

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**КОНСТРУКТИВНЫЙ НЕГЛАДКИЙ АНАЛИЗ
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ**

Тезисы международной конференции
«Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы»,
посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова
22 – 27 мая 2017 г.

Часть вторая



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2017

EULER INTERNATIONAL MATHEMATICAL INSTITUTE
SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

**CONSTRUCTIVE NONSMOOTH ANALYSIS
AND RELATED TOPICS**

Abstracts of the International Conference
«Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics»
Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov
May 22 – 27, 2017

Part II



St. Petersburg
2017

УДК 519.85

ББК 22.18

Т 77

Т 77 Тезисы докладов международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова. Часть II. — СПб.: Издательство ВВМ, 2017. 304 с.

ISBN 978-5-9651-1059-9

Настоящее издание содержит тезисы докладов, представленных на международную конференцию «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященную памяти профессора В. Ф. Демьянова (CNSA-2017, г. Санкт-Петербург, 22–27 мая 2017 г.).

Сборник состоит из двух частей, разбитых на тематические секции. Во вторую часть включены тезисы докладов из следующих секций: недифференцируемая оптимизация, приложения негладкого анализа, негладкие методы в теории игр, нелинейные чебышевские приближения и негладкая оптимизация, полиэдральный анализ и полиэдральная оптимизация. Имеется авторский указатель.

Книга представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Конференция проведена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 17-01-20148-г).

УДК 519.85

ББК 22.18

Ответственные за выпуск:

В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян

Подготовили оригинал-макет:

Г. Ш. Тамасян, М. В. Уdot

ISBN 978-5-9651-1059-9

© Авторы, 2017

**International Conference
CONSTRUCTIVE NONSMOOTH ANALYSIS
AND RELATED TOPICS**

Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov

Saint Petersburg, May 22–27, 2017

ORGANIZERS

The Euler International Mathematical Institute

Saint Petersburg State University

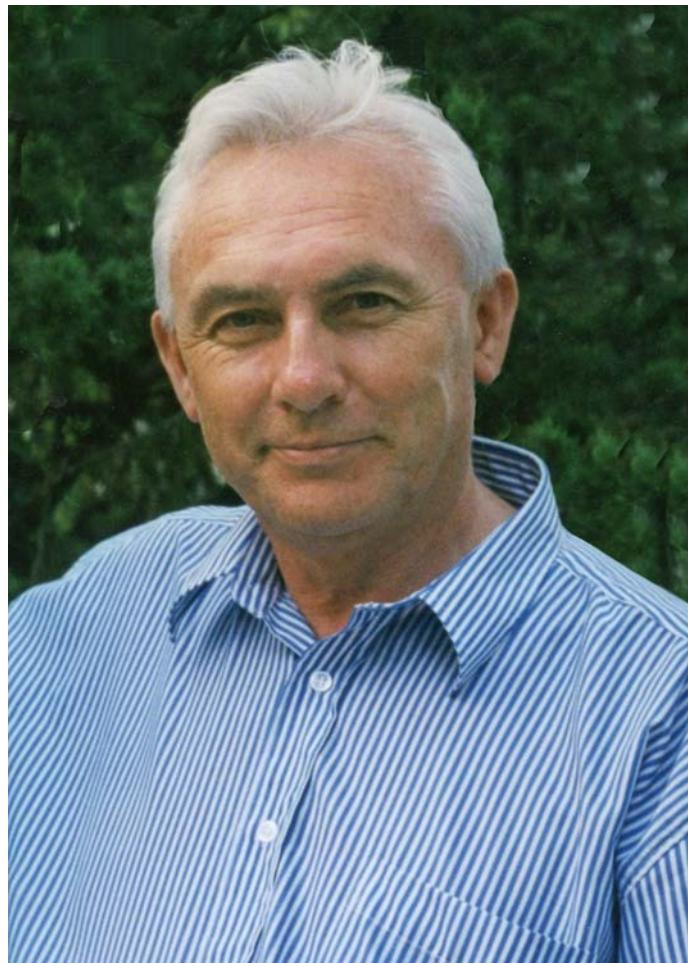
SPONSORED BY

Russian Foundation for Basic Research

Organizers of the conference are: Alexander B. Kurzhanski (Lomonosov Moscow State University, chairman), Vassili N. Malozemov (St. Petersburg State University, co-chair), Lyudmila N. Polyakova (St. Petersburg State University, co-chair), Anna G. Golovkina (St. Petersburg State University), Vladimir V. Karelkin (St. Petersburg State University), Grigoriy Sh. Tamasyan (St. Petersburg State University), Nadia V. Zalesskaya (Euler International Mathematical Institute, secretary), Tatiana V. Vinogradova (Euler International Mathematical Institute, secretary)

