the shallow shell rectangular in plane reinforced by ribs of variable stiffness". *Materials Physics and Mechanics (MPM)*, No. 1, Vol. 26, 66-69 (2016).
- [5] A.V. Matrosov, "A numerical-analytical decomposition method in analyses of complex structures", 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA), 104-105 (2014). DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893305
- [6] A.V. Matrosov, "A superposition method in analysis of plane construction", 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 5-9 Oct., Saint-Petersburg, 414-416 (2015). DOI: 10.1109/SCP.2015.7342156
- [7] D.P. Goloskokov, A.V. Matrosov, "Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages", 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 5-9 Oct., Saint-Petersburg, 382-385 (2015). DOI: 10.1109/SCP.2015.7342169
- [8] Dmitriy P. Goloskokov, Alexander V. Matrosov, "A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle", Applied Mathematical Sciences, Vol. 10, No. 54, 2647-2660 (2016). http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211

200 Kumar M.

[9] B. K. Mikhailov, *Plates and shells with discontinuous parameters*, Leningrad, Leningrad University, (1980) (in Russia).

[10] C. Lanczos, Applied analysis, Prentice Hall, Inc. (1956).

Boundary Layer Problems *Kumar M.*

manoj@mnnit.ac.in

Department of Mathematics Motilal Nehru National Institute of Technology, Allahabad, 211004 ,India

In physics and fluid mechanics, a boundary layer is an important concept and refers to the layer of fluid in the immediate vicinity of a bounding surface where the effects of viscosity are significant. Boundary layers are also a common feature of singular perturbed systems. In these cases higher order derivatives disappear in the unperturbed equations which lead to the cancellation of degree of freedom of the system and finally in small regions where the system changes rapidly. The main difficulty of solving such problems is due to non-smooth solutions at the end points. In this paper, Multiple-scales method is presented for solving second and third order singularly perturbed problems with the boundary layer at one end either left or right. The original second and third order ordinary differential equations are transformed to partial differential equations. These problems have been solved efficiently by using Multiple-scales method and Numerical simulations are performed on standard test examples to justify the robustness of the proposed method.

- [1] Parul Gupta, Manoj Kumar, "Multiple-Scales Method and Numerical Simulation of Singularly Perturbed Boundary Layer Problems", *Appl. Math. Inf. Sci.*, 10, No. 3, 1119–1127 (2016).
- [2] A.H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, New York, (1981).
- [3] J.D. Murray, Asymptotic Analysis, Springer Verlag, New York, (1984).
- [4] M.H. Holmes, Introduction to Perturbation Methods, Springer Verlag, New York, (1995).
- [5] J. Kevorkian and J.D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer Verlag, New York, (1981).
- [6] J. Kevorkian, J.D. Cole, Multiple Scale and Singular Perturbation Methods, Springer Verlag, New York, (1996).

Analysis of Elastic Systems with Nonsmooth Boundaries Matrosov A., Goloskokov D.

avmatrosov@mail.ru, dpg1954@mail.ru

Saint-Petersburg State University, 7/9, Universitetskaya nab., Saint Petersburg, 199034, Russian Federation; Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, 5/7, Dvinskaya str., Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation

A linearly elastic isotropic rectangle in Cartesian orthogonal coordinate system Oxy under arbitrary boundary conditions is considered. A general solution constructed by the superposition method using two solutions by the method of initial functions is received in the following form [1, 2, 3]

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_x + \mathbf{U}_y,\tag{1}$$

where $\mathbf{U}, \mathbf{U}_x, \mathbf{U}_y$ are vectors of the displacements u, v and the strsses $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ of the general solution and two solutions of the method of initial functions respectively. The method of initial functions as allowing to get an approximate analytical solution ia widely used to solve various practical problems of nonsmooth mechanics [4, 5, 6, 7, 8, 9].

Each of the solutions \mathbf{U}_x and \mathbf{U}_y can satisfy the boundary conditions on two opposite sides of the rectangle and their sum allows to satisfy boundary conditions on all four its sides. In (1) the components of the vectors \mathbf{U}_x and \mathbf{U}_y are presented in the form of trigonometric series on one of the independent coordinate with coefficients depending from the other one. Usually two presentations of the stress-strain components are used: the so-called expansion in "sines" and "cosines" [1, 10].

The solution (1) allows to calculate all components of the stress-strain state in inner points of the elastic rectangle using a small number of terms of the series. But near the boundary sides and especially in the neighborhood of the corner points of the rectangle this solution shows slow convergence and the appearance of oscillations around the true solution.

The use of the Lanczos' σ -multipliers technique [11] in the summation of the partial sums of slowly convergent trigonometric series allows to resolve both these problems.

In the paper the speed of convergence of two general solutions on the sides of the rectangle is compared. It is noted that the convergence speed essentially depends on the smoothness of the boundary conditions given. In the presence of discontinuities of the first kind in the boundary conditions, for example, the stresses is specified on the part of the rectangle sides, the speed of convergence is reduced compared to the continuous loads on the sides.

It is proposed to accelerate the convergence of the solution to use the method of analytical decomposition, the essence of which consists in partitioning the original rectangle into rectangles with smooth boundary conditions, the analysis of each of them using common solutions and subsequent gluing the obtained solutions [12, 2, 13].

Another problem discussed is a problem of computational instability of the general solution in the form of trigonometric series [7, 14]. The solution of the boundary problem in the result is reduced to solving a system of linear algebraic equations for finding unknown coefficients in the general solution when satisfying the boundary conditions of the problem. This system becomes ill-conditioned when holding a certain number of members in the series. This depends on the geometrical and physical-mechanical characteristics of the rectangle. Calculating with long mantissa allows us to solve this problem. Nowdays there are systems of analytical calculations (Maple, Mathematica) allowing to perform operations on real numbers with arbitrary length mantissa.

In the paper also the comparison of using the solutions on the "cosine" and "sine" to analyse stress and strain state in the neighborhood of the corner points is presented.

- [1] A.V. Matrosov, "Numerical-analytical solution for a boundary problem of deformation of linearly-elastic anisotropic rectangle", Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10, No. 2, 55-65 (2007). (in Russian)
- [2] A.V. Matrosov, "A numerical-analytical decomposition method in analyses of complex structures", 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA), 104-105 (2014). DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893305
- [3] A.V. Matrosov, "A superposition method in analysis of plane construction", 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 5-9 Oct., Saint-Petersburg, 414-416 (2015). DOI: 10.1109/SCP.2015.7342156
- [4] S.M. Galileev, A.V. Matrosov, "Method of initial functions in the computation of sandwich plates", *International Applied Mechanics*, 31, No. 6, 469-476 (1995).
- [5] S.M. Galileev, A.V. Matrosov, "Method of initial functions: Stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures", *Composite Structures*, 39, No. 3-4, 255-262 (1997).
- [6] A.V. Matrosov and G.N. Shirunov, "Numerical-analytical computer modeling of a clamped isotropic thick plate", 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA), 96 (2014). DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893300

- [7] D.P. Goloskokov, A.V. Matrosov, "Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages", 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 5-9 Oct., Saint-Petersburg, 382-385 (2015). DOI: 10.1109/SCP.2015.7342169
- [8] G.N. Shirunov, "A method of initial functions in analyzing a stress and strain state of an elastic layer", 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA), 170-171 (2014).
- [9] Patel Rakesh, S.K. Dubey and K.K. Pathak, "Analysis of RC Brick Filled Composite Beams using MIF", Procedia Engineering, No. 51, 30-34 (2013).
- [10] Dmitriy P. Goloskokov, Alexander V. Matrosov, "A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle", Applied Mathematical Sciences, Vol. 10, No. 54, 2647-2660 (2016). http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211
- [11] C. Lanczos, Applied analysis, Prentice Hall, Inc. (1956).
- [12] A.V. Matrosov, "Numerical-analytical algorithm for solving problems of plane deformation of linearly-elastic solids with irregular shapes", Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10, No. 3, 70-84 (2008). (in Russian)
- [13] D.P. Goloskokov, "Calculation of the ribbed plate in the mixed form "deflection function of efforts"", 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 5-9 Oct., Saint-Petersburg, 386-388 (2015). DOI: 10.1109/SCP.2015.7342170
- [14] A.V. Matrosov, "A computational instability of an algorithm of a method of initial functions", Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10, No. 4, 30-39 (2010). (in Russian)

Analysis of the Behavior of Stresses on the Edges of a Thick Plate

Matrosov A., Shirunov G.

avmatrosov@mail.ru, guriyn@mail.ru

Saint-Petersburg State University, 7/9, Universitetskaya nab., Saint Petersburg, 199034, Russian Federation

A linearly elastic isotropic thick plate may be considered as a parallelepiped $(x \in (0, A), y \in (0, B), z \in (0, h))$ in Cartesian orthorgonal coordinate system Oxyz. A general solution is constructed using Lame's idea [1] that if there are three solutions each of which can satisfy boundary conditions on two opposite faces of the parallelepiped then a sum of these three solutions will be a general solution for the parallelepiped. This technique was later called the method of superposition [2].

A solution $\mathbf{U}^x = \{u^x, v^x, w^x, \sigma_z^x, \tau_{yz}^x, \tau_{xz}^x, \sigma_x^x, \sigma_y^x, \tau_{xy}^x\}$ received by the method of initial functions defined on the plane x=0 can satisfy any

boundary conditions determined on the faces x = 0, A of the plate. Let's denote two other solutions obtained by the method of initial functions with the initial planes y = 0 and z = 0 respectively as \mathbf{U}^y and \mathbf{U}^z . These solutions can satisfy any boundary conditions respectively on the faces y = 0, B and z = 0, B. Now the general solution for the elastic plate can be written as [3]

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^x + \mathbf{U}^y + \mathbf{U}^z. \tag{1}$$

The method of initial functions allows to get an analytical solution and is used to solve various practical problems of mechanics [4]–[14].

The initial functions of all three solutions by the method of initial functions in (1) are represented in the form of a double trigonometric series with undetermined coefficients. These ones are determined when satisfying boundary conditions on all six faces of the plate equating the coefficients of equal harmonics in the expantions of boundary conditions given and the general solution on the plate faces. An infinite system of linear algebraic equations for determining series coefficients is built. Its solution can be found by the reduction technique.

In the paper the behavior of the solution obtained is studied on the edges of the plate under various boundary conditions. The class of boundary conditions under which reliable results are obtained with retention of a small number of members in the trigonometric series is defined. The boundary conditions under which it should retain a sufficiently large number of members in the series for getting a reliable result is also determined. Under certain boundary conditions, for example, for a cantilever plate, the stress in the angle edges arises that is not consistent with the physical picture of bending of the plate. To solve this problem is to specify special additional boundary conditions on these edges.

Another problem arising is computational instability. An ill-conditioned matrix of the linear algebraic system for finding unknown coefficients in the series for the initial functions forces to the compute with long mantissa. Fortunately there are systems of analytical calculations (Maple, Mathematica) allowing to perform operations on real numbers with arbitrary length mantissa.

- [1] G. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticite des corps solides, Bachelier, Paris, (1852).
- [2] V.T. Grinchenko, Equilibrium and steady oscillations of elastic bodies of finite dimensions, Naukova Dumka, Kiev, (1978). (in Russian)
- [3] A.V. Matrosov, G.N. Shirunov, "A superposition method for solving a problem of an elastic isotropic parallelepiped", *Vestnik St. Petersburg University. Ser* 10, No. 2, 77-90 (2015).

- [4] A.V. Matrosov, "A numerical-analytical decomposition method in analyses of complex structures", 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA), 104-105 (2014). DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893305
- [5] A.V. Matrosov, "A superposition method in analysis of plane construction", 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 5-9 Oct., Saint-Petersburg, 414-416 (2015). DOI: 10.1109/SCP.2015.7342156
- [6] S.M. Galileev, A.V. Matrosov, "Method of initial functions in the computation of sandwich plates", *International Applied Mechanics*, 31, No. 6, 469-476 (1995).
- [7] S.M. Galileev, A.V. Matrosov, V.E. Verizhenko, "Method of initial functions for layered and continuously inhomogeneous plates and shells", *Mechanics of Composite Materials*, 30, No. 4, 386-392 (1995).
- [8] S.M. Galileev, A.V. Matrosov, "Method of initial functions: Stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures", Composite Structures, 39, No. 3-4, 255-262 (1997).
- [9] A.V. Matrosov and G.N. Shirunov, "Numerical-analytical computer modeling of a clamped isotropic thick plate", 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA), 96 (2014). DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893300
- [10] D.P. Goloskokov, A.V. Matrosov, "Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages", 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 5-9 Oct., Saint-Petersburg, 382-385 (2015). DOI: 10.1109/SCP.2015.7342169
- [11] G.N. Shirunov, "A method of initial functions in analyzing a stress and strain state of an elastic layer", 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA), 170-171 (2014).
- [12] Patel Rakesh, S.K. Dubey and K.K. Pathak, "Analysis of RC Brick Filled Composite Beams using MIF", Procedia Engineering, No. 51, 30-34 (2013).
- [13] Dmitriy P. Goloskokov, Alexander V. Matrosov, "A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle", Applied Mathematical Sciences, Vol. 10, No. 54, 2647-2660 (2016). http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211
- [14] G. N. Shirunov, "Method of initial functions in model of compression linarly deformable layered foundation under normal local load', Magazine of Civil Engineering, 53, No. 1, 91-96 and 115-116 (2015).

206 Ovcharova N.

Numerical Methods for Nonmonotone Contact Problems in Continuum Mechanics

Ovcharova N.

nina.ovcharova@unibw.de

Universität der Bundeswehr München, Werner-Heisenberg-Weg 39, Neubiberg, $85577,\,\mathrm{Germany}$

We present several efficient numerical methods for non-convex, nonsmooth variational problems in non-monotone contact. Examples include non-monotone friction and adhesive contact problems, delamination and crack propagation in adhesive bonding of composite structures. A challenging problem is adhesive bonding in case of contamination. The nonsmoothness comes from the non-smooth data of the problems itself, in particular from non-monotone, multivalued physical laws involved in the boundary conditions. The variational formulation of the resulting boundary value problems leads to a class of non-smooth variational inequalities, the socalled hemivariational inequalities (HVIs). The latter maybe viewed as a first order condition of a non-convex, non-smooth minimization problem. These problems are much harder to analyze and solve than the classical variational inequality problems like Signorini contact or Tresca-frictional problems. The resulting HVI problem is first regularized and then discretized by either finite element or boundary element methods. In addition, we propose a novel regularized mixed formulation and provide a reliable a-posteriori error estimate enabling also hp-adaptivity. Another approach to solve nonsmooth variational problems is by the strategy: first discretize by finite elements, then optimize using finite dimensional non-smooth optimization methods. Various numerical experiments illustrate the behavior, the strength and the limitations of the proposed approximation schemes.

- [1] N. Ovcharova, "Coupling regularization and adaptive hp-BEM for the solution of a delamination problem Numerische Mathematik, in final revision (2016)
- [2] M. Dao, J. Gwinner, D. Noll, and N. Ovcharova, N, "Nonconvex bundle method with application to a delamination problem *Computational Optimization and Applications*, 65, No. 1, 173–203 (2016).
- [3] J. Gwinner, N. Ovcharova, "From solvability and approximation of variational inequalities to solution of nondifferentiable optimization problems in contact mechanics *Optimization*, 64, No. 8, 1683–1702 (2015).

An Approximate Solution of Elastic-Plastic Problem of Circular Strength Different (SD) Plates

Pavilaynen G., Yushin R.

g.pavilaynen@spbu.ru, djromen@gmail.com

Department of Mathematics and Mechanics Saint Petersburg State University Saint Petersburg, Tchebishevskaya street, h.21, ap.231, 198504; ALCATEL ONETOUCH Inc. Saint Petersburg, Russia, 199034

The study of a deformation features of metal alloys with anisotropy of plastic properties under biaxial stress state is an important technical challenge in the design and creation of a new shipbuilding and aircraft constructions. The study of alloys which are sensitive to tension or compression loading is complicated nonlinear problem. To solve this problems, the Mises-Hill's theory of plasticity and the Ilyushin's theory of perfect plasticity are used. The problem is solved analytically and numerically. As an example of the material with the SD-effect steel A40X is considered. The solutions for beam made of isotropic material and material with the SD-effect are compared. Such parameters introduction complicates the baseline ratio and construction of the solution, particularly for the study of elastic-plastic bending of a circular plates under the action of hydrostatic pressure. So it is necessary to assess the impact of these parameters for the solution and build an approximate solution for special cases.

The circle transversely isotropic plate made of a material with the SD effect was considered. The plate is freely supported and situated under the action of a uniform pressure.

The different yield criteria for transversely isotropic plates and plates with the SD effect were used in [1], [2]. Consider the problem of elastic-plastic bending of a round a freely supported SD-plate, having the properties of transverse anisotropy and uniformly loaded on the one of the surfaces. For the such problem solution the yield criterion was proposed at [3]:

$$\sqrt{\sigma_r^2 - A\sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2} = \sigma_p$$

Further, the mathematical model for Strength Different plates were complicated and was introduced at [4], [5] where the new yield criterion was proposed:

$$\sqrt{\sigma_r^2 - A\sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2} + \beta\sigma = \tilde{k}.$$

Here the β parameter was introduced, which is a effect SD characterizing property

$$\beta = 3\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_p} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_p} + 1\right)^{-1}$$

and \tilde{k} is

$$\tilde{k} = \frac{2\sigma_p \sigma_c}{\sigma_p + \sigma_c}$$

where σ_p is the yield stress in uniaxial tension in the plane of the plate and σ_c is limit strength under uniaxial compression in the plane of the plate. The formula for A is given by

$$A = 2 - \frac{(\sigma_{pz} + \sigma_{cz})^2}{(\sigma_p + \sigma_c)^2} \cdot \frac{\sigma_p^2 \sigma_c^2}{\sigma_{pz}^2 \sigma_{cz}^2}.$$

Here are σ_{pz} – tensile yield strength in the direction perpendicular to the plane of the plate; σ_{cz} BT6" compressive yield strength in the direction perpendicular to the plane of the plate.

Relations between stresses and strains containing the parameters of Different Strengths and plastic anisotropy was built. The influence of these parameters on the stress state of the plate and on the development of plastic areas in areas of compression and tension was investigated. The dependence of the deflection from the load was explored at the center of the plate to determine the properties of the plate during SD effect growth. An approximate formulas calculating the stresses in the center of the upper and lower plate plane were proposed in view of smallness of SD parameter. Letb The sturn to the analysis of the mutual influence of transverse isotropic effect and SD effect. In this case calculation formulas takes the form

$$\tilde{\sigma_{+}} = \frac{\sigma_p(\beta+3)}{3\sqrt{2-A}} \left(1 - \frac{2\beta}{3\sqrt{2-A}}\right);$$

$$\tilde{\sigma}_{-} = \frac{\sigma_p(\beta+3)}{3\sqrt{2-A}} \left(1 + \frac{2\beta}{3\sqrt{2-A}}\right).$$

Computation results are shown at the table 1.

Table 1.

β	A = 1.1	A = 1.1	A = 1.2	A = 1.2
	σ_{-}	σ_+	σ_{-}	σ_+
0.01	1.06496	1.0501	1.13098	1.11381
0.05	1.10973	1.0334	1.17793	1.09379
0.1	1.16523	1.01277	1.24163	1.06722
0.143	1.21539	0.9895	1.29513	1.04336
0.333	1.45314	0.92405	1.56056	0.90097
0.447	1.61184	0.82584	1.73861	0.75044

With increasing A stress also increases. With an increasing β the compressive stress is rising by 12% and the extensive stress is falling by 8%.