The International Program Committee: A.V. Arutyunov (Russia), A. Bagirov (Australia), F.L. Chernous'ko (Russia), S. Dempe (Germany), G. Di Pillo (Italy), S.I. Dudov (Russia), N.V. Egorov (Russia), Y.G. Evtushenko (Russia), M. Gaudioso (Italy), F. Giannessi (Italy), V.V. Gorokhovik (Belarus), J. Gwinner (Germany), A.D. Ioffe (Israel), M.Yu. Khachai (Russia), O.V. Khamisov (Russia), A. Kruger (Australia), A.B. Kurzhanski (Russia), S.S. Kutateladze (Russia), Yu. Ledyaev (USA), G.A. Leonov (Russia), M.M. Makela (Finland), V.N. Malozemov (Russia, chairman), V.V. Mazalov (Russia), B. Mordukhovich (USA), Yu.E. Nesterov (Belgium), D.A. Ovsyannikov (Russia), D. Pallaschke (Germany), L.A. Petrosyan (Russia), E.S. Polovinkin (Russia), B.T. Polyak (Russia), P.I. Stetsyuk (Ukraine), A.S. Strekalovski (Russia), M. Thera (France), V.M. Tikhomirov (Russia), E.I. Veremey (Russia), A.P. Zhabko (Russia), V.I. Zorkaltsev (Russia), V.V. Zhuk (Russia).

Technical Program Committee: L.A. Petrosyan (St. Petersburg State University, Russia, chairman), V.N. Malozemov (St. Petersburg State University, Russia, vice-chairman), L.N. Polyakova (St. Petersburg State University, Russia, vice-chairman), N.V. Egorov (St. Petersburg State University, Russia), A.A. Lisenkov (St. Petersburg State Electrotechnical University «LETI», Russia), V.V. Luchinin (St. Petersburg State Electrotechnical University «LETI», Russia), D.A. Ovsyannikov (St. Petersburg State University, Russia), V.B. Yankevich (St. Petersburg State Electrotechnical University «LETI», Russia).



Владимир Федорович Демьянов
(18.08.1938 – 18.04.2014)

CONTENTS. Part II.

Section 4. Nondifferentiable Optimization

<i>Bayandina A., Gasnikov A., Dvurechensky P.</i>	
Mirror Descent for Constrained Strongly Convex Optimization	13
<i>Dempe S., Dinh N., Dutta J., Pandit T.</i>	
Simple Bilevel Programming and Extensions: Theory and Algorithms	15
<i>Dolgopolik M.</i>	
Convergence Analysis of the Method of Codifferential Descent	17
<i>Dolgopolik M., Fradkov A.</i>	
Nonsmooth Speed-Gradient Algorithms for Control of Oscillatory Systems	21
<i>Konnov I.</i>	
Iterative Methods for Mixed Variational Inequalities	23
<i>Kosolap A.</i>	
Method of Successive Remove Modules in Problems of Nonsmooth Optimization	27
<i>Koulaguin V.</i>	
On Minimum of Function with Extra Variable	29
<i>Laptin Yu.</i>	
Exact Penalty Functions in Decomposition Schemes in Variables for Convex Optimization Problems	31
<i>Orekhov A.</i>	
Undifferentiated Optimization of Data Sample	33
<i>Pardalos P.</i>	
On the Passage from Local to Global Optimization: New Challenges in Theory and Practice	38
<i>Semenov V.</i>	
A Variant of Mirror Descent Method for Solving Variational Inequalities	39
<i>Strelkalovsky A., Minarchenko I.</i>	
On Local Search in d.c. Optimization	44
<i>Vorontsova E.</i>	
Interval Regularization, Recognizing Functional, and Non-Smooth Optimization Technique	48

<i>Zabotin I., Shulgina O., Yarullin R.</i>	
Cutting Method with Approximating the Feasible Set and the Epigraph of the Objective Function	52
<i>Zhadan V.</i>	
Simplex-Like Algorithms for Linear Semidefinite Optimization	55
<i>Ерохин В.И.</i>	
A Stable Solution of Linear Programming Problems with the Approximate Matrix of Coefficients	60
<i>Журбенко Н.Г.</i>	
On a Family of Subgradient Algorithms with Space Transformation	63
<i>Заботин И.Я., Казаева К.Е.</i>	
Метод отсечений с использованием штрафных функций	66
<i>Зоркальцев В.И.</i>	
Algorithms of Interior Point Method: Results of Development and Research	68
<i>Мезенцев Ю.А.</i>	
Binary Cut-and-Branch Method for Solving Mixed Integer Programming Problems	74
<i>Мезенцев Ю.А., Эстрайх И.В.</i>	
Problems and Optimization Algorithms of Schedules of Parallel-Serial Systems with Undefined Service Routes	79
<i>Muxeev C.E.</i>	
Estimates of Rate Convergence via Half-Derivatives	83
<i>Muxeev C.E.</i>	
Statistical Evaluation of the Exact Relaxation Method	87
<i>Солодуша С.В.</i>	
To the Solution of One Class of Systems of the Polynomial Equations of Volterra First Kind by Newton Method	92
<i>Степенок П.И.</i>	
Shor's r -Algorithms for Separable Quadratic Programming Problems	95
<i>Тамасян Г.Ш., Чумаков А.А., Просолупов Е.В.</i>	
One Modification of the Method of Hypodifferential Descent in the Problem for Finding a Point of an Ellipsoid Nearest to the Origin .	99
Section 5. Applications of Nonsmooth Analysis	
<i>Balykina Yu., Lezhnina E., Shavidze G.</i>	
Ambulance Resources Reallocation in St. Petersburg Using Imitation Modelling Approach	101

<i>Bure V., Mitrofanova O.</i>	
Analysis of Color Characteristics of Plants Using Aerial Photography	104
<i>Bure V., Staroverova K.</i>	
Methods of Cluster Analysis for Detection of Homogeneous Groups of Healthcare Time Series	107
<i>Gubar E., Kumacheva S., Zhitkova E.</i>	
Evolutionary Behaviour of Taxpayers in the Model of Information Dissemination	110
<i>Gwinner J.</i>	
An Optimization Approach to Parameter Identification in Nonsmooth Boundary Value Problems	113
<i>Krylatov A., Shirokolobova A., Zakharov V.</i>	
Non-smooth Resource Allocation Problem	116
<i>Li X., Wang H., Shen Z.</i>	
A Method to Determine the Local Optimal Path of Ship Navigation for Convex Obstacle	119
<i>Liu H., Wang H., Shen Z.</i>	
An Improved A* Algorithm for Fuel-efficient Ship Weather Routing	122
<i>Michaylov A., Michaylov V., Murzabekova G.</i>	
Inverse Dynamical and Spectral Problem for the One-Dimensional Dirac System on a Tree	124
<i>Noghin V.</i>	
Approximation of Convex Fuzzy Sets	127
<i>Provorotov V.</i>	
Weak Solvability of Nonlinear Initial Boundary Value Problem with Distributed Parameters in a Netlike Region	129
<i>Senov A.</i>	
Projection-Approximation-based Quasi-Newton method for Nonsmooth Convex Optimization	134
<i>Sotnikova M., Veremey E., Korovkin M.</i>	
Optimizing Time and Fuel Consumption for the Transoceanic Routes of Ships	136
<i>Wang Ya., Wang H., Zhu X.</i>	
Ship Weather Routing That Accounts for Ship Stability and Efficient Ship Routing Based on Modified Genetic Algorithm	141
<i>Головкина А.Г., Кудинович И.В.</i>	
Characteristics Optimization for Accelerator Driven Cascade Subcritical Reactor	144