As a general conclusion of the calculations it is necessary to note that transversal isotropy and the effect of SD have a significant impact on the stress-strain state of a circular plate during elastic-plastic bending. The influence of SD parameter is added to the anisotropy parameter influence in the event of stress, which significant increase in the compression zone and decrease in tensile zone. As regards the study of deflection plates, the opposite effect of anisotropy parameters and Different Strengths must be concluded. Namely growth of the plastic anisotropy reduces the deflection of the plate in the center, and the Different Strengths growth increases deflection at the same value of applied hydrostatic load. Stress analysis of the exact formulas and the proposed approximate relations shows the permissibility of the use of the latter when Different Strengths parameter does not exceed crucial value 0.33 - 0.35, and greatly simplifies the calculation of stresses in the center of the plate.

- Rybakina O.G., Liquidity criterion for an anisotropic with SD effect material. Studies on Elasticity and plasticity, Vestn. Leningr. Univ., No. 14, 132–142 (1982)
- [2] Pavilaynen G.V., Elastic-plastic bending of the round transverse-isotropic plate, Vestn. Leningr. Univ., No. 13, 70-75. (In Russian) (1983)
- [3] Matveeva E.V., Pavilaynen G.V., The SD-effect of the materials by the bending of the plates, In Proceedings II Polyachov's Reading. Saint-Petersburg. In the Book of selected works, 294–304 (In Russian)(2000)
- [4] Pavilaynen G.V., Elasto-Plastic Deformations of Ribbed Plates. JCRM Proceedings and Lecture Notes. Amer.Math.Soc.Providence. R.I., Vol. 1, 291–294 (1993)
- [5] Pavilaynen G.V., Yushin R.Yu., Analysis of taking into account elastic transverse isotropy and plastic anisotropy while bending the round plates. *Vestn. S.-Petersb. Univ.*, Vol. 1, Ser. Mat., Mech., Astron., No. 1, 134BTo"-140 (2011)

Stability Analysis of Hybrid Mechanical Systems with Switched Nonlinear Nonhomogeneous Positional Forces

Александров А.Ю., Косов А.А.

а.u.aleksandrov@spbu.ru, aakosov@yandex.ru Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская набережная, д. 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия; Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия

Анализ устойчивости гибридных механических систем с переключающимися нелинейными неоднородными позиционными силами

Одним из важных классов негладких механических систем являются механические системы с переключениями. Система с переключениями — это гибридная динамическая система, состоящая из семейства подсистем и закона переключения, представляющего собой кусочно-постоянную функцию, которая определяет порядок функционирования подсистем [1, 2]. Такие системы встречаются в задачах управления механическими объектами со структурной реконфигурацией, отказами и восстановлениями датчиков или исполнительных органов [2, 3]. Наличие переключений существенно затрудняет решение задач анализа устойчивости и синтеза стабилизирующих управлений, поэтому актуальной проблемой является развитие теории управления для такого рода негладких механических систем [2].

Основным методом исследования систем с переключениями обычно выступает метод функций Ляпунова [1]. Однако следует заметить, что механические системы обладают специальной структурой, поэтому некоторые известные подходы к анализу и синтезу систем с переключениями оказываются неэффективными или даже неприменимыми к механическим системам [4]. В работах [4, 5] было показано, что в таких случаях для исследования динамики механических систем с переключениями может быть использован метод декомпозиции.

Метод декомпозиции заключается в разделении сложной системы на несколько более простых подсистем, изучении их по отдельности и обоснованном перенесении полученных результатов на исходную систему [6]. Он широко и эффективно применяется в теории устойчивости и управления. Основная идея используемого в статьях [4, 5] варианта метода декомпозиции состоит в замене исследования устойчивости одной системы дифференциальных уравнений второго порядка исследованием двух изолированных систем первого порядка. Такой подход был первоначально

разработан В.И. Зубовым и Д.Р. Меркиным для обоснования прецессионной теории гироскопов [7, 8].

В настоящей работе с помощью метода декомпозиции выводятся условия асимптотической устойчивости положений равновесия механических систем, находящихся под действием линейных гироскопических сил, нелинейных однородных диссипативных сил и переключающихся нелинейных неоднородных позиционных сил. Полученные результаты используются в задачах стабилизации нелинейных механических систем с переключениями.

Рассмотрим гибридную механическую систему

$$A\ddot{q} + B(\dot{q})\dot{q} + G\dot{q} + L^{(\sigma)}f(q) = 0 \tag{1}$$

и соответствующее семейство подсистем

$$A\ddot{q} + B(\dot{q})\dot{q} + G\dot{q} + L^{(s)}f(q) = 0, \quad s = 1, \dots, N.$$

Здесь q и $\dot{q}-n$ -мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей соответственно; $A,G,L^{(1)},\dots,L^{(N)}-$ постоянные матрицы, причем A- симметрическая и положительно определенная, а G- неособая кососимметрическая матрица; элементы матрицы $B(\dot{q})$ непрерывны при $\dot{q}\in\mathbb{R}^n$ и являются однородными порядка $\nu>0$ функциями; вектор-функция f(q) непрерывна при $\|q\|< H,\ 0< H\leqslant +\infty$ (здесь и всюду далее $\|\cdot\|-$ евклидова норма вектрора); закон переключения $\sigma(t)-$ кусочно-постоянная функция $\sigma=\sigma(t):[0,+\infty)\to S=\{1,\dots,N\}$, имеющая на каждом ограниченном промежутке конечное число точек разрыва.

Будем считать, что $f(q)=(f_1(q_1),\ldots,f_n(q_n))^T$, где скалярные функции $f_j(q_j)$ непрерывны при $|q_j|< H$ и удовлетворяют условиям секторного типа $q_jf_j(q_j)>0$ при $q_j\neq 0,\ j=1,\ldots,n$.

Замечание 1. Нелинейности такого типа широко применяются в системах автоматического регулирования [2, 6].

Кроме того, предположим, что функции $f_j(q_j)$ представимы в виде

$$f_j(q_j) = \beta_j q_j^{\mu_j} + g_j(q_j),$$

где β_j — положительные коэффициенты, $\mu_j>1$ — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, а $g_j(q_j)/q_j^{\mu_j}\to 0$ при $q_j\to 0$, $j=1,\dots,n$.

Таким образом, позиционные силы являются существенно нелинейными и неоднородными.

Замечание 2. Не умаляя общности, будем считать, что $\beta_j = 1, j = 1, \ldots, n, \ a \ \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n.$

У системы (1) существует положение равновесия $q=\dot{q}=0$. Исследуем условия, при выполнении которых это положение равновесия будет асимптотически устойчивым при любом допустимом законе переключения.

Положим $P^{(s)} = -G^{-1}L^{(s)}, s = 1, \dots, N.$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- a) $\nu + 1 < \mu_1$;
- б) функция $\dot{q}^T B(\dot{q}) \dot{q}$ положительно определена;
- в) у системы

$$\frac{\partial \psi(z)}{\partial z} A^{-1} G = B(z) z \tag{2}$$

существует решение в виде непрерывно дифференцируемой при $z \in \mathbb{R}^n$ однородной порядка $\nu + 1$ векторной функции $\psi(z)$;

r) существует диагональная положительно определенная матрица Λ такая, что матрицы

$$(P^{(s)})^T \Lambda + \Lambda P^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N,$$

отрицательно определены.

Тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво при любом допустимом законе переключения.

Замечание 3. Критерий существования однородного решения системы (2) установлен в работе [9].

Далее рассмотрим гибридную управляемую систему

$$A\ddot{q} + B(\dot{q})\dot{q} + L^{(\sigma)}f(q) = u. \tag{3}$$

Здесь u-n-мерный вектор управлений, а остальные обозначения те же, что и для системы (1).

Будем считать, что $\nu+1<\mu_1$, а функция $\dot{q}^TB(\dot{q})\dot{q}$ положительно определена.

Теорема 2. Пусть существует постоянная неособая кососимметрическая матрица G, для которой выполнено условие $\mathfrak s$) теоремы 1. Тогда положение равновесия $q=\dot q=0$ системы (3), замкнутой управлением

$$u = -G\dot{q} - hGf(q), \qquad h = \text{const} > 0,$$

при достаточно большом значении параметра h будет асимптотически устойчиво при любом допустимом законе переключения.

 Тогда положение равновесия $q=\dot{q}=0$ системы (3), замкнутой управлением

$$u = -G\dot{q}$$
,

будет асимптотически устойчиво при любом допустимом законе переключения

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №16-01-00587 и №17-01-00672.

ЛИТЕРАТУРА

- Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C., "Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems", SIAM Rev., 49, No. 4, 545-592 (2007).
- [2] Liberzon D., Switching in Systems and Control, Birkhauser, (2003).
- [3] DeCarlo R., Branicky M., Pettersson S., Lennartson B., "Perspectives and Results on the Stability and Stabilisability of Hybrid Systems", *Proc. IEEE.*, 88, 1069–1082 (2000).
- [4] Aleksandrov A.Yu., Chen Y., Kosov A.A., Zhang L. "Stability of Hybrid Mechanical Systems with Switching Linear Force Fields", Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 11, No. 1, 53–64 (2011).
- [5] Александров А.Ю., Косов А.А., Чэнь Я., "Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями", *Автоматика и телемеханика*, No. 6, 5–17 (2011).
- [6] Матросов В.М., Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем, Физматлит, (2001).
- [7] Зубов В.И., Аналитическая динамика гироскопических систем, Судостроение, (1970).
- [8] Меркин Д.Р., Гироскопические системы, Наука, (1974).
- [9] Александров А.Ю., Жабко А.П., Косов А.А., "Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных систем на основе декомпозиции", *Сибирский математический журнал*, 56, No. 6, 1215–1233 (2015).

Nonsmooth Problem of Stability for Elastic Rings Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н.

veran@list.ru, vntarasov@dm.komisc.ru

Коми НЦ УрО РАН, ул.Первомайская, 50, Сыктывкар, 167000, Россия

Негладкие задачи устойчивости упругих колец

1. Устойчивость стержня в упругой среде при жестких ограничениях на перемещения с граничными условиями свободного края

Рассмотрим задачу об устойчивости сжимаемого продольной силой стержня, прогибы которого с одной стороны ограничены жестким препятствием. Предполагается, что на одном конце стержня выполнены граничные условия жесткой заделки, на другом – граничные условия свободного края. Определение критической нагрузки сводится к определению силы P, при которой вариационная задача

$$\widetilde{J}(w) = \frac{1}{2} \int_{0}^{\ell} (Dw''^{2} + Cw^{2} - Pw'^{2}) dx \to \min_{w \in K}, \tag{1}$$

$$w(0) = 0, \ w'(0) = 0, \ w''(\ell) = 0, \ Dw'''(\ell) + Pw'(\ell) = 0, \ w(x) \geqslant 0, \quad x \in [0, \ell]$$
(2)

имеет нетривиальное решение. Здесь D>0 жесткость стержня на изгиб, C>0 жесткость винклеровского основания.

В (1)-(2) K- конус неотрицательных функций, определенных на интервале [0,l], имеющих обобщенную, суммируемую с квадратом вторую производную. Задача (1)-(2) допускает аналитическое решение. Можно показать, что решение задачи (1)-(2) можно искать среди функций $w(x)=0,\ x\in(0,\ell_1),$ и w(x)>0 $x\in(\ell_1,\ell]$ [1]. На интервале (ℓ_1,ℓ) выполнено уравнение Эйлера

$$w^{IV} + \omega w + \rho^2 w'' = 0, (3)$$

где $\omega=C/D,~\rho^2=P/D.$ В этом случае (3) является уравнением равновесия сжимаемого продольной силой стержня, находящегося в упругой среде. Заметим также, что (3) совпадает с уравнением равновесия цилиндрической оболочки, сжимаемой продольной силой в осесимметричном случае. В отличие от граничных условий жесткой заделки и граничных условий шарнирного опирания, при которых $\rho^2>2\sqrt{\omega}$, при данных граничных условиях $\rho^2<2\sqrt{\omega}$, и общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$w(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_3 e^{-\alpha x} \sin(\beta x) + c_4 e^{-\alpha x} \cos(\beta x),$$
(4)

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\omega} - \rho^2}, \ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\omega} + \rho^2}.$$
 (5)

Будем считать, что существует участок полного прилегания к стенке, т.е.

$$w(x) = 0, \ x \in [0, \ell_1], \ \text{if } w(x) > 0, \ x \in (\ell_1, \ell].$$
 (6)

Можно показать, что при $x = \ell_1 \ w'' = 0$, т.е. выполнены условия:

$$w = 0, w' = 0, w'' = 0$$
 при $x = \ell_1$. (7)

Таким образом, имеем две системы уравнений:

$$w(\ell_1) = 0, \ w'(\ell_1) = 0, \ w''(\ell) = 0, \ w'''(\ell) + \rho^2 w'(\ell) = 0,$$
 (8)

$$w(\ell_1) = 0, \ w''(\ell_1) = 0, \ w''(\ell) = 0, \ w'''(\ell) + \rho^2 w'(\ell) = 0.$$
 (9)

В (8) – (9) неизвестными являются переменные $c_1,...,c_4$, ℓ_1 и ρ^2 . Для существования нетривиального решения системы (8) – (9) необходимо, чтобы определители матрицы коэффициентов при $c_1,...,c_4$ были равны нулю. Подставляя (4) в (8) – (9), имеем систему двух нелинейных уравнений, из которой определяем ℓ_1 и ρ^2 . Результаты вычислений приведены в табл.1, где $\ell_2 = \ell - \ell_1$ — длина интервала, на котором w(x) > 0.

Таблица 1. Значения критической силы в зависимости от жесткости среды ω

N	ſ	1	2	3	4	5	6
μ	,	100	200	350	450	550	800
ℓ_2	2	0.745	0.627	0.545	0.512	0.487	0.443
ρ^2	2	12.6	17.8	23.5	26.7	29.5	35.6
ρ	2 *	11.9	15.6	19.5	21.8	23.8	28.5

В таблице 1 значения ρ^2 соответствуют критической нагрузке стержня при наличии односторонних ограничений на перемещения при различной жесткости среды ω . Для сравнения в последней строке приведены значения критической силы ρ_*^2 для стержня, находящегося в упругой среде, при отсутствии односторонних ограничений на перемещения.

2. Устойчивость колец с односторонним подкреплением

Рассмотрим задачу устойчивости упругих колец, нагруженных равномерно распределенным по ободу внешним давлением, подкрепленных упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий.

Пусть один конец нити прикреплен к неподвижному центру кольца, другой – к некоторой точке кольца. Предположим, что нить является нерастяжимой, то есть в результате деформации расстояние между центром кольца и точкой прикрепления не может увеличиваться. Обозначим через ϑ – центральный угол, $w(\vartheta)$ – радиальное перемещение точек кольца. Наконец, предположим, что нити расположены так часто, что их можно считать непрерывно распределенными по кольцу.

Тогда задача на устойчивость сводится к отысканию таких значений силы P, при которых вариационная проблема

$$J(w) = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta - \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - bw^2) d\vartheta \to \min_w$$
 (10)

имеет нетривиальное решение при граничных условиях периодичности и ограничениях

$$w(\vartheta) \leqslant 0. \tag{11}$$

Здесь В – жесткость на изгиб в плоскости кольца, R – радиус кольца. Первый интеграл в (10) представляет собой упругую энергию, второй – работу внешних сил.

При расчете колец на устойчивость важно учитывать поведение нагрузки после деформации. Если нагрузка направлена против нормали к деформированному кольцу, то в (10) следует положить b=1 (сила нормального давления).

Если же сила направлена все время к неподвижному центру кольца, то в (10) b=2 (случай центральных сил). Выпишем уравнение Эйлера для функционала (10):

$$w^{IV} + (2+k^2)w'' + (1+bk^2)w = 0, (12)$$

где $k^2 = \frac{PR^3}{B}$. При b=1 (случай нормальной нагрузки) функция прогиба представима в виде

$$w = A_1 \sin \vartheta + A_2 \cos \vartheta + A_3 \sin \alpha \vartheta + A_4 \cos \alpha \vartheta, \ \alpha = \sqrt{1 + k^2}.$$
 (13)

Зафиксируем некоторый угол $\beta>0.$ Будем считать, что, как и в случае стержней,

$$w(\vartheta) < 0, \ \vartheta \in (0,\beta)$$
 и $w(\vartheta) \equiv 0, \ \vartheta \in (\beta,2\pi).$

Первая производная $w'(\vartheta)$ должна быть непрерывной при $\vartheta \in (0, 2\pi)$, тогда функция w удовлетворяет граничным условиям

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\beta) = 0, \quad w'(\beta) = 0.$$
 (14)

Подставляя (13) в (14), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases}
A_{2} + A_{4} = 0, \\
A_{1} + \alpha A_{3} = 0, \\
A_{1} \sin \beta + A_{2} \cos \beta + A_{3} \sin(\alpha \beta) + A_{4} \cos(\alpha \beta) = 0, \\
A_{1} \cos \beta - A_{2} \sin \beta + \alpha A_{3} \cos(\alpha \beta) - \alpha A_{4} \sin(\alpha \beta) = 0.
\end{cases}$$
(15)

После упрощения, имеем

$$\begin{cases} A_3(\sin(\alpha\beta) - \alpha\sin\beta) + A_4(\cos(\alpha\beta) - \cos\beta) = 0, \\ A_3(\alpha\cos(\alpha\beta) - \alpha\cos\beta) + A_4(\sin\beta - \alpha\sin(\alpha\beta)) = 0. \end{cases}$$
 (16)

Система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, то есть

$$d(\alpha) = -2\alpha\cos(\alpha\beta)\cos\beta + 2\alpha - \sin(\alpha\beta)\sin\beta - \alpha^2\sin(\alpha\beta)\sin\beta = 0.$$
 (17)

Решая уравнение (17) относительно неизвестной α , получим функцию $\alpha=\alpha(\beta)$. При заданном β уравнение имеет бесконечное число корней. Очевидно, что $\alpha=1$ является корнем уравнения при любом β . Заметим, что $\alpha=1$ соответствует сила P, равная нулю. Далее, находим форму прогиба по формулам (13). Несложно убедиться, что формула (13) при $\alpha=1$ дает перемещение кольца как жесткого целого. Следовательно, надо находить минимальный корень уравнения (17), удовлетворяющий условию $\alpha>1$. Также необходимо выполнение знаковых ограничений (11). Чем больше угол β , тем меньше k^2 , а значит и сила P. Значения критического параметра P в зависимости от значений угла β приведены в таблице 2.

Таблица 2. Значения критического параметра α в зависимости от угла β

		J ,			
β	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
α	4.9801	4.2915	3.2136	3	2.4841

Численные эксперименты при $\beta > \pi$ показали, что график функции прогиба w будет менять знак на интервале $(0,\beta)$, то есть ограничения (11) на функцию w(x) не будут выполняться. Значит $\beta = \pi, \ k^2 = 3$, что соответствует критическому давлению $P = \frac{8B}{R^3}$. Заметим, что для неподкрепленного кольца критическая сила определяется формулой $P = \frac{3B}{B^3}$.

Рассмотрим случай центральных сил (в уравнении (12) следует положить b=2.) Общее решение уравнения (12) имеет вид [2]:

$$w = A_1 \sin(\alpha_1 \vartheta) + A_2 \cos(\alpha_1 \vartheta) + A_3 \sin(\alpha_2 \vartheta) + A_4 \cos(\alpha_2 \vartheta),$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{2 + k^2 + \sqrt{k^4 - 4k^2}}, \ \alpha_2 = \sqrt{2 + k^2 - \sqrt{k^4 - 4k^2}}.$$

Далее, используя граничные условия (14), получаем систему однородных линейных уравнений относительно произвольных постоянных A_1,A_2,A_3,A_4 . Приравнивая определитель этой системы к нулю, получаем уравнение на нагрузку k^2 (k^2 зависит от угла β). Как и выше, исследуя графики функции прогиба $w(\vartheta)$, находим, что максимальный угол β , при котором w сохраняет знак будет равен: $\beta=0.6976\pi$, что соответствует критическому параметру $k^2=18.6036$, P=

 Γ Бильченко Γ

 $\frac{18.6036B}{R^3}.$ Заметим, что для неподкрепленного кольца критическая нагрузка $P=\frac{4.5B}{R^3}.$

Следует отметить, что в случаях как нормальной, так центральной нагрузки выполняются условия: $w''(0) = w''(\beta) = 0$, т.е. вторая производная $w''(\vartheta)$ является непрерывной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тарасов В.Н., Методы оптимизации в исследовании конструктивнонелинейных задач механики упругих систем, Коми научный центр УрО РАН, (2013).
- [2] Андрюкова В.Ю., "Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения", Вычислительная механика сплошных сред, Институт механики сплошных сред УрО РАН, №4, 412–422 (2014).

The Influence of Mobile Load on the Carrier Dynamics $Eunsuenko \Gamma.\Gamma.$

ggbil40@gmail.com

КНИТУ – КАИ им. А. Н. Туполева, К. Маркса, 10, г. Казань, 420111, Россия

Влияние подвижного груза на динамику носителя

Введение. Рассматривается механическая система, состоящая из носителя и груза, совершающего заданное движение по отношению к носителю. Для модели сил сопротивления среды типа кулонова трения изучается влияние параметров системы и среды на движение носителя из состояния покоя, вызванное подвижным грузом.

1. Дифференциальные уравнения движения носителя.

1.1. Рассматривается движение механической системы, состоящей из носителя и груза. Носитель, располагаясь всё время в горизонтальной плоскости, двигается поступательно по прямолинейной траектории. Носитель имеет прямолинейный канал, по которому может перемещаться груз. При этом ось канала располагается в вертикальной плоскости, проходящей через траекторию носителя. Пусть Oxyz – неподвижная система координат, которая является инерциальной системой отсчёта, при этом Oxy – горизонтальная плоскость, а Oz – местная вертикаль; $O_1x_1y_1z_1$ — подвижная система координат, скреплённая с носителем, которая двигается поступательно по отношению к Oxyz; $O_2x_2y_2z_2$ — подвижная система координат, скреплённая с каналом, при этом $O_2x_2z_2$ является вертикальной плоскостью, в которой лежит траектория движения носителя, совпадающая с O_1x ; $\varphi \in [0; \pi/2)$ — угол установки канала; $C_{\rm H}$ — центр масс

носителя; $C_{\rm r}$ – центр масс груза, который в дальнейшем рассматривается, как материальная точка. Тогда

$$x_{C_{\rm H}} = x + x_{1,C_{\rm H}}, \quad z_{C_{\rm H}} = z_{1,C_{\rm H}},$$

$$x_{C_\Gamma} = x + x_{1,O_2} + x_2 \cdot \cos\varphi \,, \quad z_{C_\Gamma} = z_{1,O_2} + x_2 \cdot \sin\varphi \,, \label{eq:constraint}$$

где $x_{1,C_{\rm H}}=const,~z_{1,C_{\rm H}}=const,~x_{1,O_2}=const,~z_{1,O_2}=const,~\varphi=const,~x_2=x_2(t).$

Для вывода дифференциального уравнения движения носителя воспользуемся теоремой о движении центра масс, которая для рассматриваемой системы будет иметь вид

$$(M+m) \cdot \mathbf{a}_C = \mathbf{P}_{H} + \mathbf{P}_{\Gamma} + \mathbf{N} + \mathbf{R}(\mathbf{V}_{H}), \qquad (1)$$

где M — масса носителя; m — масса груза; \mathbf{a}_C — ускорение центра масс системы в Oxyz; $\mathbf{P}_{\scriptscriptstyle \mathrm{H}}$ — вес носителя; $\mathbf{P}_{\scriptscriptstyle \Gamma}$ — вес груза; \mathbf{N} — нормальная реакция подстилающей горизонтальной плоскости; $\mathbf{R}(\mathbf{V}_{\scriptscriptstyle \mathrm{H}})$ — сила сопротивления среды движению носителя; $\mathbf{V}_{\scriptscriptstyle \mathrm{H}}$ — абсолютная скорость носителя.

Так как $(M+m) \cdot x_C = M \cdot (x+x_{1,C_{\mathbf{H}}}) + m \cdot (x+x_{1,O_2} + x_2 \cdot \cos \varphi)$, то

$$(M+m) \cdot \ddot{x}_C = (M+m) \cdot \ddot{x} + m \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{x}_2, \qquad (2)$$

Пусть закон движения груза в канале задан в виде

$$x_2(t) = l \cdot \sin(\omega t) \tag{3}$$

где $l=const,\,\omega=const>0.$ Обозначим $T=2\pi/\omega$ – период колебаний груза.

Проектируя (1) на ось Ox, учитывая (2) и (3), получим

$$(M+m) \cdot \ddot{x} = R_x(\dot{x}) + m \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos \varphi. \tag{4}$$

Таким образом, (4) является дифференциальным уравнением движений носителя вдоль оси Ox с грузом в канале, перемещающимся по заданному закону (3).

Пусть силы сопротивления среды движению носителя являются силами типа кулонова трения. При этом величина силы трения в движении $F_{\rm rp} \equiv |R_x(\dot{x})| = f \cdot |\mathbf{N}|$, где $|\mathbf{N}|$ – величина нормальной реакции; f – коэффициент трения *скольжения в движении* для пары носитель-среда.

Так как
$$(M+m) \cdot z_C = M \cdot z_{C_H} + m \cdot z_{C_\Gamma}$$
, то

$$(M+m) \cdot \ddot{z}_C = m \cdot \ddot{x}_2 \cdot \sin \varphi \,. \tag{5}$$

Проектируя (1) на ось Oz, учитывая (5) и (3), найдём, что $N(t)=P_{\text{H}}+P_{\text{F}}-m\cdot l\cdot \omega^2\cdot \sin(\omega t)\cdot \sin\varphi$. Потребуем, чтобы N(t)>0 для $\forall t$, то есть $m\cdot l\cdot \omega^2\cdot \sin(\omega t)\cdot \sin\varphi< P_{\text{H}}+P_{\text{F}}$. Выполнение неравенства

$$m \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi < g \cdot (M+m) \tag{6}$$

означает, что носитель будет двигаться, не отрываясь от плоскости Oxy и N(t)>0.

Тогда дифференциальные уравнения движения носителя (ДУДН) будут следующими

$$\ddot{x} = \beta \cdot (\cos \varphi + f \cdot \sin \varphi) \cdot \sin(\omega t) - \gamma \quad \text{при} \quad \dot{x} > 0, \tag{7}$$

$$\ddot{x} = \beta \cdot (\cos \varphi - f \cdot \sin \varphi) \cdot \sin(\omega t) + \gamma \quad \text{при} \quad \dot{x} < 0, \tag{8}$$

где $\beta = l \cdot \omega^2 \cdot m/(M+m), \ \gamma = g \cdot f.$ Дифференциальные уравнения (7), (8) дополняются уравнением

$$\ddot{x} = 0, \tag{9}$$

которое имеет место для интервалов покоя, когда $\dot{x}=0$, а трение скольжения в покое компенсирует воздействие груза на носитель. Таким образом, (7)–(9) являются ДУДН при заданном в виде (3) законе движения груза в канале в рамках принятой модели сил сопротивления среды движению носителя типа кулонова трения. При анализе динамики этой системы учитывалось, что сила трения в покое направлена в сторону обратную предполагаемому движению носителя, т.е. она противоположна по знаку $(-\sin(\omega t))$, и не превышает величины силы трения скольжения в движении.

При горизонтальном положении канала, то есть при $\varphi=0$, ДУДН (7) и (8) будут иметь вид

$$\ddot{x} = \beta \cdot \sin(\omega t) - \gamma$$
 при $\dot{x} > 0$,

$$\ddot{x} = \beta \cdot \sin(\omega t) + \gamma$$
 при $\dot{x} < 0$.

1.2. В работах Ф. Л. Черноусько, Н. Н. Болотника, Т. Ю. Фигуриной [1–5] и других авторов обычно отыскивается движение груза, сообщающего требуемое движение носителю. В данной работе ставится обратная задача — определить движение носителя для начальных условий (НУ)

$$x(t_0) = 0$$
 и $\dot{x}(t_0) = 0$, (10)

где $t_0 = 0$, при заданном в виде (3) законе движения груза. Задача об определении влияния движения груза на динамику носителя рассматривалась в [6] при ином движении груза.

2. Динамика носителя с подвижным грузом. Пусть заданы значения параметров системы носитель+груз: $m, M, l, \omega, \varphi, f$, и эти параметры таковы, что выполняется (6) – условие безотрывного от плоскости Oxy движения носителя. Определим движение носителя при НУ (10).

2.1. Введём $\psi_{\pm} = \cos \varphi \pm f \cdot \sin \varphi$ и $\Gamma_{\pm} = \beta \cdot \psi_{\pm}$.

Необходимым условием движения носителя из состояния покоя в **положительном** направлении оси Ox будет $\gamma < \Gamma_+$. В этом случае введём $B_+ = \gamma/\psi_+$ и $\tau_+ = \arcsin(B_+/\beta)/\omega$.

Необходимым условием движения носителя из состояния покоя в **отрицательном** направлении оси Ox будет $\gamma < \Gamma_-$. В этом случае введём $B_- = \gamma/\psi_-$ и $\tau_- = \arcsin(B_-/\beta)/\omega$.

Движение носителя будет вполне определено, если будет установлена последовательность временных интервалов интегрирования, на каждом из которых справедливо конкретное ДУДН из (7)–(9), и определены границы этих интервалов. Так как на границах каждого интервала значения \dot{x} равны нулю, то значения x, вычисленные на правой границе каждого из этих интервалов, входят в НУ для следующего интервала. НУ для первого интервала $[t_0;t_1]$ являются (10). Поскольку на $[t_0;t_1]$ трение покоя компенсирует воздействие груза, то он является интервалом покоя с ДУДН вида (9). Если $\gamma < \Gamma_+$, то граница $t_1 = \tau_+$. Как показывает анализ, в рассматриваемой системе носитель+груз возможны движения носителя (ДН) только двух типов.

2.2. ДН типа R реализуются в системе только тогда, когда $\ddot{x}(t)$ имеет **регулярный** характер, то есть когда у $\ddot{x}(t)$ будут неизменными моменты переключения от одного вида ДУДН к другому в пределах каждого из нечётных полупериодов движения груза, начиная с третьего, и одинаковыми моменты переключения в пределах всех чётных полупериодов движения груза в канале. ДН типа R могут иметь интервалы покоя на каждом из полупериодов движения груза.

Установлено, что для ДН типа R кроме состояния покоя R0 существуют только пять различных нетривиальных последовательностей R1 – R5 чередования ДУДН:

```
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline R0 & \text{при} & \Gamma_{+} \leqslant \gamma \\ R1 & \text{при} & \Gamma_{-} \leqslant \gamma < \Gamma_{+} \\ R2 & \text{при} & \gamma < \Gamma_{-} & \text{и} & \beta < \min\{\beta_{1}, \beta_{2}\} \\ R3 & \text{при} & \gamma < \Gamma_{-} & \text{и} & \beta_{1} \leqslant \beta < \beta_{2} \\ R4 & \text{при} & \gamma < \Gamma_{-} & \text{u} & \beta_{2} \leqslant \beta < \beta_{1} \\ R5 & \text{при} & \gamma < \Gamma_{-} & \text{u} & \beta = \beta_{1} = \beta_{2} \\ \hline \end{array}
```

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline R0 & t_0 \xrightarrow{9} \infty \\ R1 & t_0 \xrightarrow{9} t_1 \xrightarrow{7} t_2 \xrightarrow{9} \mathbf{t_3} \xrightarrow{7} t_4 \xrightarrow{9} \mathbf{t_5} \xrightarrow{7} \dots \\ R2 & t_0 \xrightarrow{9} t_1 \xrightarrow{7} t_2 \xrightarrow{9} t_2' \xrightarrow{8} t_3 \xrightarrow{9} \mathbf{t_3'} \xrightarrow{7} t_4 \xrightarrow{9} t_4' \xrightarrow{8} t_5 \xrightarrow{9} \mathbf{t_5'} \xrightarrow{7} \dots \\ R3 & t_0 \xrightarrow{9} t_1 \xrightarrow{7} t_2 = t_2' \xrightarrow{8} t_3 \xrightarrow{9} \mathbf{t_3'} \xrightarrow{7} t_4 = t_4' \xrightarrow{8} t_5 \xrightarrow{9} \mathbf{t_5'} \xrightarrow{7} \dots \\ R4 & t_0 \xrightarrow{9} t_1 \xrightarrow{7} t_2 \xrightarrow{9} t_2' \xrightarrow{8} t_3 = \mathbf{t_3'} \xrightarrow{7} t_4 \xrightarrow{9} t_4' \xrightarrow{8} t_5 = \mathbf{t_5'} \xrightarrow{7} \dots \\ R5 & t_0 \xrightarrow{9} t_1 \xrightarrow{7} t_2 = t_2' \xrightarrow{8} t_3 = \mathbf{t_3'} \xrightarrow{7} t_4 = t_4' \xrightarrow{8} t_5 = \mathbf{t_5'} \xrightarrow{7} \dots \\ \end{array}$$

где β_1 и β_2 – корни уравнений

$$\sqrt{\beta_1^2 - B_-^2} + \sqrt{\beta_1^2 - B_+^2} = B_+ \cdot (\pi + \arcsin(B_-/\beta_1) - \arcsin(B_+/\beta_1)),$$

$$\sqrt{\beta_2^2 - B_-^2} + \sqrt{\beta_2^2 - B_+^2} = B_- \cdot (\pi + \arcsin(B_+/\beta_2) - \arcsin(B_-/\beta_2)).$$

Если носитель движется по типу R, то достаточно рассмотреть его движение на основном интервале $[\tau_+; T+\tau_+]$, чтобы построить его полный фазовый портрет.

При $\varphi = 0$ для ДН типа R имеется только два нетривиальных чередования ДУДН: R2, R5. Для $\gamma < \beta$ найдём $\beta_0 = \gamma \cdot \sqrt{\pi^2 + 4}/2$. Случай $\beta < \beta_0$ соответствует R2, а $\beta = \beta_0$ соответствует R5.

Таким образом, для случая движения носителя по типу R определены интервалы интегрирования и соответствующие им ДУДН.

2.3. ДН типа NR возникают тогда, когда $\ddot{x}(t)$ имеет **нерегулярный** характер с различными моментами переключения в каждом из полупериодов движения груза. В отличие от движений типа R при движениях типа NR отсутствуют интервалы покоя, кроме $[t_0;t_1]$, а в k-ом полупериоде движения груза имеется только один момент переключения θ_k .

Если параметры системы таковы, что $\gamma < \Gamma_-$ и $\max\{\beta_1; \beta_2\} < \beta$, то носитель совершает движение по типу NR. Для $\varphi = 0$ носитель совершает движение по типу NR при $\beta_0 < \beta$.

Истинные моменты переключения t_k связаны с относительными θ_k очевидным образом $t_k=\theta_k+(k-1)\cdot T/2,\,k=1,2,\ldots$, при этом $t_1=\theta_1=\tau_+=\arcsin(B_+/\beta)/\omega$.

Относительные моменты переключения θ_k находятся последовательно из уравнений

$$\cos(\omega \theta_{k+1}) + \cos(\omega \theta_k) = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\pi + \omega \theta_{k+1} - \omega \theta_k}{(\cos \varphi + (-1)^{k+1} \cdot f \sin \varphi)}, \quad k = 1, 2, \dots$$
 (11)

При $\varphi = 0$ эти уравнения примут вид $\cos(\omega \theta_{k+1}) + \cos(\omega \theta_k) = (\gamma/\beta) \cdot (\pi + \omega \theta_{k+1} - \omega \theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$

Решая уравнения (11), найдём $\theta_2, \theta_3, \ldots$ и, соответственно, t_2, t_3, \ldots , то есть определим последовательность интервалов интегрирования $[t_k; t_{k+1}], k = 1, 2, \ldots$

При этом на интервале $[t_k; t_{k+1}]$ в качестве ДУДН будет

$$\ddot{x} = \beta \cdot (\cos \varphi + (-1)^{k+1} \cdot f \cdot \sin \varphi) \cdot \sin(\omega t) + \gamma \cdot (-1)^k$$
, где $k = 1, 2, \dots$

Таким образом, и для случая движения носителя по типу NR определены интервалы интегрирования и соответствующие им ДУДН.

Последовательность θ_k , получаемая в результате решения уравнений (11), содержит две подпоследовательности: $\theta_1, \theta_3, \ldots, \theta_{2k-1}, \ldots$, которая является возрастающей, и $\theta_2, \theta_4, \ldots, \theta_{2k}, \ldots$, которая является убывающей. Показано, что пределы этих подпоследовательностей таковы:

$$\theta_* = \frac{1}{\omega} \cdot \left(\arccos\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{\cos \delta}\right) - \delta \right),$$

$$\theta^* = \frac{1}{\omega} \cdot \left(\arccos\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{\cos \delta}\right) + \delta \right),$$

где $\delta=(\pi\cdot f\cdot \operatorname{tg}\varphi)/2$. При $\varphi=0$ эти подпоследовательности имеют один предел

$$\theta^* = \theta_* = \theta_\infty = \frac{1}{\omega} \cdot \arccos\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Вычислительные эксперименты. Для ряда случаев ДН типа R и для ДН типа NR приводятся результаты математического моделирования. Построены соответствующие фазовые портреты.

- [1] Черноусько Ф. Л., "О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу", Докл. Академии $Hay\kappa$, Т. 405, No. 1, 56–60 (2005).
- [2] Черноусько Ф. Л., "Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы", *Прикладная математика* и механика, Т. 70, Вып. 6, 915–941 (2006).
- [3] Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю., "Оптимальное управление прямолинейным движением твёрдого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс", *Прикладная математика и механика*, Т. 72, Вып. 2, 216–229 (2008).
- [4] Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., "Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел", Труды Института Математики и Механики УрО РАН, Т. 16, No. 5, 212–222 (2010).

- [5] Болотник Н. Н., Зейдис И. М., Циммерманн К., Яцун С. Ф., "Динамика управляемых движений вибрационных систем", Изв. РАН. Теория и системы управления, Т. 70, No. 5, 157–167 (2006).
- [6] Бардин Б. С., Панёв А. С., "О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности", Электронный экурнал «Труды МАИ», No. 84 (2015). [http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=62995] (дата обращения 02.02.2017)

On the One-Dimensional and Two-Dimensional Inverse Problems of Heat and Mass Transfer on Hypersonic Aircraft Permeable Surfaces

Бильченко Г.Г., Бильченко Н.Г.

ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

КНИТУ – КАИ им. А. Н. Туполева, К. Маркса, 10, г. Казань, 420111, Россия

Об одномерных и двумерных обратных задачах тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов

- 1. Одномерные обратные задачи. Для случая кусочно-линейного вдува одномерные обратные задачи (ОЗ) тепломассообмена на проницаемых поверхностях (боковая поверхность кругового цилиндра и поверхность сферического носка) гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) для тропо-, страто- и нижних слоёв мезосферы (10–30 [км]) были рассмотрены в [1].
- **2.** Обратные по вдуву задачи тепломассообмена. Приведём по [2] постановку ОЗ по управлению $\epsilon \partial y \epsilon y \ m(x)$ в ламинарный пограничный слой (ПС), где $x \in X = [0;1]$ (ось x направлена вдоль контура тела). Пусть заданы: 1) сетка управления $X_1\colon x_0^\wedge = 0 < x_1^\wedge < \ldots < x_{n_1}^\wedge = 1;$ 2) сетка наблюдения $X_2\colon x_0^\vee = 0 < x_1^\vee < \ldots < x_{n_2}^\vee = 1;$ 3) непрерывное управление $s(x) = \sigma B_0^2(x)$ магнитное поле (МП). Тогда при непрерывно-дифференцируемом управлении температурном факторе (ТФ) $\tau(x) = T_w(x)/T_{e_0}$ (где $T_w(x)$ температура стенки, а T_{e_0} температура в точке торможения (ТТ) потока) и ограничениях $I_{j,k}^m = [b_{j,k}^m; t_{j,k}^m], j = 1, \ldots, n_1, k = 0, \ldots, \nu_1^m, \nu_1^m \geqslant 0$, для «контрольных» значений локального теплового потока (ТП) $q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0,\ldots,n_2}$ требуется найти непрерывное на X управление m^\sim , задаваемое [3] элементами $m^\sim(x) = m_j^\sim(x)$ для $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], j = 1, \ldots, n_1$, удовлетворяющими условиям

$$(m^{\sim})^{(k)}(x) \in I_{j,k}^m$$
 для $x \in [x_{j-1}^{\wedge}; x_j^{\wedge}], \quad k = 0, \dots, \nu_1^m,$ (1)

такое, что вычисленные [4-6] на X_2 значения $q^{\sim}=(q_j^{\sim})_{j=0,\dots,n_2}$, где $q_i^{\sim}=q(x_i^{\vee};m^{\sim},\tau,s)$, должны быть близкими к q^{\vee} , т.е.

$$q^{\vee} \to m^{\sim}$$
 , $(m^{\sim}, \tau, s) \to (q^{\sim} \approx q^{\vee}, f^{\sim})$, (2)

где $f^{\sim}=(f_j^{\sim})_{j=0,\dots,n_2}\,,\;f_j^{\sim}=f(x_j^{\vee};m^{\sim},\tau,s).$ Если вместо q^{\vee} задать «контрольные» значения локального напряжения трения (HT) $f^{\vee}=(f_j^{\vee})_{j=0,\dots,n_2}\,,$ то ОЗ по m для HT будет иметь вид:

$$f^{\vee} \to m^{\sim}$$
 , $(m^{\sim}, \tau, s) \to (q^{\sim}, f^{\sim} \approx f^{\vee})$. (3)

Замечания. 1) Элементы $m_j^\sim(x)$ управления будем искать в виде полинома степени $\deg(m_j^\sim)=\mu\geqslant\nu_1+1,$ а всё m^\sim будем строить в классе кусочно-полиномиальных функций с точками стыка в узлах $X_1.$ В работе [1] приведены постановки ОЗ для кусочно-линейного $(\mu=1)$ случая. Для установления условий однозначной разрешимости задачи в [1] были рассмотрены случаи вида: а) $X_1=X_2;$ b) $X_1\supseteq X_2$ при $X_1\neq X_2;$ c) $X_1\subseteq X_2$ при $X_1\neq X_2.$

- 2) Пусть $\mu \geqslant \nu_1 + 1$ и $X_1 \subseteq X_2$. Предполагая для простоты, что все множества $X_{1,j}^+ = (X_2 \setminus X_1) \cap [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \ j=1,\dots,n_1$, содержат одинаковое количество $\nu_2 \geqslant 0$ точек, можно считать, что $X_{1,j}^+ = (x_{j,k}^+)_{k=1,\dots,\nu_2}$ дополнительные сетки (при $\nu_2 = 0$ они пусты). В зависимости от соотношения между μ и ν_2 задача будет однозначно определённой, недо- или переопределённой, что влечёт разные возможности для введения условий близости [1, 2] наборов q^\sim (или f^\sim) и q^\vee (или f^\vee).
- 3. Аппроксимационная и интерполяционная постановки. Введём

$$R_{\infty}\left(q^{\sim};q^{\vee}\right) = \max_{j=0,\dots,n_{2}}\left|q_{j}^{\sim}-q_{j}^{\vee}\right|\;,\quad R_{p}\left(q^{\sim};q^{\vee}\right) = \left(\sum\nolimits_{j=0}^{n_{2}}\left|q_{j}^{\sim}-q_{j}^{\vee}\right|^{p}\right)^{1/p}$$
при $p\in\left[1;+\infty\right)$.

Постановка ОЗ (2), (1) называется [1, 2] интерполяционной (ИПОЗ), если для малого $\varepsilon_1 > 0$ требуется найти такое m^{\sim} , что значения q^{\sim} совпадают с q^{\vee} с точностью ε_1 :

$$R_{\infty}\left(q^{\sim};q^{\vee}\right)\leqslant\varepsilon_{1}$$
 (4)

При реализации на ЭВМ для существования решения ИПОЗ необходимо, чтобы $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_{\min}$, где ε_{\min} зависит от способа представления вещественных чисел и применяемых численных методов.

Постановка ОЗ (2), (1) называется [1, 2] аппроксимационной (АПОЗ), если для $p \in [1; +\infty]$ требуется отыскать (m^{\sim}, q^{\sim}) , где m^{\sim} является приближённым решением экстремальной задачи

$$R_n^*(q^{\vee}) = \inf_{m^{\sim}} R_p(q^{\sim}; q^{\vee}) . \tag{5}$$

Определения ИПОЗ и АПОЗ для (3), (1) – аналогичны (4) и (5).

- 4. Вычислительные эксперименты по восстановлению вдува. Приведены два примера восстановления вдува как по значениям локального ТП q^\vee , так и по значениям локального НТ f^\vee . Для удобства сравнения с [5 – 7] зафиксированы значения неизменяемых параметров: число Маха $M_{\infty} = 10 \in [10; 40]$, высота полёта $H = 10 \in [10; 30]$ [км], радиус тела $R = 0,1 \in [0,1;1]$ [м]. Диапазоны изменения управляющих параметров ограничены [2]: $m(x) \in [0, 1], \tau(x) \in [0, 15, 0, 9], s(x) \in [0, 5 \cdot 10^4]$ [Тл/Ом·м]. С помощью программы, реализующей прямую задачу [4-7], продолжая исследования [8 – 10] о влиянии ТФ на ПС и на восстановление вдува, были получены последовательности значений q_{dir} и f_{dir} для законов вдувов m_{dir} , обобщающих рассмотренные в [7], при различных постоянных законах $\tau_{dir} \in \{0.15; 0.20; \dots; 0.90\}$ и МП $s_{dir} \equiv 0$. К $q^{\vee} = q_{dir}$ и к $f^{\vee}=f_{dir}$ была применена процедура решения ИПОЗ для вдува при различных постоянных законах ТФ $au_{inv} \in \{0.15; 0.20; \dots; 0.90\}$ и МП $s_{inv} \equiv 0$, с ограничением $m^{\sim}(x) \in I^m = [b;t]$, где $0 \leqslant b_{j,0} \leqslant t_{j,0} \leqslant 1$ для $x \in [x_{i-1}^{\wedge}; x_i^{\wedge}], j = 1, \dots, n_1$. Установлены предельные значения τ_{inv}^* , при которых построение вдува возможно, а также зависимости $\tau_{inv}^*(b,t;\tau_{dir})$.
- **4.1.** К q_{dir} и f_{dir} , полученным для **постоянного вдува** $m_{dir} \equiv 0.3$ при $\tau_{dir} \equiv 0.25$, была применена процедура решения ИПОЗ для вдува при различных постоянных законах $\tau_{inv} \in \{0.15; 0.20; \dots; 0.90\}$. Для ограничения $b_{j,0} = 0$ при $\tau_{inv} > \tau_{inv}^*$, где $\tau_{inv}^{*,cyl} = 0.465$ и $\tau_{inv}^{*,sph} = 0.534$, построение по ТП невозможно. Аналогично, для ограничения $t_{j,0} = 1$ при $\tau_{inv} > \tau_{inv}^*$, где $\tau_{inv}^{*,cyl} = 0.755$ и $\tau_{inv}^{*,sph} = 0.858$, невозможно построение по НТ.
- **4.2.** К q_{dir} и f_{dir} , полученным для закона «вертикальная трапеция» (параметры из таблицы 6 для кривых 8 на рис. 4 и 5 из [7], $\tau_{dir} \equiv 0.25$) $m_{dir}(x;m_0,m_1) = m_0 \cdot (1-x) + m_1 \cdot x$ при $m_0 = 0$, $m_1^{cyl} = 0.3996$, $m_1^{sph} = 0.3664$, была применена процедура решения ИПОЗ для вдува при $\tau_{inv} \in \{0.15;0.20;\dots;0.90\}$. При ограничении $b_{j,0} = 0$ построение невозможно при $\tau_{inv} > \tau_{inv}^* = 0.25$ для восстановления по ТП, а при $\tau_{inv} < \tau_{inv}^* = 0.25$ по НТ. Ограничение $t_{j,0} = 1$ при построении по НТ достигается при $\tau > \tau_{inv}^*$, где $\tau_{inv}^{*,cyl} = 0.67$ и $\tau_{inv}^{*,sph} = 0.79$.
- 5. Допустимые формы локальных тепловых потоков и напряжений трения. Отмечено различие в характере чувствительности q и f к ступенчатому изменению управления m(x), обобщающему закон вдува «ступенька» (3) из [7]: $m(x;m_1,m_2,x_*)=m_1$ при $x\in[0;x_*)$, $m(x;m_1,m_2,x_*)=m_2$ при $x\in(x_*;1]$, где $x_*\in\{0.01;0.05;0.10;\ldots;0.95\}$, $m_1\equiv 0.3,\ m_2\in\{0;0.3;1\}$. Чувствительность q падает при приближении точки переключения x_* к 1, у f это менее заметно.

6. Обратные по температурному фактору задачи тепломассообмена. Аналогично п.2 (сохраняем условия "1)"-"3)" постановки) сформулируем ОЗ по управлению – ТФ $\tau(x)$. При непрерывном управлении m(x) и ограничениях $I_{j,k}^{\tau} = [b_{j,k}^{\tau}; t_{j,k}^{\tau}], \ j=1,\dots,n_1, \ k=0,\dots,\nu_1^{\tau}, \ \nu_1^{\tau} \geqslant 1,$ для «контрольных» значений локального ТП $q^{\vee} = (q_j^{\vee})_{j=0,\dots,n_2}$ требуется найти непрерывно-дифференцируемое на X управление τ^{\sim} , задаваемое [3] элементами $\tau^{\sim}(x) = \tau_j^{\sim}(x)$ для $x \in [x_{j-1}^{\wedge}; x_j^{\wedge}], \ j=1,\dots,n_1$, удовлетворяющими условиям

$$(\tau^{\sim})^{(k)}(x) \in I_{j,k}^{\tau}$$
 для $x \in [x_{j-1}^{\wedge}; x_{j}^{\wedge}], \quad k = 0, \dots, \nu_{1}^{\tau},$ (6)

такое, что вычисленные [4-6] на X_2 значения $q^{\sim}=(q_j^{\sim})_{j=0,\dots,n_2}$, где $q_j^{\sim}=q(x_j^{\vee};m,\tau^{\sim},s)$, должны быть *близкими* к q^{\vee} , т.е.

$$q^{\vee} \to \tau^{\sim} \quad , \quad (m, \tau^{\sim}, s) \to (q^{\sim} \approx q^{\vee}, f^{\sim}) \,,$$
 (7)

где $f^{\sim}=(f_j^{\sim})_{j=0,\dots,n_2}\,,\,f_j^{\sim}=f(x_j^{\vee};m,\tau^{\sim},s).$ Для «контрольных» $f^{\vee}=(f_j^{\vee})_{j=0,\dots,n_2}$ ОЗ по τ :

$$f^{\vee} \to \tau^{\sim}$$
 , $(m, \tau^{\sim}, s) \to (q^{\sim}, f^{\sim} \approx f^{\vee})$. (8)

Определения ИПОЗ и АПОЗ для (7) (или (8)), (6) аналогичны п.3.

7. Двумерные обратные задачи тепломассообмена. Аналогично п.2 и п.6 (сохраняем условия "1)"-"3)" постановки) сформулируем ОЗ по паре управлений m и τ . Для ограничений $I_{j,k}^c = [b_{j,k}^c; t_{j,k}^c], j=1,\ldots,n_1,$ $k=0,\ldots,\nu_1^c, c\in\{m,\tau\},\ \nu_1^m\geqslant 0,\ \nu_1^\tau\geqslant 1,$ для пар «контрольных» значений $(q^\vee,f^\vee)=((q_j^\vee,f_j^\vee))_{j=0,\ldots,n_2}$ требуется найти пару управлений (m^\sim,τ^\sim) , удовлетворяющих условиям из п.2 и п.6, в частности, (1) и (6), таких, что вычисленные [4-6] на X_2 пары $(q^\sim,f^\sim)=((q_j^\sim,f_j^\sim))_{j=0,\ldots,n_2}$, где $q_j^\sim=q(x_j^\vee;m^\sim,\tau^\sim,s),\ f_j^\sim=f(x_j^\vee;m^\sim,\tau^\sim,s),\ должны быть близкими к <math>(q^\vee,f^\vee)$, т.е.

$$(q^{\vee}, f^{\vee}) \to (m^{\sim}, \tau^{\sim}) \quad , \quad (m^{\sim}, \tau^{\sim}, s) \to (q^{\sim} \approx q^{\vee}, \ f^{\sim} \approx f^{\vee}) \ . \tag{9}$$

ИПОЗ и АПОЗ для (9), (1), (6) вводятся аналогично п.3 с помощью

$$R_{\infty}((q^{\sim}, f^{\sim}); (q^{\vee}, f^{\vee})) = \max\{R_{\infty}(q^{\sim}; q^{\vee}), R_{\infty}(f^{\sim}; f^{\vee})\},$$

$$R_{p}\left(\left(q^{\sim},f^{\sim}\right);\left(q^{\vee},f^{\vee}\right)\right)=\left(R_{p}^{p}\left(q^{\sim};q^{\vee}\right)+R_{p}^{p}\left(f^{\sim};f^{\vee}\right)\right)^{1/p},\quad p\in\left[1;+\infty\right).$$

Вопросы восстановления управлений в ТТ для двумерной ИПОЗ, аналогичные рассмотренным в [2], обсуждаются в продолжении [11] данной работы.

- [1] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., "Об одной обратной задаче тепломассообмена", "Герценовские чтения 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования" в электронном журнале "Дифференциальные уравнения и процессы управления", No. 2, Ч. 2, 50–56 (2016). [http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf]
- [2] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., "Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. І. О некоторых постановках и возможности восстановления управления", Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии, No. 4, 5–12 (2016).
- [3] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., "Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов", «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна 2016»: Материалы международной конференции (25 31 января 2016 г.), Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 82–86 (2016).
- [4] Бильченко Н. Г., "Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа", Вестник Воронежс. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии, No. 1, 5–14 (2016).
- [5] Бильченко Н. Г., "Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта", Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика, No. 1, 83–94 (2015).
- [6] Бильченко Н. Г., "Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта", Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии, No. 1, 5–8 (2015).
- [7] Бильченко Н. Г., "Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения "простых" законов вдува", Вестник Воронежс. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика, No. 1, 95–102 (2015).
- [8] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., "Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. II. О некоторых вычислительных экспериментах", Вестник Воронеж. гос. унта. Сер. Системный анализ и информационные технологии, No. 4, 13–19 (2016).
- [9] Бильченко Н. Г., "Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинар-

- ном пограничном слое электропроводящего газа", Вестник Воронежс. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии, No. 3, 5-11 (2016).
- [10] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., "О некоторых вычислительных экспериментах в обратных задачах тепломассообмена", Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы XI Междунар. конф. (20 25 октября 2016 г.), Казань: Казанский ун-т, 70–75 (2016).
- [11] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., "О биективности пар управляющих воздействий и локальных параметров тепломассообмена в точке торможения гиперзвукового потока", Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы. Тезисы докладов международной конференции (22 27 мая 2017 г.), СПб.: Изд-во Санкт-Петербургкого университета, (2017).

On the Bijectivity of Controls Pairs and Pairs of Heat and Mass Transfer Local Parameters in the Hypersonic Flow Stagnation Point

Бильченко Г.Г., Бильченко Н.Г.

ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

КНИТУ – КАИ им. А. Н. Туполева, К. Маркса, 10, г. Казань, 420111, Россия

О биективности пар управляющих воздействий и локальных параметров тепломассообмена в точке торможения гиперзвукового потока

В данной работе используются обозначения и сокращения из [1].

- 1. Об однозначной зависимости локальных параметров тепломассообмена от управляющих воздействий в точке торможения.
- **1.1.** Одномерный случай. Уточним приведённые в работах [2, 3] утверждения о характере зависимости параметров ПС функций $\overline{\theta}_0(m_0, \tau_0, s_0), \overline{\theta}_1(\ldots), \overline{\omega}_0(\ldots), \overline{\omega}_1(\ldots),$ представляющих собой решения алгебраических систем (15) и (31) из [4], и параметров тепломассообмена (ТМО) функции $q_0 = \underline{q}(0; m_0, \tau_0, s_0),$ определяющей значения локального ТП в ТТ, и функции $\overline{f}_0 = \overline{f}(m_0, \tau_0, s_0),$ представляющей коэффициент [3] при значащей степени x локального НТ $f(x; m, \tau, s),$ от управляющих воздействий: вдува m_0 , ТФ τ_0 , МП s_0 в ТТ.

Пусть фиксированы значения неизменяемых параметров:

число Маха
$$M_{\infty} \in [10; 40]$$
, (1)

высота полёта
$$H \in [10; 30]$$
 [км], (2)

радиус тела
$$R \in [0,1;1]$$
 [м], (3)

а диапазоны изменения *управляющих параметров* в TT ограничены следующим образом:

$$m_0 = m(0) \in [0; 1],$$
 (4)

$$\tau_0 = \tau(0) \in [0.15; 0.9], \tag{5}$$

$$s_0 = \sigma B_0^2(0) \in [0; 5 \cdot 10^4] [\text{T}_{\text{I}}/\text{O}_{\text{M}} \cdot \text{M}].$$
 (6)

Тогда для $\overline{\theta}_0(m_0, \tau_0, s_0)$, $\overline{\theta}_1(\ldots)$, $\overline{\omega}_0(\ldots)$, $\overline{\omega}_1(\ldots)$, $q_0(\ldots)$, $\overline{f}_0(\ldots)$ установлены следующие свойства.

Утверждение 1. В условиях (1)-(6) для любого сочетания (фиксированных) значений τ_0 , s_0 функции $\overline{\theta}_0$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$ строго монотонно возрастают, а функции q_0 , \overline{f}_0 – строго монотонно убывают по m_0 .

Утверждение 2. В условиях (1)-(6) для любого сочетания (фиксированных) значений m_0 , s_0 функции $\overline{\theta}_0$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$, q_0 строго монотонно убывают, а функция \overline{f}_0 – строго монотонно возрастает по τ_0 .