<i>Зыкина А.В., Канева О.Н.</i>	
Complementarity Problem for Decision-Making Modeling in Transport Problems	146
<i>Иванов Г.Г., Алферов Г.В., Ефимова П.А.</i>	
Integrability of Nonsmooth One-Variable Functions	149
<i>Камалов М.В., Добрынин В.Ю., Балыкина Ю.Е.</i>	
Online Optimization Algorithms for Multi-Armed Bandit Problem	153
<i>Канева О.Н., Атингк Д.К., Зыкина А.В.</i>	
Comparative Analysis of Methods for Solving Linear Stochastic Problems	158
<i>Колесин И.Д.</i>	
Two-component Immunization Control	161
<i>Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.</i>	
Algorithms of Planar Velocity Problem Solutions Construction in Case of Non Convex Target Set	163
<i>Малозёмов В.Н., Плоткин А.В.</i>	
Strict Polynomial Separation of Two Sets	167
<i>Новоселов В.С., Королев В.С.</i>	
Stochastic Model of the Universe Matter	168
<i>Степецок П.И.</i>	
2d-Ellipsoid of Optimal Volume and Its Applications	173
<i>Тамасян Г.Ш., Аббасов М.Э., Присолупов Е.В., Чумаков А.А.</i>	
Comparative Study of Algorithms for Projecting a Point onto an Ellipsoid	176
<i>Баймурзина Д.Р., Гасников А.В., Гасникова Е.В., Дзуреченский П.Е., Ериков Е.И., Лагуновская А.А.</i>	
Huge-Scale Non-Smooth Convex Optimization in Traffic Flow Modeling	178

Section 6. Nonsmooth Methods in Game Theory

<i>Barbagallo A., Bianco G.</i>	
Stochastic Variational Formulation for the General Time-Dependent Cournot-Nash Principle	181
<i>Baskov O., Noghin V.</i>	
Software for Pareto Set Reduction	185
<i>Chistyakov S., Vasetsov M.</i>	
On Some Properties of Superposition of Optimality Principles on the Space of TU-Games	188

<i>Ershov D.</i>	
Dynamic Stability of the Shapley Value in the Differential Resource Extraction Game	191
<i>Gromova E., Malakhova A., Marova E.</i>	
On the Superadditivity of a Characteristic Function in Cooperative Differential Games with Negative Externalities	196
<i>Konnov I.</i>	
Shares Allocation Methods for Game Problems with Joint Constraints	199
<i>Kuzyutin D., Nikitina M.</i>	
On the Stability of a Cooperative Agreement in Multistage Multicriteria Game	202
<i>Mazalov V.</i>	
Wardrop Equilibrium for Networks reconsidered	206
<i>Parilina E., Sedakov A.</i>	
Stable Cooperation in Oligopoly	206
<i>Petrosian O., Nastych M.</i>	
Differential Games with Moving Informational Horizon and Non-transferable Utility	209
<i>Petrosyan L., Chistyakov S., Pankratova Ya.</i>	
Existence of Strong Nash Equilibrium in Repeated and Multistage Games	212
<i>Yin L.</i>	
Dynamic Shapley Value in the Game with Spanning Forest	215
<i>Булгакова М.А., Петросян Л.А.</i>	
Strongly Time-Consistent Core in Multistage Game	220
<i>Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.</i>	
Conception of Coalitional Equilibrium in a Three-Person Game	224
<i>Кудрявцев К.Н., Жуковский В.И., Стабулим И.С.</i>	
Computing the Pareto-Optimal Nash Equilibrium in Bimatrix Game	229
<i>Лебедев В.Н.</i>	
A Search Aspects of a Cyclic Games	231
<i>Ложкин А.</i>	
Two Stage Network Game in Passengers Transportation Problem .	233
<i>Малафеев О.А., Рединских Н.Д.</i>	
Quality Estimation of the Geopolitical Actor Development Strategy	237
<i>Петров H.H.</i>	
On a Problem of Group Pursuit with Phase Constraints and Fractional Derivatives	240