Утверждение 3. В условиях (1)-(6) для любого сочетания (фиксированных) значений m_0 , τ_0 функции $\overline{\theta}_0$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$ строго монотонно возрастают, а функции q_0 , \overline{f}_0 – строго монотонно убывают по s_0 .

1.2. Двумерный случай. В указанных в п.1.1 условиях установлено, что для пары (q_0, \overline{f}_0) верны следующее свойства.

Утверждение 4. В условиях (1)-(6) для любого (фиксированного) значения параметра s_0 отображение $(m_0, \tau_0) \to (q_0, \overline{f}_0)$ – диффеоморфизм.

Утверждение 5. В условиях (1)-(6) для любого (фиксированного) значения параметра τ_0 отображение $(m_0, s_0) \to (q_0, \overline{f}_0)$ – диффеоморфизм.

Утверждение 6. В условиях (1)-(6) для любого (фиксированного) значения параметра m_0 отображение $(\tau_0, s_0) \to (q_0, \overline{f}_0)$ – диффеоморфизм.

2. Вычислительные эксперименты по построению областей допустимых значений «тепло - трение».

Для случаев обтекания боковой поверхности прямого кругового цилиндра и обтекания поверхности сферического носка приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Расчёты проведены при $M_{\infty}=10,\ H=10\ [\text{км}],\ R=0,1\ [\text{м}]$ для удобства сравнения с результатами $[2,\ 3,\ 5-7].$

Влияние эффекта диссоциации воздуха (начиная с $M_{\infty}=6$, таблица 1 в [4]) проявляется в существенном увеличении значений параметров ТМО в ТТ по сравнению с рассчитанными по модели совершенного газа, что подтверждает выводы, сделанные ранее в [5, 6] в отношении локальных ТП.

- **Выводы.** 1) Установлен вид области допустимых значений $\Omega = \{(q_0, \overline{f}_0)\}$, позволяющий дать ответ на вопрос о реализуемости пары (q_0, \overline{f}_0) параметров ТМО в ТТ в зависимости от возможного диапазона управляющих воздействий.
- 2) Из биективного характера соответствия $(m_0, \tau_0) \leftrightarrow (q_0, \overline{f}_0)$ пар управлений и пар параметров ТМО следует, что попадание пары (q_0, \overline{f}_0) в допустимую область достаточно для построения начальной части решения двумерной ОЗ ТМО [1] в интерполяционной [1, 3, 8] постановке.
- 3) Подтверждён вывод о необходимости учёта эффекта диссоциации как при расчёте локальных ТП [5, 6], так и при расчёте локальных НТ.

Полученный в результате вычислительных экспериментов материал может быть использован для сравнения с данными натурных и стендовых испытаний.

- [1] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., "Об одномерных и двумерных обратных задачах тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов", Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы. Тезисы докладов международной конференции (22 27 мая 2017 г.), СПб.: Изд-во Санкт-Петербургкого университета, (2017).
- [2] Бильченко Н. Г., "Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа", Вестник Воронежс. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии, No. 3, 5–11 (2016).
- [3] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., "Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. І. О некоторых постановках и возможности восстановления управления", Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии, No. 4, 5–12 (2016).
- [4] Бильченко Н. Г., "Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа", Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии, No. 1, 5–14 (2016).
- [5] Бильченко Н. Г., "Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта", Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика, No. 1, 83–94 (2015).
- [6] Бильченко Н. Г., "Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта", Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии, No. 1, 5–8 (2015).

- [7] Бильченко Н. Г., "Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения "простых" законов вдува", Вестник Воронежс. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика, No. 1, 95–102 (2015).
- [8] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., "Об одной обратной задаче тепломассообмена", "Герценовские чтения 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования" в электронном журнале "Дифференциальные уравнения и процессы управления", No. 2, Ч. 2, 50–56 (2016). [http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf]

Nonsmooth Mechanical Systems with Impactively Blockable Degrees of Freedom and Active Holonomic Constraints

Гончарова Е.В., Старицын М.В. goncha@icc.ru, starmaxmath@gmail.com ИДСТУ СО РАН, 134, ул. Лермонтова, Иркутск, 664033, Россия

Негладкие механические системы с блокируемыми степенями свободы и активными голономными ограничениями

Доклад посвящен проблемам математического моделирования и оптимизации в негладких лагранжевых системах, подверженных управляемому блокированию части степеней свободы в присутствии "активных" (т.е. играющих роль дополнительных управлений) голономных ограничений. Математическая формализация таких процессов приводит к системам с "аффинными" [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] и "квадратичными" импульсами [8, 10, 9] — первые из которых обеспечивают мгновенное блокирование степеней свободы [13, 15], а вторые моделируют вибрационные воздействия (вообще говоря, сколь угодно высокой интенсивности и пропорционально малой амплитуды) [12] — при ограничениях типа [14], связывающих правые односторонние пределы фазовой траектории и аффинное импульсное воздействие.

В простейшем случае скалярных управлений, движение таких систем на некотором временном интервале [0,T] традиционно описывается комплиментарной системой дифференциальных уравнением с мерами

$$dx = f_0(x)dt + f_1(x)l + f_2(x)d\mu + g(x)d\nu, \qquad x(0^-) = x_0, \tag{1}$$

$$x(t) \in \mathcal{Z}$$
 ν -п.в. $[0,T],$ (2)

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор начальных условий, $x(0^-)$ — левый предел траектории в начальный момент времени, и замкнутое подмножество $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n$ — заданная конфигурация системы, отвечающая потере части степеней свободы. Траектории $x(\cdot)$ — непрерывные справа функции $[0,T] \to \mathbb{R}^n$ с ограниченной на (0,T] вариацией. Аффинное импульсное управление ν может приближенно рассматриваться как скалярная мера Лебега-Стилтьеса, а квадратичное импульсное управление (μ,l) — как другая (уже неотрицательная мера), дополненная измеримой функцией $l \in L_2([0,T],\mathbb{R})$, играющей роль "квадратного корня из меры ν ".

В сообщении представлен результат об импульсно-траекторном расширении системы (1), (2) с помощью специального варианта метода разрывной замены времени [5, 4]. Расширение дается замыканием множества решений Каратеодори системы (1) в слабой* топологии пространства функций ограниченной вариации. Показано, что это расширение допускает конструктивное представление с помощью определенного пространственно-временного преобразования ("разделения движений" в духе [14]) траекторий некоторого вспомогательного обыкновенного дифференциального включения при фазовых и терминальных ограничениях. Примечательно, что наличие двух разных по природе импульсных воздействий приводит — ввиду возможности их последовательного чередования — к возникновению феномена множественных скачков траектории в один момент времени, отвечающих разным физическим механизмам.

В заключении ставится задача оптимального управления расширенной системой и приводится результат о существовании ее решения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проекты № 16-31-60030, 16-08-00272, 17-08-00742.

- [1] Гурман В.И., Вырожденные задачи оптимального управления, М.: Наука, (1977).
- [2] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н., Оптимальное импульсное управление с приложениями, М.: Физматлит, (2003).
- [3] Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Импульсные процессы: модели и приложения, М.: Наука, (1991).
- [4] Миллер Б.М., ''Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными и дискретно-непрерывными системами", $A \epsilon mo-$ матика и телемеханика, No. 12, 3-32 (1993).
- [5] Миллер Б.М., Рубинович Е.Я., Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями, М.: Наука, (2005).
- [6] Bressan A., Rampazzo F., "On differential systems with vector-valued impulsive controls", Boll. Un. Mat. Ital. B(7), 2, 641-656 (1988).

- [7] Bressan A., Rampazzo F., "Impulsive control systems without commutativity assumptions", *Optim. Theory Appl.*, 81, No. 3, 435-457 (1994).
- [8] Bressan A., "Hyperimpulsive motions and controllizable coordinates for Lagrangean systems", Atti. Acc. Lincei End. Fis, vol. 8, no. XIX, 197–246, 1980
- [9] Bressan Aldo, Motta M., "A class of mechanical systems with some coordinates as controls. A reduction of certain optimization problems for them. Solution methods", *Atti Acc. Lincei Rend.*, vol. 9, no. II, pp. 7–30, 1993.
- [10] Bressan A., Rampazzo F., "On systems with quadratic impulses and their application to Lagrangean mechanics", SIAM J. Control Optim., 31, 1205–1220 (1993).
- [11] Bressan A., "Impulsive control of Lagrangian systems and locomotion in fluids", Discr. Cont. Dynam. Syst., 20, 1–35 (2008).
- [12] Bressan A., Rampazzo F., "Moving constraints as stabilizing controls in classical mechanics", Arch. Ration. Mech. Anal., 196, 97–141 (2010).
- [13] Glocker Ch., "Impacts with global dissipation index at reentrant corners", in Contact Mechanics (eds. J. A. C. Martins and M. D. P. Monteiro Marques), 45–52, Springer (2002).
- [14] Goncharova E., Staritsyn M., "Optimization of measure-driven hybrid systems", *J. Optim. Theory Appl.*, 153, 139–156 (2012).
- [15] Yunt K., "Analysis of discrete mechanical systems with blockable directions", J. Appl. Mech., 7/3, 031012-031012-9 (2012).

Simulation of Particle Motion In the Given Nonsmooth Speed Fields

Давыденко А.А., Старков В.Н., Степенко Н.А. alexandrdavydenko@yandex.ru, vlad.stark@yandex.ru, nick_st@mail.ru

СПбГУ, Университетский пр., 35, Санкт-Петербург, 198504, Россия

Моделирование движения частиц в заданных негладких скоростных полях

Интерес к изучению совместного движения газов (или жидкостей) с взвешенными в них частицами обусловлен широким распространением таких смесей в природных процессах. Перечислим некоторые из них: метели, пылевые и песчаные бури, движение промышленных дымов в атмосфере города, речные наносы и т.п.

Относительно движения промышленных загрязнений в атмосфере города надо сказать, что формы дымовых струй обуславливает поле ско-

ростей в атмосфере. Наблюдается очень большое разнообразие форм и размеров дымовых загрязнений.

В движущейся воздушной среде движение частиц примеси носит сложный характер [1].

Пусть слой атмосферы является областью

$$D = \{ -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 \le z \le h \},$$

здесь x,y — декартовы координаты в плоскости земной поверхности, а ось z направлена по вертикали от поверхности земли (z=0).

Построена модель движения частиц примеси в приземном слое атмосферы под воздействием различных модельных скоростных полей. Пусть скорость воздуха имеет компоненты

$$U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t).$$

Если скорость среды и размер частицы достаточно малы, то движение в потоке будет подчиняться закону Стокса: в любой момент времени действующая на частицу ускоряющая сила, равная разности скоростей движения частиц и воздушной среды [1].

Уравнения движения частиц в атмосфере в некотором скоростном поле (U,V,W) имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \alpha (U - \dot{x}), \\ \ddot{y} &= \alpha (V - \dot{y}), \\ \ddot{z} &= \alpha (W - \dot{z}) - g. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{6\pi\mu r}{m}.$$

Здесь m — масса частицы, r — её радиус, μ — коэффициент вязкости среды, x(t), y(t), z(t) — координаты частицы в пространстве, g — ускорение свободного падения, которое будем считать пренебрежимо малым по сравнению с другими слагаемыми.

Начальные условия общего вида:

$$x(0) = x_0, \ y(0) = y_0, \ z(0) = z_0, \ \dot{x}(0) = u_0, \ \dot{y}(0) = v_0, \ \dot{z}(0) = w_0.$$

С помощью пакета Марle [2] рассмотрим несколько модельных случаев распределения скоростей и выясним траектории частиц в вертикальной плоскости, положив y=0. Негладкость профиля скоростей можно моделировать с помощью функции Хевисайда.

Составляющие скорости могут иметь вид

$$U = f(z) \Big(\eta(t - t_1) - \eta(t - t_2) \Big),$$

$$V = 0,$$

$$W = g(x) \Big(\eta(t - t_3) - \eta(t - t_4) \Big).$$

Эти формулы моделируют порывы ветра по вертикали и по горизонтали в различные интервалы времени.

Более сложные профили скороспи могут выражать пространственную и временную негладкость

$$U = a \Big(\eta(z - z_1) - \eta(z - z_2) \Big) \Big(\eta(t - t_1) - \eta(t - t_2) \Big),$$

$$V = 0,$$

$$W = b \Big(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2) \Big) \Big(\eta(t - t_3) - \eta(t - t_4) \Big).$$

Возможны другие комбинации скоростей.

Показано, что наличие негладких составляющих скорости сильно изменяет траекторию полета частицы.

Надо заметить, что движение частиц в вихревых потоках начато ещё в работах Жуковского [3]. Аналогичные е динамические системы были рассмотрены авторами [4, 5, 6, 7].

- [1] Скорер Р., Аэрогидродинамика окружающей среды, М.: Мир, (1980).
- [2] Дьяконов В., Maple 10, 11, 12, 13, 14 в математических расчетах, СПб.: Питер, (2011).
- [3] Жуковский Н.Е., Собрание сочинений. Т.З. Гидравлика. Прикладная механика, М.-Л.: ГИТТЛ, (1949).
- [4] Старков В.Н., Степенко Н.А., "Исследование динамики маятниковых систем с переменными параметрами", Естественные и математические науки в современном мире. Сборник статей XV международной научнопрактической конф., No. 2 (14). Новосибирск, 20–36 (2014).
- [5] Starkov V.N., Stepenko N.A., "Computer modeling of trajectories in spatially non-uniform gravitational fields", International conference on computer technologies in physical and engineering applications. IVESC-ICEE-ICCTPEA-BDO2014, Saint-Petersburg, 179–180 (2014).
- [6] Евстафьева В.В., Камачкин А.М., "Управление динамикой гистерезисной системы с внешним воздействием", Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, Вып. 2, 101—109 (2004).

[7] Потапов Д.К., "Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости", Изв. PAEH. Cep. MMMUY, Т. 8, No 3–4, 163–170 (2004).

Properties of Solutions of Nonlinear Equations of Mechanics Control Systems

Королев В.С.

vokorol@bk.ru; v.korolev@spbu.ru Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

Abstract

Application problems in the mechanics of motion equations in gravitational fields are considered when solutions contain equation or non-smooth function. Classical mechanics has been researching the properties, approximation and forecasting movement for problems with regular functions. Solution of nonlinear equations of the dynamics using additional conversion to eliminate the characteristics of the equations for complex systems, which lead to a linear form and possible solutions based on the stages of successive approximation. The use of such a transformation is considered to solve the problems of spacecraft motion in the gravitational field, taking into account the perturbations by the action of other forces after reduction to the canonical regular elements. Control determines the type of the relay switching points at the corner points on the basis of the Pontryagin maximum principle. To represent solutions require interfacing of consecutive trajectory.

Особенности решений нелинейных уравнений механики управляемых систем

Проблемы математического моделирования динамических процессов и нелинейных задач механики управляемых систем начинаются с постановки и описания возможных условий, которые желательно учитывать. Для построения моделей следует выделить совокупность объектов исследования и определить условия взаимодействия внутри системы, а главное уточнить возможное влияние всех дополнительных внешних сил, которые могут определять свойства уравнений движения.

Основные законы динамики со времен Ньютона хорошо описывают движение естественных или искусственных небесных тел Солнечной системы [1, 11-16]. Вид и свойства уравнений движения определяет выбор системы координат, алгоритм и способ формирования на основе соответствующих законов классической механики. В наиболее общем виде

можно записать уравнения

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}x_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} + P_i, i = 1, 2, 3.$$

Здесь x_i — декартовы координаты, μ — гравитационный параметр центрального тела, r— модуль радиус-вектора, U— силовая функция всех потенциальных сил учитываемых возмущений, P— непотенциальные силы при учете сопротивления атмосферы, светового давления, при работе реактивного двигателя на активном участке или других возмущений.

Величина и направление гравитационных сил определяется положением Солнца и планет в идеальной системе отсчета, которая считается инерциальной [17]. Для гравитационного поля Земли или других планет можно использовать функцию, которая имеет особые точки (в том числе для геопотенциала при r=0).

Большое значение имеет выбор системы отчета или обобщенных координат для записи уравнений. В задачах космической динамики часто используют кеплеровы элементы орбит, которые остаются постоянными в рамках задачи двух тел. Уравнения для изменения оскулирующих параметров орбит могут содержать свои особенности, которые обходят дополнительными преобразованиями.

Одним из универсальных является метод составления уравнений Лагранжа второго рода для вектора позиционных или обобщенных координат, которые можно записать в форме уравнений Гамильтона после введения обобщенных импульсов в число фазовых переменных. Когда стали появляться более сложные задачи управления и оптимизации [2, 4-12] при наличии ограничений, то придумывали новые методы.

Решение нелинейных уравнений динамики использует дополнительные преобразования для устранения особенностей для сложных систем, которые приводят к почти линейному виду. Это дает возможности решения с учетом этапов последовательного приближения [2, 8-13, 16].

Рассматривается применение таких преобразований для решения задач управляемого движения космических аппаратов в гравитационном поле с учетом действующих сил после приведения к каноническому виду или регулярным элементам [13, 18]. Управление релейного вида определяет моменты переключения кусочно-постоянных функций в угловых точках на основе принципа максимума Понтрягина. Требуется состыковка последовательных участков общей оптимальной траектории.

Исследование математических моделей возмущенного движения в гравитационных полях используется для нахождения оптимального управления маневрирования [9-12, 15]. Требования к эффективности алгоритмов решения задач приводит к дополнительным исследованиям в

более сложной постановке в особых случаях при движении по траекториям, близких к соударению или максимального сближения с притягивающими центрами [9-11, 16, 18]. Уравнения в регуляризованном виде оказались удобными для решения вопросов существования и продолжаемости решений в аналитическом виде, а также для использования асимптотических или численных методов. Специальные преобразования уравнений позволяет существенно сократить время вычислений и повысить точность прогнозирования движения.

Определение траекторий движения в гравитационном поле с учетом основных возмущений других действующих сил можно выполнить для пространственного случая задачи двух тел после регуляризирующего преобразования Кустаанхеймо-Штифеля или для ограниченной задачи трех тел обобщенным преобразованием Биркгофа [3, 16, 18] и переходом к линейным уравнениям в конфигурационном пространстве увеличенной размерности для регулярных элементов [13].

Общее решение уравнений движения в нулевом приближении, зависящее от времени и набора произвольных постоянных, позволяет получить решение уравнений Эйлера—Лагранжа [11-13] и определить функцию Гамильтона задачи оптимизации с помощью дифференцирования по вектору произвольных постоянных. Условие максимума по управлению позволяет искать моменты переключения управлений. Фундаментальная матрица решений системы уравнений возмущенного движения определяется через решения системы уравнений в вариациях [8, 9]. Это позволяет определить параметры оптимального решения [10-13]. Решение получается последовательным удовлетворением уравнений, полученных для соответствующей степени малого параметра из общей совокупности условий стационарности [8]. Оптимальное маневрирование может быть реализовано включением двигателей управляемого космического аппарата.

При необходимости обслуживания большого числа объектов можно использовать принцип декомпозиции, который применяли для соединения этапов движения на активных и пассивных участках траекторий движения космического аппарата в виде функций времени. В точках сопряжения конечные данные переходят в начальные для нового участка орбиты. Аппроксимация возмущений кусочно-непрерывными функциями приводит к последовательному сопряжению участков траекторий, полученных при выбранной параметризации промежутков движения [10]. Общее решение получается в виде нелинейных функций времени, которые не имеют производных в угловых точках траекторий. Особенность задачи в том, что нужно последовательно выполнить эти условия для всех объектов возможной встречи из выделенной совокупности. Если условия сближения с очередным объектом не требуют изменения скорости, то

можно продолжать движение до момента встречи со следующим объектом.

Энергетически оптимальные решения задач маневрирования со свободным временем дают глобально оптимальные решения, однако они требуют очень больших промежутков времени ожидания наступления моментов, благоприятных для старта и выхода на оптимальные орбиты перехода для встречи с другим объектом. Время движения между двумя точками орбиты можно определить из решения уравнения Кеплера. Отметим, что задачи с учетом времени движения по орбитам являются существенно более сложными для исследования. Ограничения в задачах оптимизации играют решающую роль, а значения параметров могут часто находиться на границе допустимой области.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 17-01-00881.

- [1] Арнольд В.И., Математические методы классической механики, М.: Наука, (1979).
- [2] Бабаджанянц Л.К., Потоцкая И.Ю., Управление по критерию расхода в механических системах, СПб: изд-во С-Петерб. ун-та, (2003).
- [3] Брумберг В.А., Релятивистская небесная механика, М.: Наука, (1972).
- [4] Демьянов В.Ф., Виноградова Т.К., Никулина В.Н. и др., Негладкие задачи теории оптимизации и управления, Л.: изд-во ЛГУ, (1982).
- [5] Демьянов В.Ф., "Обобщение понятия производной в негладком анализе", Соровский образовательный журнал, No. 5, 121–127 (1996).
- [6] Демьянов В.Ф., "Математическая модель развития динамических систем", Вестник С-Петерб. ун-та. Серия 1, No. 4, 11–20 (2002).
- [7] Демьянов В.Ф., "Математическая модель динамического процесса", Докла-ды Академии Наук, 395, No. 2, 178–182 (2004).
- [8] Королев В.С., "Экстремум функции малого параметра при наличии ограничений", $Вестник \ \mathcal{I}\Gamma V$, No. 19, 72–74 (1983).
- [9] Королев В.С., "Определение движения навигационных спутников с учетом возмущений", Вестник С-Петерб. ун-та. Серия 10., No. 3, 39–46 (2004).
- [10] Королев В.С., "Оптимальные траектории перехода космических аппаратов между заданными орбитами различного типа", *Технические науки от теории к практике*, 2, No. 11, 62–70 (2014).
- [11] Новоселов В.С., Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях, Л.: изд-во ЛГУ, (1972).
- [12] Новоселов В.С., Королев В.С., Аналитическая механика управляемой системы, СПб.: изд-во СПбГУ, (2005).
- [13] Новоселов В.С., Королев В.С., "Управление гамильтоновой системой с учетом возмущений", *Инновации в науке*, No. 51, 23–29 (2015).

Косов А.А. 241

[14] Ньютон И., Математические начала натуральной философии, М.: Наука., (1989).

- [15] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г., Основы механики космического полета, М.: Наука, (1990).
- [16] Себехей В., Теория орбит. Ограниченная задача трех тел, М.: Наука, (1975).
- [17] Холшевников К.В., Кузнецов Э.Д., Шайдулин В.Ш., "О представлении гравитационного потенциала некоторых модельных тел", Вестник СПбГУ. Серия 1., 3, No. 3, 489–497 (2016).
- [18] Штифель Е., Шейфеле Г., Линейная и регулярная небесная механика, М.: Наука, (1975).

On the Control Problem of a Switched Mechanical System $Kocos\ A.A.$

aakosov@yandex.ru

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия

О задаче управления механической системой с переключениями

В современной теории управления активно изучаются гибридные системы, описываемые дифференциальными уравнениями с переключениями правых частей в ходе процесса управления [1, 2]. Такие системы с переключениями встречаются в задачах управления негладкими механическими системами со структурной реконфигурацией, отказами и восстановлениями датчиков или исполнительных органов [3]. Такие события происходят в дискретные моменты времени функционирования механической системы, делают ее негладкой и существенным образом влияют на динамические свойства. В уравнениях движения такие дискретные события отражаются наличием переключений в кинетической энергии и действующих силовых полей. Переключения существенно затрудняют решение задач синтеза стабилизирующих управлений, поэтому актуальной задачей является развитие теории управления для такого рода гибридных механических систем [4]. Основным, а часто и единственным строгим методом исследования динамики гибридных систем обычно выступает метод функций Ляпунова (см., например, [5–9]).

В докладе рассматривается задача управления механической системой, описываемой уравнениями Лагранжа с переключениями кинетической энергии и силовых полей. Цель управления заключается в построении стабилизирующего закона обратной связи, гарантирующего приведение в состояние равновесия за конечное время из малой окрестности

242 Kocob A.A.

при произвольном режиме переключений. При этом полный вектор состояния считается доступным непосредственному измерению и может использоваться в обратной связи, а информация о режиме переключений считается недоступной и не может использоваться в обратной связи.

Предложен простой степенной закон обратной связи, гарантирующий при произвольном режиме переключений решение поставленной задачи о переводе в состояние равновесия за конечное время из малой окрестности этого равновесия с последующим удержанием.

Рассмотрим механическую систему с переключениями, описываемую уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(s(t))}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T^{(s(t))}}{\partial x} = Q^{(s(t))}(t, x, \dot{x}) + u(x, \dot{x}). \tag{1}$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^n$ — вектор обобщенных координат, $\dot{x}\in\mathbb{R}^n$ — вектор обобщенных скоростей. Функция $s:[0,+\infty)\to M=\{1,2,\dots,N\}$ задает режим переключений и является кусочно-постоянной, правосторонне непрерывной и в каждом конечном отрезке имеет конечное число точек разрыва. При каждом $j\in M$ кинетическая энергия является квадратичной формой $T^{(j)}=\frac{1}{2}\,\dot{x}^TA^{(j)}\dot{x}$, причем все матрицы $A^{(j)}(0)$ диагональные положительно определенные. Для обобщенных сил $Q^{(s(t))}\left(t,x,\dot{x}\right)$ при всех $j\in M$ считаем выполненными оценки

$$||Q^{(s(t))}(t, x, \dot{x})|| \le k(||x|| + ||\dot{x}||).$$

Рассмотрим систему (1), пренебрегая всеми переключаемыми силами в уравнениях движения, тогда система декомпозируется и принимает вид

$$a_{kk}\ddot{x}_k = u_k(x,\dot{x}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$
 (2)

Выберем закон управления в виде

$$u_k(x,\dot{x}) = -\alpha_k x_k^{1/5} - \beta_k \dot{x}_k^{1/3}, \quad \alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$
 (3)

Теорема 1. Если в системе (1) управляющие силы в правых частях выбраны в виде (3), то положение равновесия $x=\dot{x}=0$ замкнутой системы асимптотически устойчиво и все решения, начинающиеся в малой окрестности равновесия, за конечное время достигают положения равновесия и в дальнейшем в нем остаются.

Заметим, что закон управления (3) задается простыми степенными функциями и не требует проведения расчетов по сложным алгоритмам для вычисления текущих значений управляющего сигнала. Это свойство

Косов А.А. 243

может быть очень полезным при практической реализации предлагаемого закона управления. Кроме этого, если предполагать затраты на реализацию управления пропорциональны величине управляющего сигнала, то из степенного характера (3) следует, что при приближении к положению равновесия величина управления уменьшается и за конечное время обращается в ноль, соответственно обнуляются и текущие затраты на управление.

Пример механической системы с переключениями, состоящей из цепочки тележек, для которой был применен описанный здесь подход, рассматривался в статье [10].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-08-06680.

- Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C., "Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems", SIAM Rev., 49, No. 4, 545-592 (2007).
- [2] Hai Lin, Antsaklis P.J. "Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: a Survey of Recent Results" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, V. 54. No. 2. P. 3080-322. (2009).
- [3] Александров А.Ю., Косов А.А., Чэнь Я., "Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями", *Автоматика* и телемеханика, No. 6, 5–17 (2011).
- [4] "Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory", Edited by V. D. Blondel & A. Megretski. Princeton, Oxford: Princeton University Press, (2004).
- [5] Liberzon D. "Switching in Systems and Control", Boston, MA: Birkhauser, (2003).
- [6] Васильев С.Н., Косов А.А. "Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов", *Автоматика и телемеханика*, No. 6. C. 27–47. (2011).
- [7] Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A., Platonov A.V. "On the Asymptotic Stability of Switched Homogeneous Systems", Systems & Control Letters, V. 61. No. 1. P. 127–133. (2012).
- [8] Vassilyev S.N., Kosov A.A., Malikov A.I. "Stability Analysis of Nonlinear Switched Systems via Reduction Method", Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano. Italy. Aug. 28—Sept. 2, P. 5718—5723. (2011).
- [9] Александров А.Ю., Косов А.А., Платонов А.В., Фадеев С.С. "Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями силовых полей", *Мехатроника*, автоматизация, управление, No. 12. С. 9–16. (2013).
- [10] Косов А.А. "О построении стабилизирующего управления для одной механической системы с переключениями", *Мехатроника. Автоматизация.* Управление, No. 12. C. 23–26. (2014).

Optimization of Dispersive and Dissipative Characteristics of Finite-Difference Schemes for Advection Equation

Kривовичев $\Gamma.B.$, Mарнопольская E.C.

g.krivovichev@spbu.ru, marnlena@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация

Оптимизация дисперсионных и диссипативных характеристик разностных схем для уравнения переноса

В настоящее время необходимость в численном решении кинетических уравнений типа Больцмана и Бхатнагара — Гросса — Крука возникает в различных прикладных задачах газовой динамики. В качестве примеров можно привести такие задачи, как моделирование микронасосов типа Кнудсена [1] и расчет течений разреженного газа [2]. Одним из наиболее часто применяемых методов решения кинетических уравнений является метод расщепления по физическим процессам [3]. В рамках метода расчет производится в два этапа — на первом рассматривается свободный разлет частиц, на втором — их взаимодействие. При применении метода дискретных скоростей первый процесс описывается системой линейных уравнений переноса, которые независимы друг от друга и в одномерном случае имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

где t — время, x — пространственная переменная, u=u(t,x) — искомая функция (в кинетических уравнениях функция распределения частиц), c>0 — скорость переноса.

Для решения задач для (1) рассмотрим разностные схемы со следующей несимметричной аппроксимацией первого порядка производной по времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_n) \approx \frac{u_n^{j+1} - \frac{1}{2}(u_n^j + u_n^{j-2})}{2\Delta t},$$

где $u_n^j \approx u(t_j,x_n),\ t_j$ — узел временной сетки, построенной с шагом $\Delta t,x_n$ — узел пространственной сетки, построенной с шагом h. Для аппроксимации производной по x можно использовать известные разностные производные различных порядков точности (рассматривались случаи 1—4 порядков). В результате можно получать явные разностные схемы, имеющие вид:

$$u_n^{j+1} = \frac{1}{2} \left(u_n^j + u_n^{j-2} \right) - 2\Delta t \mathcal{L}_h(u_n^j), \tag{2}$$

где $\mathcal{L}_h(u_n^j)$ есть сеточный оператор. Схемы вида (2), построенные с использованием центральных и направленных разностных производных оказались условно устойчивыми и вполне пригодными для проведения расчетов. Однако, при решении простейшей задачи о распространении прямоугольного импульса было установлено, что схемы с центральными производными обладают сильной численной дисперсией, проявляющейся в наличии фиктивных высокочастотных колебаний, а схемы, построенные с использованием направленных разностей — численной диссипацией, проявляющейся, наоборот, в наличии фиктивного затухания решения. Для снижения влияния этих нефизических эффектов было предложено аппроксимировать $c\partial u/\partial x$ конечной разностью следующего вида:

$$c\frac{\partial u}{\partial x}(t_j, x_n) \approx \varepsilon F_1 + (1 - \varepsilon)F_2,$$

где F_1 и F_2 есть различные (центральная и направленная) конечные разности, аппроксимирующие этот член, а $\varepsilon \in [0,1]$ — безразмерный параметр, за счет выбора которого можно регулировать влияние дисперсионных и диссипативных эффектов. В результате получается разностная схема вида:

$$u_n^{j+1} = \frac{1}{2} \left(u_n^j + u_n^{j-2} \right) - 2\Delta t \left(\varepsilon F_1 + (1 - \varepsilon) F_2 \right). \tag{3}$$

Для определения дисперсионных и диссипативных характеристик представим решения схем вида (3) в виде бегущей волны [4]:

$$u_n^j = e^{\mathbf{i}(\omega \Delta t j - k n h)},\tag{4}$$

где ω есть частота, k — волновое число. Подставляя (4) в (3), получим кубическое уравнение относительно величины $q=e^{\mathrm{i}\omega\Delta t}$:

$$q^3 + a(\gamma, \xi, \varepsilon)q^2 - \frac{1}{2} = 0, \tag{5}$$

где $\gamma=c\Delta t/h$ — число Куранта, $\xi=kh$, коэффициент a имеет свое выражение для каждой из разностных схем. Корни (5) $q_s,s=1,2,3$ несложно найти с использованием формул Кардано. Основными величинами, характеризующими дисперсию, являются вещественные части частот ω_s [4], которые выражаются через q_s следующим образом:

$$\psi_s(\gamma, \xi, \varepsilon) = Re(\omega_s) = \frac{\arctan\left(\frac{Im(q_s)}{Re(q_s)}\right)}{\Delta t}.$$
 (6)

Дисперсионное соотношение для исходного уравнения (1) имеет следующий вид: $\omega = ck$. Частота ω для этого случая может быть выражена как функция γ и ξ :

$$\omega(\gamma, \xi) = \frac{\gamma \xi}{\Delta t}.\tag{7}$$

В связи с тем, что ψ_s и ω зависят от параметра γ , который варьируется, при исследовании свойств разностных схем достаточно рассмотреть случай $\Delta t = 1$.

Для снижения влияния дисперсионных эффектов за счет выбора ε имеет смысл уменьшать отклонения значений функции (6) от (7) как функции от ε . Таким образом, в качестве минимизируемой дисперсионной характеристики рассматривается следующая функция:

$$I(\varepsilon) = \sup_{s=1,2,3} \left(\sup_{(\gamma,\xi)} |\psi_s(\gamma,\xi,\varepsilon) - \omega(\gamma,\xi)| \right).$$
 (8)

При этом важно отметить, что значения γ и ξ рассматриваются на множестве $\{(\gamma,\xi)|\gamma\in(0,\gamma^*(\varepsilon)),\xi\in[-\pi,\pi]\}$, где $\gamma^*(\varepsilon)$ задает границу интервала устойчивости по γ при фиксированном значении ε .

Для определения диссипативной характеристики перепишем (4) в виде:

$$u_n^j = |q|^j e^{\mathbf{i}(Arg(q^j) - knh)}. (9)$$

Как можно видеть, затухание волны (9) будет характеризоваться функциями $\eta_s(\gamma, \xi, \varepsilon) = |q_s|$. Для снижения влияния диссипативных эффектов в качестве минимизируемой диссипативной характеристики выберем следующую функцию:

$$F(\varepsilon) = \sup_{s=1,2,3} \left(\sup_{(\gamma,\xi)} |\eta_s(\gamma,\xi,\varepsilon) - C_s| \right), \tag{10}$$

где C_s есть постоянные величины, представляющие собой значения η_s в случае малой диссипации.

При проведении численных расчетов характеристики (8) и (10) минимизировались как функции ε на промежутке [0,1]. Расчеты производились для построенных разностных схем 1-4 порядков. Экстремальная задача рассматривалась как в многокритериальной постановке, при решении которой находились оптимальные по Парето решения, так и в виде связки функций (8) и (10) с весовыми коэффициентами σ и $(1-\sigma)$, $\sigma \in [0,1]$, которая рассматривалась как функция ε и σ . По результатам расчетов были определены оптимальные значения ε , и было показано,

что определяющим критерием является диссипативная характеристика (10), а этот вывод следует и из физических соображений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-31-00021 мол а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Dodulad O.I., Kloss Yu. Yu., Savichkin D.O., Tcheremissine F.G., "Knudsen pumps modelling with Lennard Jones and ab initio molecular potentials", *Vacuum*, 109, 360–367 (2014).
- [2] Малков Е.А., Иванов М.С. "Детерминированный метод частиц-в-ячейках для решения задач динамики разреженного газа. Часть Γ ", Вычислительные методы и программирование, 12, 368–374, (2011).
- [3] Ohwada T., "Higher order approximation methods for the Boltzmann equation", Journal of Computational Physics, 139, 1–14 (1998).
- [4] Karabasov S. A., Goloviznin V. M., "Compact Accurately Boundary-Adjusting high-REsolution Technique for fluid dynamics *Journal of Computational Physics.*, 228, No. 19, 7426 7451 (2009).

Elements of Non-Smooth Analysis in the Theory of Waves Перегудин С.И., Холодова С.Е., Перегудина Э.С.

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский проспект д.35, Санкт-Петербург, 198504, Россия; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Кронверкский проспект, д.49, Санкт-Петербург, 197101, Россия; Санкт-Петербургский горный университет, Васильевский остров, 21 линия д.2, Санкт-Петербург, 199106, Россия

Элементы негладкого анализа в теории волн

Гидродинамические модели океана могут быть самыми разными. Принимая жидкость несжимаемой, можно считать ее неоднородной. Если рассматривать планетарные масштабы явления, то необходимо учитывать вращение Земли. Одной из характерных моделей динамики океана является рассмотрение безвихревого движения двух слоев идеальной несжимаемой однородной жидкости. В этом случае качественная оценка параметров взволнованной жидкости сводится к оценке параметров решения соответствующей нелинейной краевой задачи теории потенциала. Такой подход к вопросам математического моделирования ряда физических явлений, обусловленных волновым движением жидкости, приводит к необходимости находить теоретическим путем параметры процесса рас-

пространения внутренних и поверхностных волн соответствующей математической модели [1].

Рассмотрим безвихревое движение двух слоев однородной несжимаемой идеальной жидкости. Ось x направим вдоль невозмущенной поверхности раздела, ось y — вертикально вверх.

Пусть

$$y = -H(x, t),$$
 $y = \eta_1(x, t),$ $y = N_2(x, t)$

есть уравнения дна, поверхности раздела и свободной поверхности соответственно. Величины, относящиеся к нижнему слою жидкости, будем отмечать индексом 1, к верхнему слою — индексом 2. Имеем задачу

$$\frac{\partial^{2} \varphi_{j}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \varphi_{j}}{\partial y^{2}} = 0, \qquad j = 1, 2,$$

$$\frac{p_{j}}{\rho_{j}} + \frac{\partial \varphi_{j}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{j}}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial \varphi_{j}}{\partial y} \right)^{2} \right] + gy = f_{j}(t), \qquad j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{1}}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{1}}{\partial y} = 0, \qquad y = -H(x, t),$$

$$p_{1} = p_{2}, \frac{\partial \eta_{1}}{\partial t} + \frac{\partial \eta_{1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{j}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{j}}{\partial y}, \qquad y = \eta_{1}(x, t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \eta_{2}}{\partial t} + \frac{\partial \eta_{2}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{2}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{2}}{\partial y}, \qquad y = H_{2} + \eta_{2}(x, t),$$

$$\frac{p_{2}^{0}}{\rho_{2}} + \frac{\partial \varphi_{2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{2}}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial \varphi_{2}}{\partial y} \right)^{2} \right] + g(H_{2} + \eta_{2}) = f_{2}(t), \quad y = H_{2} + \eta_{2}(x, t).$$

Здесь φ_j — потенциал скорости, p_j — давление, ρ_j — плотность жидкости, $f_j(t)$ — произвольная функция времени, p_2^0 — давление, приложенное к свободной поверхности $y=H_2+\eta_2,\ H_2$ — глубина верхнего слоя в невозмущенном состоянии.