<i>Ухоботов В.И., Изместьев И.Б.</i>	
Impulse Differential Game with Fixed Time and One-dimensional Aim	243
Section 7. Nonlinear Chebyshev Approximations and Nonsmooth Optimization	
<i>Kamal A.</i>	
Finite Dimensional Chebyshev Subspaces of Classical Banach Spaces II	247
<i>Patel V., Singh V.</i>	
Convergence Analysis of Two-dimensional Wavelet for Nonlinear Partial Integro-Differential Equation	248
<i>Singh H., Pandey R.K.</i>	
Numerical Method Based on Chebyshev polynomial for Solving Non- linear Fractional Variational Problems	249
<i>Singh S., Singh V.</i>	
Application of Chebyshev Wavelet Approximation for Nonlinear Partial Differential Equation Arising From Viscoelasticity	250
<i>Singh V.</i>	
Application of Wavelets for Complex Partial Differential Equations using Collocation Method	250
<i>Бутырский Е.Ю., Васильев В.В., Понкратова К.И.</i>	
Spline-Approximation in the Task Status Estimation of Nonlinear Dynamic Systems	251
<i>Дудов С.И., Осинцев М.А.</i>	
Stability of Best Approximation of Convex Body by a Ball of Fixed Radius	254
<i>Гхашиш М.М., Малозёмов В.Н.</i>	
Duality in Problems of Best Rational Approximation	257
<i>Жук В.В.</i>	
Estimates of the Best Approximations of Periodic Functions	259
<i>Жук В.В., Тумка О.А.</i>	
Some Exact Estimates for the Derivatives of Trigonometric Polynomials	262
<i>Зоркальцев В.И.</i>	
Chebyshev and Others Projections of Point on Polyhedron	264
<i>Малозёмов В.Н., Плоткин А.В.</i>	
The Example of Best Uniform Approximation in Multidimensional Space	270

Section 8. Polyhedral Analysis and Polyhedral Optimization

*Balashov M.*Polyhedral Approximations in R^n 272*Gabidullina Z.*

An Algorithm for Data Analysis via Polyhedral Optimization 274

Gabidullina Z.

Solving of a Projection Problem for Convex Polyhedra Given by a System of Linear Constraints 278

Khachay M.

Efficient Approximability of The Majoritary Polyhedral Separability 280

Polyakova L., Popova M.

About Constructing a Dual Polyhedral Cone in Three Dimensional Space 283

Ponomarev A.

Polyhedral Estimation of the Controllability Region of a Nonlinear System 285

Деменков М.Н.

Zonotopes, linear inequalities and polyhedral projection 288

Федомов В.П.

Improper Faces of Convex Compact Sets in the Context of Galois Duality 293

Филимонов Н.Б.

Polyhedral Trend in Modern Control Theory 296

AUTHOR INDEX 301

Section 4

Nondifferentiable Optimization

Mirror Descent for Constrained Strongly Convex Optimization

Bayandina A., Gasnikov A., Dvurechensky P.

anast.bayandina@gmail.com, avgasnikov@gmail.com,

pavel.dvurechensky@gmail.com

Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy per., Dolgoprudny,
Moscow Region, 141701, Russia; Weierstrass Institute for Applied Analysis and
Stochastics, Mohrenstrasse 39, 10117 Berlin, Germany

We applied the restart technique to the Mirror Descent algorithm for constrained convex optimization problems considered in [1], [2]. Convergence rates were obtained for the case of both strongly convex objective and constraints. As opposed to [3] where the similar rates of convergence on average were obtained, the problem is considered in non-euclidean setup. Moreover, the optimization set is not bounded. Large deviations convergence estimates were obtained as the main result for the case of bounded optimization set.

Let E be a n -dimensional real vector space with some fixed norm $\|\cdot\|$. Consider the optimization problem

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in Q}, \quad (1)$$

$$\text{s.t. } g(x) \leq 0. \quad (2)$$

Here $Q \subset E$ is a closed convex set and functions $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ and $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ are strongly convex with respect to the norm $\|\cdot\|$ with a convexity parameter μ . We consider both f and g to be subdifferentiable on Q .

Assume that we are equipped with some probability space (Ω, \mathcal{F}, P) . Let $\{\xi^k\}$ be a sequence of i.i.d random vectors such that any ξ^k is \mathcal{F} -measurable.

Consider a stochastic convex first-order optimization setting. Given a point $x^k \in Q$, the oracle produces observations $\nabla_x f(x^k, \xi^k)$ and $\nabla_x g(x^k, \xi^k)$ of subgradients of f and g respectively. Also the oracle is unbiased, i. e. $\mathbb{E}_{\xi^k}[\nabla_x f(x^k, \xi^k)] = \nabla f(x^k)$ and $\mathbb{E}_{\xi^k}[\nabla_x g(x^k, \xi^k)] = \nabla g(x^k)$. Moreover, we have access to the value $g(x^k)$.

Choosing a distance-generating function $d(x) : Q \rightarrow \mathbb{R}$ which is continuous and 1-strongly convex with respect to $\|\cdot\|$, we define, after [4], the Bregman distance from $x \in Q$ to $y \in Q$ as

$$V_x(y) := d(y) - \langle \nabla d(x), y - x \rangle - d(x). \quad (3)$$

Let x_* be the precise solution to the problem (1), (2). Take the starting point

$$x^0 = \arg \min_{x \in Q} d(x). \quad (4)$$

Define a dimension-dependent value

$$\omega_n = \sup_{y \in Q} \frac{2V_{x^0}(y)}{\|y - x^0\|^2}. \quad (5)$$

The following theorem states the rate of convergence on average of the proposed algorithm.

Theorem 1. Suppose f and g in the problem (1), (2) are μ -strongly convex with respect to the norm $\|\cdot\|$. Suppose for all $x \in Q$ and $\xi \in \{\xi^k\}$ it holds that

$$\mathbb{E}_{\xi^k} [\|\nabla_x f(x, \xi)\|_*^2] \leq M_f^2, \quad \mathbb{E}_{\xi^k} [\|\nabla_x g(x, \xi)\|_*^2] \leq M_g^2. \quad (6)$$

With the total number of oracle calls equal to

$$N > \frac{8M^2\omega_n}{\mu\varepsilon}, \quad (7)$$

where

$$M = \max\{M_f, M_g\}, \quad (8)$$

the point \tilde{x} , generated by the proposed algorithm, satisfies

$$\mathbb{E}[f(\tilde{x})] - f(x_*) \leq \varepsilon, \quad g(\tilde{x}) \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Let us now assume that the set Q is bounded. Denote the diameter

$$R_0 := \sup_{x, y \in Q} \|x - y\|. \quad (10)$$

The following theorem gives the rate of convergence in the case of large deviations for the other proposed algorithm based on [5].

Theorem 2. Suppose f and g in the problem (1), (2) are μ -strongly convex with respect to the norm $\|\cdot\|$. Suppose for all $x \in Q$ and $\xi \in \{\xi^k\}$ it holds that

$$\|\nabla_x f(x, \xi)\|_*^2 \leq M_f^2, \quad \|\nabla_x g(x, \xi)\|_*^2 \leq M_g^2. \quad (11)$$

With the total number of oracle calls equal to

$$N > \frac{324M^2\omega_n}{\mu\varepsilon} \left[\ln \log_2 \frac{\mu R_0^2}{2\varepsilon} + \ln \frac{1}{\sigma} \right], \quad (12)$$

where

$$M = \max\{M_f, M_g\}, \quad (13)$$

the point \tilde{x} , generated by the proposed algorithm for large deviations, satisfies

$$\mathbb{P}\{f(\tilde{x}) - f(x_*) \leq \varepsilon, g(\tilde{x}) \leq \varepsilon\} \geq 1 - \sigma. \quad (14)$$

References

- [1] A. Anikin, A. Gasnikov, A. Gornov, “Randomization and sparsity in huge-scale optimization problems by the example of mirror descent”, *Trudy MIPT*, 8, 11-24 (2016).
- [2] A. Bayandina, A. Gasnikov, E. Gasnikova, S. Matsievskiy, “Primal-dual mirror descent in constrained stochastic optimization problems”, *Automation and Remote Control*, submitted, (2016).
- [3] G. Lan, Z. Zhou, “Algorithms for stochastic optimization with expectation constraints”, arXiv:1604.03887v2, (2016).
- [4] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *Lectures on Modern Convex Optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics, (2001).
- [5] A. Juditsky, Yu. Nesterov, “Deterministic and Stochastic Primal-Dual Subgradient Algorithms for Uniformly Convex Minimization”, *Stochastic Systems*, 4, No. 1, 44-80 (2014).