В случае волн малой высоты нелинейные краевые условия (1) и интеграл Лагранжа—Коши упрощаются. В этом случае решение представленной задачи, в случае горизонтального и недеформируемого дна, можно искать в виде гармонической функции с учетом периодичности внутренней и поверхностной волн, а также интегрального условия для каждой из них и условия непротекания для нижнего слоя жидкости в виде

$$\varphi_1 = A \frac{\operatorname{ch} k(y+H)}{\operatorname{ch} kH} \cos kx \sin \omega t, \qquad \varphi_2 = \left(B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}\right) \cos kx \sin \omega t.$$

Из краевых условий на поверхности раздела и на свободной поверхности относительно амплитуды внутренней и поверхностных волн получаем линейную однородную систему алгебраических уравнений, разрешая

которую получим дисперсионное соотношение — условия существования исследуемого волнового процесса. В случае, когда исследуемый волновой процесс возможен, в наличии имеется два типа волн. Отношение амплитуд для каждого типа волн выражаются соответствующими соотношениями. В предельном случае — случае бесконечной глубины нижнего слоя, полученные соотношения упрощаются и принимают следующий вид

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = e^{-kH_2},$$
 $\frac{a_{11}}{a_{21}} = -\frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}e^{kH_2}$

Из первой формулы следует, что это отношение не зависит от плотностей ρ_1 и ρ_2 и совпадает с соответствующим отношением для однородной жидкости. При этом поверхностная волна выше внутренней, и гребню свободной поверхности соответствует гребень поверхности раздела. Из второго соотношения следует, что с частотой второго рода внутренняя волна имеет большую амплитуду, чем поверхностная, и гребню свободной поверхности соответствует впадина поверхности раздела. Также следует отметить, что внутренние волны второго рода получают значительное развитие по отношению к волнам на свободной поверхности и достигают большей амплитуды, если разность плотностей слоев жидкости мала [1, 2].

Полученное решение описывает стоячие волны. При этом выполняется условие $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Big|_{x=0}=0;\; j=1,2,$ непротекания жидкости через створ x=0, который можно принять за вертикальную стенку. Используя тригонометрическое тождество потенциал скорости можно представить в виде суммы двух потенциалов, соответствующих набегающей и отраженной волнам [3]

$$\varphi_1 = A \frac{\operatorname{ch} k(y+H)}{\operatorname{ch} kH} \left[\sin(kx+\omega t) - \sin(kx-\omega t) \right],$$

$$\varphi_2 = \left(B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky} \right) \left[\sin(kx+\omega t) - \sin(kx-\omega t) \right].$$

В случае решения задачи о волнах конечной амплитуды в двухслойной жидкости следует воспользоваться первым методом Стокса, состоящим в представлении искомых гидродинамических характеристик в виде степенных рядов по амплитудному параметру, характеризующему высоту волны. Также краевые условия на криволинейной границе следует аппроксимировать рядом Тэйлора в окрестности невозмущенного уровня. В этом случае можно построить любое количество элементов степенного ряда, ограничением в построении может служить лишь вычислительные сложности. В этом случае для контроля и упрощения аналитических вычислений возможно использование современных средств компьютерной

алгебры. При проведении численного эксперимента с дальнейшей аналитической обработкой возможно использование современных интегрированных сред разработки программных продуктов. Проведя исследование нелинейной задачи, можно заключить, что для волн конечной амплитуды высота гребня больше глубины впадины, гребень уже, впадина шире. Это свойство обнаруживается во втором приближении. Зависимость фазовой скорости от высоты волны проявляется в третьем приближении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Перегудин С.И., Волновые движения в жидких и сыпучих средах, Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, (2004).
- [2] Перегудин С.И., "Математическое моделирование процесса распространения длинных волн над деформируемым дном", Вестник Санкт-Петербургского государственного университета, Сер. 10, 4, 47–54 (2004).
- [3] Перегудин С.И., Холодова С.Е., "Взаимодействие трехмерных волн конечной амплитуды в двухслойной жидкости с вертикальной стенкой при произвольном подходе", *Математическое моделирование*, 12, 51-53, (2000).

Methods of Non-Smooth Analysis in Problems of Fluid Dynamic

Перегудин С.И., Холодова С.Е., Перегудина Э.С. peregudinsi@yandex.ru, kholodovase@yandex.ru, ehllina-peregudina@yandex

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский проспект д.35, Санкт-Петербург, 198504, Россия; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Кронверкский проспект, д.49, Санкт-Петербург, 197101, Россия; Санкт-Петербургский горный университет, Васильевский остров, 21 линия д.2, Санкт-Петербург, 199106, Россия

Методы негладкого анализа в задачах гидродинамики

Целью данного исслеования является построение решения краевой задачи для системы нелинейных уравнений с частными производными, моделирующей квазигеострофическое движение в слое идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, заключенном между изменяющимися в пространстве и во времени поверхностями, с учетом инерциальных сил. Предполагая, что числа Россби, являющиеся мерой отношения локального и адвективного ускорений к ускорению Кориолиса, одного порядка, задача сводится к решению системы трех нелинейных уравнений для гидромагнитного давления и для двух функций, описывающих магнитное поле. Для бесконечно протяженной по горизонтали электропровод-

ной вращающейся жидкости в предположении примерного постоянства наклона поверхности, ограничивающей слой сверху, на расстоянии порядка длины волны получено точное решение системы соответствующих нелинейных уравнений и дисперсионное соотношение. В действительной форме представлены основные характеристики движения.

Рассматриваются крупномасштабные нелинейные колебания электропроводной идеальной жидкости переменной глубины с учетом магнитной, архимедовой и кориолисовой сил. Для поставленной пространственной задачи допустимо предположение о линейном распределении гидромагнитного давления с глубиной. Соответствующая краевая задача для горизонтальных компонент скорости и магнитного поля, и функции, описывающей нижнюю подвижную поверхность слоя, является нелинейной. С использованием анализа масштабов квазигеострофических движений производится вывод основных уравнений. Предполагая, что числа Россби, являющиеся мерой отношения локального и адвективного ускорений к ускорению Кориолиса, одного порядка, задача сводится к решению системы трех нелинейных уравнений для гидромагнитного давления и для двух функций, описывающих магнитное поле. Для бесконечно протяженной по горизонтали электропроводной вращающейся жидкости в предположении примерного постоянства наклона поверхности, ограничивающей слой сверху, на расстоянии порядка длины волны получено точное решение системы соответствующих нелинейных уравнений и дисперсионное соотношение. В действительной форме представлены основные характеристики движения [1, 2].

Представленные исследования могут быть использованы в астрофизике и геофизике, в частности, при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли и недрах звезд. Построенные решения реализуют наиболее простую модель жидкого ядра Земли в виде бесконечного в горизонтальном направлении слоя жидкости с учетом топографии мантии и твердого ядра Земли.

- [1] Холодова С.Е., Перегудин С.И., Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах, Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, (2009).
- [2] Холодова С.Е., "Математическое моделирование крупномасштабных движений стратифицированной электропроводной жидкости в сферическом слое", Вестник Санкт-Петербургского государственного университета, Сер. 10, 1, 118–133 (2009).

252 Tapacob B.H.

Nonsmooth problems of mechanics of elastic systems $Tapacos\ B.H.$

vntarasov@dm.komisc.ru

Коми НЦ УрО РАН, ул.Первомайская, 50, Сыктывкар, 167000, Россия

Негладкие задачи механики упругих систем

Постановка задачи. Рассмотрим задачу об устойчивости сжимаемого продольной силой стержня, расположенного на границе раздела двух упругих сред. Предположим, что однородный стержень длины ℓ подвергается сжатию продольной силой P. Пусть стержень находится на границе раздела двух упругих сред с жесткостями c(x) и b(x), реагирующих на боковое смещение стержня как простые винклеровские основания. Предполагая для определенности граничные условия жесткой заделки, приходим к проблеме определения таких значений параметра нагрузки P, при которых краевая задача

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} + c(x)w_+ + b(x)w_- = -P\frac{d^2w}{dx^2}, x \in (0, l),$$

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w'(0) = w'(\ell) = 0 \quad (1)$$

имеет нетривиальное решение. Здесь w(x) – прогиб (рассматривается плоская форма изгиба),

EI – жесткость стержня на изгиб

$$w_{+}(x) = \max\{0, w(x)\}, w_{-}(x) = \min\{0, w(x)\}.$$

Особенностью задачи (1) является ее нелинейность, обусловленная срезкой функции w(x), т.е. необходимо находить "собственные" функции негладких операторов.

Пусть A,Q определенные в некотором гильбертовом пространстве H линейные операторы,

К- некоторый выпуклый конус. Рассмотрим задачу

$$f(w) = \frac{1}{2}(Aw,w) \to \min_{w \in K}, \text{ при ограничениях } g(w) = \frac{1}{2}(Qw,w) = 1. \quad (2)$$

К исследованию задачи (2) может быть сведен расчет на устойчивость упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. Очевидно задача (2) эквивалентна следующей: найти минимальное значение силы P, такой что, вариационная проблема

$$\frac{1}{2}(Aw, w) - P\frac{1}{2}(Qw, w) \to \min_{w \in K}$$
 (3)

Тарасов В.Н. 253

имеет нетривиальное решение. Данная задача может быть сведена к идентификации условной положительности квадратичных форм на конусах. Аналитические критерии условной положительности квадратичных форм на конусах приведены в конечномерном случае в [1].

1. Цилиндрическая оболочка в жесткой обойме

Рассмотрим, например, задачу об устойчивости сжимаемой продольной силой цилиндрической оболочки, прогибы которой с одной стороны ограничены жестким препятствием. В осесимметричном случае при граничных условиях жесткой заделки нахождение критической нагрузки сводится к определению силы P, при которой вариационная задача

$$\widetilde{J}(w) = \frac{1}{2} \int_{0}^{\ell} (Dw''^2 + Cw^2 - Pw'^2) dx \to \min_{w \in K},$$
 (4)

$$w(0) = w(\ell) = w'(0) = w'(\ell) = 0, \ w(x) \ge 0, \ x \in [0, \ell]$$
 (5)

имеет нетривиальное решение. Здесь $D=Eh^3/12(1-\nu^2),~C=Eh/R^2(1-\nu^2),~E$ — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, R — радиус оболочки, h,ℓ — толщина и длина соответственно. В (4) — (5) K — конус неотрицательных функций, определенных на интервале $[0,\ell]$, имеющих обобщенную, суммируемую с квадратом вторую производную. Можно показать, что решение задачи (5) можно искать среди функций $w(x)>0,~x\in(0,\ell_2),~$ и $w(x)=0~x\in[\ell_2,\ell],~$ см. [2]. Задача (4) — (5) допускает аналитическое решение:

$$P = \frac{10D}{3}\sqrt{d}, \ l_2 = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt[4]{d}}, \ d = \frac{C}{D}, m_2 = \frac{\sqrt[4]{d}}{\sqrt{3}},$$
$$w(x) = c\sin^3(m_2x)H(l_2 - x), \ x \in [0, l].$$
 (6)

Формулы (6) справедливы при условии, что $l_2 \leqslant l$, в противном случае односторонние ограничения не влияют на критическую нагрузку. В (6) c > 0—произвольная постоянная.

В случае граничных условий шарнирного опирания

$$w(0) = w(l) = w''(0) = w''(l) = 0, \ w(x) \geqslant 0, \quad x \in [0, l]$$
 (7)

решение определяется формулами

$$P = \frac{5}{2}D\sqrt{d}, \ d = \frac{C}{D}, \ \ell_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt[4]{d}},$$

$$w(x) = c\left(2\sin\frac{\pi x}{\ell_2} + \sin\frac{2\pi x}{\ell_2}\right)H(\ell_2 - x), \quad c > 0. \quad (8)$$

Tapacoв В.Н.

2. Устойчивость упругих колец, подкрепленных нерастяжимыми нитями

Пусть упругое кольцо, подкрепленое нерастяжимыми нитями (растяжками), нагружено силой давления P. Обозначим через $w(\theta)$ — прогиб кольца, $v=w'(\theta)$ —касательное перемещение точек кольца, θ —центральный угол, R—радиус кольца, B—жесткость при изгибе. Рассмотрим задачу: определить минимальную силу P, при которой вариационная задача

$$J(w) = \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{B}{2R^3} (w'' + w)^2 - \frac{P}{2} (w' - w)^2 \right) d\theta \to \min_{w}, \tag{9}$$

при ограничениях

$$\delta \rho_j = (w_{2j} + w_{1J})\sin(\frac{\alpha_j}{2}) + (v_{2j} - v_{1j})\cos(\frac{\alpha_j}{2}) \le 0, \quad j \in 1:M$$
 (10)

имеет нетривиальное решение. Функция $w(\theta)$ должна быть 2π — периодической.

В (10) $\alpha_j = \theta_{2j} - \theta_{1j}$, где θ_{2j} , θ_{1j} – точки крепления j – той растяжки, $w_{1j} = w(\theta_{1j}), \ v_{1j} = v(\theta_{1j}),$

 $w_{2j} = w(\theta_{2j}), v_{2j} = v(\theta_{2j}).$ В таблице 1 приведены значения безразмерного критического параметра $P^* = PR^3/B$, (P-критическое давление) для кольца, подкрепленного растяжками, расположенными по сторонам правильного M-угольника. Для неподкрепленного кольца $P^* = 3$.

Tаблица 1. Значения критического параметра P^*

M	3	4	5	6	7	8	9	10
P^*	4.32	3.00	4.57	5.27	6.28	6.50	7.26	7.37

3. Устойчивость прямоугольной пластины при односторонних ограничениях на перемещения

Пусть прямоугольная пластина нагружена по краям x=0, x=a, $0\leqslant y\leqslant b$ нормальными усилиями σ и по всем краям касательными усилиями τ . Обозначим через w(x,y) $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$ прогиб пластины. Потенциальная энергия деформации пластины имеет вид

$$U = \frac{D}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right)^{2} dx dy.$$
 (11)

Тарасов В.Н. 255

Работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$V = \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \left(\sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^{2} + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$
 (12)

Будем считать, что перемещения на краях пластины отсутствуют, т.е.выполнены равенства

$$w(0,y) = w(a,y) = 0, \ 0 \le y \le b, \ w(x,b) = w(x,b) = 0, \ 0 \le x \le a.$$
 (13)

Кроме того, на границе могут быть заданы условия вида:

$$\begin{split} \frac{\partial^i w(0,y)}{\partial x^i} &= 0, \ \frac{\partial^j w(a,y)}{\partial x^j} = 0, \ 0 \leqslant y \leqslant b, \\ \frac{\partial^k w(x,0)}{\partial y^k} &= 0, \ \frac{\partial^\ell w(x,b)}{\partial y^\ell} = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant a. \end{split} \tag{14}$$

Числа i,j,k,l могут принимать значения либо 1, либо 2. Например, если i=1,j=1,k=1,l=1, то получаем граничные условия жесткой заделки по всем кромкам пластины, если же i=2,j=2,k=2,l=2, то выполнены условия шарнирного опирания. Таким образом, с учетом симметрии пластины получаем 9 различных вариантов.

Далее будем предполагать, что пластина находится над двумя жесткими ребрами, расположенными вдоль оси x так, что прогиб пластины удовлетворяет неравенствам

$$w(x, b_0) \ge 0, \quad w(x, b_1) \ge 0, \quad 0 < b_0 < b_1 < b.$$
 (15)

Задача об устойчивости пластины сводится к отысканию сил σ и τ таких, что вариационная задача

$$U - V \to \min_{w \in \mathcal{P}} \tag{16}$$

имеет нетривиальное решение. В (16) \mathcal{P} – множество функций w(x,y), удовлетворяющих неравенствам (15) и граничным условиям. Прогиб пластины аппроксимируем интерполяционными кубическими сплайнами двух переменных, после чего получается задача вида (3).

В табл. 2 и 3 приведены некоторые результаты вычислений. Граничные условия записаны в " $ijk\ell$ " кодировке. Вычисления производились при следуюих значениях параметров: $a=5\pi,\ b=\pi,\ D=1,$ $b_0=\frac{1}{3}b,\ b_1=\frac{1}{3}b.$ Например в таблице 2 при $\tau=1,\ \sigma=2$ при $i=1,j=1,k=1,\ell=1,\lambda=4.196.$ Это означает, что критические усилия равны $\sigma^*=4.196*3=12.588,\ \tau^*=1*4.196=4.196.$ Без односторонних ограничений на перемещения $\sigma^*=3.147*3=9.441,\ \tau^*=1*3.147=3.147.$

Taблица~2. Значения критического параметра λ при наличии одностороних ограничений на перемещения (15) и при некоторых граничных условиях.

τ	1	1	1	0	2	3	5
σ	3	2	1	1	1	1	1
"1111"	2.933	4.196	6.575	9.371	4.239	3.113	2.025
"2211"	2.599	3.756	6.211	8.025	4.228	3.104	2.019
"2222"	1.448	2.087	3.528	4.489	2.425	1.786	1.163

 $Tаблица\ 3.\$ Значения критического параметра λ без односторонних ограничений на перемещения

au	1	1	1	0	2	3	5
σ	3	2	1	1	1	1	1
"1111"	2.235	3.147	5.016	7.129	3.353	2.479	1.618
"2211"	2.210	3.115	4.976	7.031	3.338	2.472	51.615
"2222"	1.268	1.802	2.932	4.000	1.994	1.483	0.973

Если решать приведенные здесь задачи в нелинейной постановке, то они сводятся к построению неявных функций, определяемых негладкими уравнениями. Методы исследования таких задач можно найти в [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рапопорт Л.Б., "Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе" ΠMM , Т.50. Вып. 4. 674–679, (1986).
- [2] Тарасов В.Н., Методы оптимизации в исследовании конструктивно нелинейных задач механики упругих систем, Коми научный центр УрО РАН, (2013).
- [3] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М., Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление, Наука, (1990).

On the MATLAB Finite Element Modelling of an Elastic Plane with a Hole under Tension

Чжао Ш., Пронина Ю.Г.

zhaoshixiang@yandex.ru, y.pronina@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

О конечно-элементной аппроксимации растянутой упругой плоскости с отверстием в пакете MatLab

Наличие несплошностей в элементах конструкций приводит к концентрации упругих напряжений в их окрестности [2, 3] и, соответственно, к снижению ресурса прочности изделия. В качестве концентраторов напряжений могут выступать как отверстия, предусмотренные технологически, так и дефекты, появившиеся в процессе изготовления или эксплуатации. Для оценки напряжений в окрестности отверстий, находящихся на достаточном удалении от внешней границы тела, удобно исследовать напряженно-деформированное состояние бесконечного тела с отверстием соответствующей формы. Это позволяет упростить задачу без существенной потери точности решения вблизи дефекта. В двумерной постановке построен ряд аналитических и численно-аналитических решений задач о бесконечной плоскости с отверстиями различных очертаний. Особые успехи в этой области были достигнуты благодаря трудам Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили, работавших в свое время в Петербургском университете и внедривших методы теории функций комплексной переменной в теорию упругости, чем значительно упростили решение плоских задач. На кафедре ВММДТ эти методы продолжают использоваться авторами [3, 5] и их учениками.

Однако, несмотря на полученные многочисленные аналитические результаты, остается актуальным численный расчет напряженного состояния в окрестности дефектов, в частности, в задачах с заранее неизвестными переменными границами. Подобные задачи возникают, например, при моделировании поведения элементов конструкций, эксплуатируемых в условиях механохимической коррозии [6]. Именно для решения таких задач — в плоской постановке — и проводится настоящее исследование, с целью подбора оптимальных вычислительных параметров для дальнейших расчетов.

При разбиении двумерной области, занятой телом, на конечные элементы гладкая граница аппроксимируется ломаной, состоящей из конечного числа прямолинейных отрезков. Выбору оптимального числа элементов для замены гладкой криволинейной границы надо уделять должное внимание, так как здесь необходимо прийти к компромиссу между различными конкурирующими процессами, вызываемыми уменьшением шага сетки: снижением погрешности аппроксимации гладкой границы и накоплением погрешностей округлений с ростом числа элементов (помимо существенного возрастания временных затрат).

В представленной работе исследуется конечно-элементная аппроксимация упругой плоскости с эллиптическим отверстием, подверженной одноосному растяжению, в пакете MATLAB [1]. В качестве "первичной" расчетной модели рассматривается квадратная пластина с центральным отверстием в условиях плоского напряженного состояния. Контур отвер-

стия задается как N-угольник с вершинами, лежащими на эллипсе требуемых размеров, оси которого, обозначенные через 2a и 2b, параллельны сторонам квадрата. Задание вершин многоугольника ($x_n = a \cos \theta_n$, $y_n = b \sin \theta_n$) производится с равным шагом $2\pi/N$ по параметру θ . Это приводит к неравным длинам сторон многоугольника и удачному сгущению сетки в окрестности вершин эллипса с большой кривизной. Помимо выбора числа N точек разбиения контура отверстия на прямолинейные участки стоит задача выбора размера пластины, позволяющего избежать краевого эффекта от действия ее внешней границы. Длина D внешних прямолинейных сторон пластины выбирается равной $D = 2M\max\{a,b\}$, где число M (целое) подлежит определению. Первые расчеты при различных сочетаниях N и M показали, что на "точности" вычислений сказывается выбор и других параметров сетки, что также подлежит исследованию. Естественно, что при увеличении чисел N и M напряжения в окрестности N-угольного отверстия в пластине $D \times D$, с математической точки зрения, должны стремиться к напряжениям в окрестности эллиптического отверстия в неограниченной плоскости. Поскольку известно точное аналитическое решение последней задачи, то точность аппроксимации при выборе различных расчетных параметров легко оценить сопоставлением полученных численных результатов с известным замкнутым решением.

Аналитические решения задач о бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием при одноосном растяжении интенсивности q были найдены Н. И. Мусхелишвили с помощью конформного отображения. В частности, в вершинах эллипса максимальные (по абсолютной величине) главные напряжения определяются формулами

$$\sigma^a = 2q \ a/b + q, \quad \sigma^b = -q.$$

Здесь σ^b — напряжение в вершинах, расположенных на оси, вдоль которой направлена растягивающая нагрузка, σ^a — напряжение в вершинах на оси, перпендикулярной к направлению действующих усилий.

Для решения краевых задач для уравнений в частных производных в двумерных областях методом конечных элементов (МКЭ) в MATLAB предназначен PDE Toolbox [1]. Несмотря на наличие в данном Toolbox приложения pdetool с графическим интерфейсом пользователя, не требующим глубокого понимания МКЭ, справиться с поставленной задачей только с помощью указанного приложения не представляется возможным [4]. Поэтому необходимо написание собственной программы (с использованием встроенных функций PDE Toolbox).

Ввиду наличия двух осей симметрии в исследуемой "первичной" модели (как в ее геометрии, так и в заданных граничных условиях) целе-

сообразно производить расчеты только для четверти заданной области. Во-первых, это упрощает построение геометрии, так как вместо композиции двух примитивов ("квадрат $D \times D$ минус N-угольник") можно построить только один многоугольник с N/4+3 вершинами. Во-вторых, существенно сокращается количество конечных элементов. Поэтому в качестве окончательной расчетной модели используется именно такой многоугольник. Граничные условия на двух его сторонах, соответствующих внутренним осям симметрии "первичной" модели задаются исходя из условий симметрии задачи: нормальные перемещения на указанных участках равны нулю, в то время как ограничений на другие компоненты не налагается. Стороны многоугольника, соответствующие контуру выреза, и одна из "внешних" сторон (параллельная направлению действия усилий) свободны от нагрузки, т.е. все компоненты напряжения на них равны нулю. На второй "внешней" стороне задаются нормальные напряжения интенсивности q и нулевые касательные усилия. Таким образом, получили смешанную краевую задачу.

В качестве первого приближения для оценки погрешности аппроксимации проводились расчеты относительной погрешности (по сравнению с имеющимся точным решением задачи о плоскости с эллиптическим отверстием) в вершинах эллипса / многоугольника с различными соотношениями полуосей и при различных значениях N и M. В качестве иллюстрации приведена таблица относительных погрешностей (округленных до первой значащей цифры, в процентах) для кругового отверстия. Значения в скобках указаны для "первичной" модели — квадратной плоскости с центральным отверстием — для тех случаев, когда они отличаются от значений, полученных для ее четверти (числа без скобок).

С точки зрения механики деформируемого тела, числа, стоящие в первых строках таблицы и соответствующие значениям M от 3 до 10, называть погрешностью не совсем правомерно, так как они, вообще говоря, соответствуют совсем другой задаче: о конечной пластине с отверстием, в которой, как известно, концентрация напряжений тем больше, чем меньше расстояние от кромки отверстия до внешней границы пластины (отнесенное к размерам отверстия). Поэтому указанные строки таблицы скорее характеризуют то, на сколько процентов (с точностью до первой значащей цифры) возрастает максимальное напряжение при приближении к внешней границе тела.

Таким образом, под относительной погрешностью здесь понимается формальная погрешность аппроксимации решения задачи о бесконечной пластине с гладким эллиптическим отверстием с помощью нашей негладкой расчетной модели. Согласно некоторым рекомендациям, концентрацию напряжений стоит учитывать на расстоянии вплоть до трех—пяти

	N	64	128	256	512	1024
M						
3		90	90	90	90	90
4		50	50	50	50	50
5		30	30	30	30	30
6		20	20	20	20	20
7		10	10	10	10	10
8		(10) 9	10	10	10	10
9		(7) 8	(8) 9	8	8	8
10		5	(6) 9	6	6	6
20		0.4	(1) 2	$(1) \ 2$	(1) 2	$(1) \ 2$
30		$(0.3) \ 0.6$	$(0.1) \ 0.4$	$(0.2)\ 0.5$	$(0.5) \ 0.2$	0.5
40		$(0.4)\ 1$	$(0.1) \ 0.2$	$(0.2)\ 0.1$	$(0.1) \ 0.2$	$(0.2)\ 0.05$
50		$(0.3)\ 1$	$(0.1) \ 0.5$	$(0.1) \ 0.2$	$(0.2) \ 0.7$	$(0.03) \ 0.7$
60		(0.9) 2	0.4	$(0.4)\ 0.2$	$(0.1) \ 0.2$	$(0.4) \ 0.2$
70		1	$(0.6) \ 0.2$	$(0.5) \ 0.2$	$(0.2) \ 0.1$	$(0.2) \ 0.1$
80		$(0.7)\ 1$	$(0.6) \ 0.2$	$(0.3) \ 0.1$	$(0.2) \ 0.1$	$(0.2) \ 0.1$
90		1	$(0.4) \ 0.2$	$(0.2) \ 0.3$	$(0.3) \ 0.08$	$(0.2) \ 0.08$
100		1	$(0.2) \ 0.4$	0.2	$(0.3) \ 0.4$	$(0.4)\ 0.2$

Таблица 1. Относительная погрешность в процентах

характерных размеров отверстия от его кромки. Из таблицы можно увидеть, что эффект от взаимодействия внешней и внутренней границ для M=10 не превышает 10%. Для эллиптических отверстий с различными соотношениями полуосей зона распространения этого эффекта может варьироваться. Интересно, что в данном примере при N=64 и M=20 погрешность становится менее 1%, но с увеличением либо N, либо M немного возрастает (вследствие увеличения объема вычислений). Подобная картина наблюдается и для других отверстий. Заметим, что для целей дальнейших исследований выбор N меньшим 64 не целесообразен. Погрешность вычислений также чувствительна к выбору параметров сетки Hmax, Hgrad и других.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №16-08-00890.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н., MATLAB 7, СПб.: БХВ-Петербург, (2010).
- [2] Гасратова Н.А., Шамина В.А., "Решение в напряжениях линейной осесимметричной задачи для сферы и упругого пространства со сферической по-

- лостью", Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия., No. 2, 122–128 (2008).
- [3] Греков М.А., "Математика и механика внутренних и поверхностных дефектов", *Процессы управления и устойчивость*, 3, No. 1, 19–44 (2016).
- [4] Колпак Е.П., Вычисления в МАТLAB, Казань: ООО "Бук" (2016).
- [5] Пронина Ю.Г., "Краевая дислокация и сосредоточенная сила в упругой полуплоскости с отверстиями и краевыми вырезами", Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия., No. 4, 120–124 (2012).
- [6] Седова О.С., Пронина Ю.Г., "О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов", Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления., No. 2, 33–44 (2016).

On the Coupled Orbit-Attitude Control Motion of a Celestial Body in the Neighborhood of the Collinear Libration Point L1 of the Sun-Earth System

Шиманчук Д.В.

d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

Об управляемом поступательно-вращательном движении небесного тела в окрестности коллинеарной точки либрации L1 системы Солнце-Земля

В рамках задачи двух тел было показано, что в случае, когда кинетическая энергия вращения небесного тела достаточно мала по сравнению с работой внешних сил, то движение небесного тела при определенном выборе его начальной ориентации будет носить либрационный характер — небесное тело будет колебаться около некоторого устойчивого положения относительного равновесия [1]. Определение таких положений равновесия и исследование движения в их окрестности являются актуальными задачами и представляют важное значение для решения проблем стабилизации и ориентации небесных тел при помощи моментов внешних сил.

При совместном рассмотрении поступательного и вращательного движения небесного тела вращательное движение относительно центра масс существенно зависит от положения центра масс в космическом пространстве, но с другой стороны ориентация небесного тела может оказать влияние на поступательное перемещение. Например, ориентацией солнечного

паруса можно изменять результирующий вектор светового давления и тем самым непосредственно влиять на перемещение солнечного паруса.

В работе рассматривается орбитальное движение небесного тела в гравитационном поле двух притягивающих центров — Земли массы M_1 и Солнца массы M_2 . Такое движение небесного тела может быть описано математической моделью круговой ограниченной задачи трёх тел.

Известно, что уравнения ограниченной задачи трёх тел имеют пять стационарных решений, которые в небесной механике называют точками либрации или точками Лагранжа: коллинеарные точки либрации L_1 , L_2 , L_3 — неустойчивые положения равновесия, треугольные точки либрации L_4 , L_5 — устойчивые положения равновесия при определенном соотношении масс притягивающих центров, это условие устойчивости в линейном приближении можно представить в виде [2]

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} < \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0,0385208.$$

Ясно, что точки либрации являются модельными понятиями круговой ограниченной задачи трёх тел, но их свойства определяют качественный характер движения небесного тела, который в реальности происходит под действием многих возмущающих факторов. В настоящий момент развитие космонавтики позволяет реализовывать различные проекты, которые предполагают использование окрестностей коллинеарных точек либрации и с учетом их свойств становится очевидной актуальность задачи стабилизации и удержания небесного тела в их окрестности. С другой стороны свойство неустойчивости коллинеарных точек либрации может способствовать эффективному маневрированию в околоземном космическом пространстве, которое могут происходить на достаточно большом промежутке времени [3]-[5].

Для описания поступательного движения небесного тела в работе используется модифицированная математическая модель круговой ограниченной задачи трёх тел — модель хилловского приближения круговой ограниченной задачи трёх тел [6]. Для описания вращательного орбитального движения небесного тела относительно его центра масс используются динамические уравнения Эйлера [7] и кватернионное кинематическое уравнение [8]. Ориентация небесного тела определяется в кениговой системе координат при помощи параметров Родрига—Гамильтона.

В работе исследуются вопросы существования малых колебаний небесного тела вблизи положений равновесия, влияния управляемого поступательного движения небесного тела вблизи коллинеарной точки либрации на его вращательное движение в окрестности положений относительного равновесия. Поскольку коллинеарная точка либрации является

неустойчивой, то для удержания небесного тела в её окрестности применяется управляющее воздействие, которое непосредственно влияет на поступательное движение. Это управляющее воздействие выбирается из условия оптимального демпфирования специально введенной функции от фазовых координат центра масс небесного тела — «функции опасности» [9], [10].

Представленные уравнения поступательно-вращательного движения могут быть использованы для изучения движения естественных и искусственных небесных тел, так например, если в начальный момент космический аппарат находится в окрестности положения относительного равновесия вблизи фазового пространства коллинеарной точки либрации, а затем совершает маневр, обеспечивающий мониторинг околоземного космического пространства, тогда для выхода из окрестности коллинеарной точки либрации можно использовать малую тягу, которая может быть обеспечена необходимой ориентацией небесного тела относительного набегающего потока солнечного ветра. И это управляющее воздействие, как было отмечено ранее, может оказаться эффективным, т.е. обеспечивающим при малых энергетических затратах существенное изменение положения центра масс космического аппарата в пространстве конфигураций.

Результаты исследования расширяют возможности орбитального управляемого движения в окрестности коллинеарной точки либрации и могут быть полезны на начальном этапе решения проблемы кометно-астероидной опасности, когда предполагается ударное воздействие на потенциально опасное небесное тело с целью изменения его траектории и предотвращения столкновения с Землёй. Здесь небесное тело – ударник в начальный момент предлагается удерживать в окрестности коллинеарной точки либрации, ввиду малых значений сил и моментов гравитации.

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, проект № 9.37.345.2015.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белецкий В.В., Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле, М.: Изд-во МГУ, (1975).
- [2] Маркеев А.П., Точки либрации в небесной механике и космодинамике, М.: Наука, (1978).
- [3] Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., "Построение траектории возвращения в окрестность коллинеарной точки либрации системы Солнце-Земля", Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления, Вып. 2, (2013).

[4] A. Shmyrov, D. Shymanchuk, "Maneuvering in near-Earth space with the use of the collinear libration points", 2015 International Conference on Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, art. no. 7106777, (2015).

- [5] A. Shmyrov, D. Shymanchuk, L. Sokolov, "The interception problem of a celestial body with the use of the collinear libration points", 2015 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 - Proceedings, art. no. 7342068, (2015).
- [6] Шмыров В.А., "Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L₁", Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления, Вып. 2, (2005).
- [7] Голубев Ю.Ф., "Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела", *Пре*принты ИПМ им. М.В.Келдыша, N 39, (2013).
- [8] Маркеев А.П., Теоретическая механика: Учеб. пособие для университетов, М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, (1990).
- [9] Шмыров А.С., Шмыров В.А., "Оптимальная стабилизация орбитального движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 ", Четвертые Поляховские чтения: избр. труды. СПб.: Изд-во «ВВМ», (2006).
- [10] Шиманчук Д.В., "Моделирование орбитального управляемого движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 ", Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления, Вып. 3, (2010).

AUTHOR INDEX 265

AUTHOR INDEX

A Abbasov M	Matrosov A 197, 201, 203 Mishra S
Alawdin P	Mizintseva M
Antipin A 91	Mordukhovich B33
Arutyunov A	
Averboukh Yu95	0
	Ovcharova N 206
В	Ovsyannikov D 106
Babadzanjanz L 190	D
Bure V	P P P P P P P P P P P P P P P P P P P
	Pallaschke D
C	Pandey Yo
Chernousko F 195	Pavilaynen G
F	Pilyugin S. 108 Polovinkin E. 33
Firyulina O	Pototskaya I
Fominyh A	Prudnikov I
rommyn A	Pupysheva Yu
${f G}$	i upysneva i u
Goloskokov D197, 201	${f S}$
Goncharova M 47	Shirunov G
Gorokhovik V 17	Singh Ya 39
Gorokhovik V	Smirnova S 40
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. .98 T Taynitskiy V. 113 U U
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98 T Taynitskiy V. 113
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. .98 T Taynitskiy V. .113 U U Urbańska K. .187
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98 T Taynitskiy V. 113 U Urbańska K. 187 Urbański R. 20 Uteshev A. 47
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98 T Taynitskiy V. 113 U Urbańska K. 187 Urbański R. 20 Uteshev A. 47
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98 T Taynitskiy V. 113 U Urbańska K. 187 Urbański R. 20 Uteshev A. 47 V Veremey E. 117
Grzybowski J. 20 Gubar E. 113 I Ivanov G. 24 K Karelin V. 98 Khoroshilova E. 100 Kumar M. 200 Kvitko A. 103 L Lizunova N.A. 137 Lopushanski M. 28	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98 T Taynitskiy V. 113 U Urbańska K. 187 Urbański R. 20 Uteshev A. 47
Grzybowski J	Smirnova S. 40 Strekalovsky A. 43 Subbotina N. 110 Svirkin M. 98 T Taynitskiy V. 113 U Urbańska K. 187 Urbański R. 20 Uteshev A. 47 V Veremey E. 117

266 AUTHOR INDEX

${f Z}$	И
Zhu Q	Иванов Д.А179
Zhukovskiy S 15	
	K
A	Камачкин А.М
Александров А.Ю 210	Королев В.С
Андрюкова В.Ю	Косов А.А
Апанович Д.В	Кривовичев Г.В244
Б	\mathbf{M}
Балыкина Ю.Е	Марнопольская Е.С 244
Баран И.В	Мышков С.К
Баранов О.В125	
Барсегян В.Р 127	O
Бильченко Г.Г 218, 224, 229	Орлов И.В 58, 62
Бильченко Н.Г 224, 229	Осмоловский Н.П 54
Бутырский Е.Ю 130	П
	Перегудин С.И247, 250
В	Перегудин Э.С247, 250
Васильев В.В	Подвальный С.Л157
Виноградова Т.К	Понкратова К.И
Вишневский В.Э	Провоторов В.В
Волошин М.В	Пронина Ю.Г
Воронов В.А	11poninia 10.11200
Γ	P
Гончарова Е.В	Родин А.С
1 on Impose 2.2	${f C}$
Д	Самсонюк О.Н 162, 166
Давыденко А.А	Свиркин М.В
Дмитрук А.В 54	Смирнов А.Н
_	Смирнов М.Н
E	Смирнов Н.В125, 169
Екимов А.В144	Смирнова М.А
Ершов А.А81	Смирнова Т.Е
Ж	Соколов Б.В
Жабко А.П	Сорокин С.П
7114010 71.11	Срочко В.А
3	Старицын М.В 162, 175, 232
Зараник У.П146	Старков В.Н
Зубов С.В150	Степенко Н.А
•	Стонякин Ф.С

AUTHOR INDEX 267

${f T}$
Тарасов В.Н 213, 252
Тимошин С.А
Трофимова И.В179
\mathbf{y}
Успенский А.А81
Ушаков В.Н81
X
Хачатрян Р.А84
Хитров Г.М
Хлопин Д.В86
Холодова С.Е 247, 250
Хрящев С.М
**
Ч
Чжао Ш. $\dots\dots\dots$ 256
Чижова О.Н146
III
<u>Шамберов В.Н.</u>
Шиманчук Д.В

Научное издание

КОНСТРУКТИВНЫЙ НЕГЛАДКИЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Тезисы докладов международной конференции

Часть первая

Компьютерная верстка: Г.Ш. Тамасян Эмблема конференций CNSA разработана в 2012 году В. Ф. Демьяновым и Ю. Ю. Пупышевой