Simple Bilevel Programming and Extensions: Theory and Algorithms

Dempe S., Dinh N., Dutta J., Pandit T.

dempe@tu-freiberg.de, ndinh02@yahoo.fr, jdutta@iitk.ac.in,
tpandit@iitk.ac.in

TU Bergakademie Freiberg, Institute of Numerical Mathematics and Optimization, 09506 Freiberg, Germany; Department of Mathematics, International University, Vietnam National University-Ho Chi Minh City, Vietnam; Economics Group, Department of Humanities and Social Sciences, Indian Institute of Technology, Kanpur, India; Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Technology, Kanpur, India

Let S denote the solution set of a convex optimization problem

$$S = \operatorname{argmin} \{h(x) : x \in C\},$$

where $C \subset \mathbb{R}^n$ is a closed convex set and $f, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ are real-valued convex functions. The simple bilevel optimization problem is

$$\min\{f(x) : x \in S\}. \quad (1)$$

This problem has been formulated e.g. in [3]. To investigate this convex optimization problem, the lower level problem needs to be transformed. If $\alpha = \min\{h(x) : x \in C\}$ denote the optimal value of this problem, (1) is equivalent to

$$\min\{f(x) : h(x) \leq \alpha, x \in C\}.$$

Slater's regularity condition is violated for this convex optimization problem. If we use the normal cone $N_C(x)$, its graph $\text{gph } N_C$ and $F(x) = (x, -\nabla h(x))^\top$

$$C = \{x \in C : F(x) \in \text{gph } N_C\}$$

is derived. Applying variational analysis to the resulting problem, a necessary optimality condition is obtained which is not sufficient [1]. Using a variational inequality to express the set S , a simple MPEC

$$\min\{f(x) : \psi_y(x) \leq 0 \forall y \in C, x \in C\} \quad (2)$$

arises, where $\psi_y(x) = \langle \nabla h(y), x - y \rangle$. (2) is a convex optimization problem. Results from semi-infinite optimization or the use of a gap function for the variational inequality can be applied to derive necessary and sufficient optimality conditions for (2) and, hence, for (1). One such optimality condition reads as:

A feasible point \bar{x} is optimal for (2) if and only if there exist $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > 0$, $y_1, y_2, \dots, y_k \in C$ such that

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla h(y_i) + N_C(\bar{x}) \text{ and} \\ \langle F(y_i), \bar{x} - y_i \rangle &= 0, \text{ for all } i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

provided some closedness qualification condition [2] is satisfied and $\nabla h(x)$ is continuous and monotone.

In the second part of the talk, an idea for solving the problem (1) will be given. Basis for this algorithm is a penalization $\xi_\varepsilon(x) = h(x) + \varepsilon f(x)$. The algorithm computes a sequence of η_k -optimal solutions of minimizing a Moreau-Yosida regularization of the function $\xi_\varepsilon(x)$ over C :

Given x_k , λ_k and ε_k , choose $x_{k+1} \in C$ such that

$$-\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2\lambda_k}\right) \in \partial_{\eta_k^1}(\xi_{\varepsilon_k})(x_{k+1}) + N_C^{\eta_k^2}(x_{k+1})$$

where $\eta_k^1, \eta_k^2 \geq 0$ and $\eta_k^1 + \eta_k^2 \leq \eta_k$.

Here, $\partial_{\eta^1} \xi_\varepsilon(x)$ denotes the η^1 -subdifferential of a convex function and $N_C^{\eta^2}(x)$ the η^2 -normal set of C at x .

It can be shown that the sequence $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ converges to a solution of (1) provided this problem has a solution.

References

- [1] S. Dempe and N. Dinh and J. Dutta, “Optimality Conditions for a Simple Convex Bilevel Programming Problem”, in: *Variational Analysis and Generalized Differentiation in Optimization and Control*, R.S. Burachik and J.-C. Yao (eds.), Springer, 149–162, 2010.
- [2] N. Dinh, T.T.A. Nghia and G. Vallet , “A closedness condition and its applications to DC programs with convex constraints”, *Optimization*, 59, 541 - 560 (2010).
- [3] M.V. Solodov, “An explicit descent method for bilevel convex optimization”, *Journal of Convex Analysis*, 14, 227 - 237 (2007).

Convergence Analysis of the Method of Codifferential Descent

Dolgopolik M.

maxim.dolgopolik@gmail.com

Saint Petersburg State University, Universitetsky prospekt, 35, Peterhof, Saint Petersburg, 198504, Russia; Institute for Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoy av. V.O., Saint Petersburg, 199178, Russia

The class of the so-called *codifferentiable functions* was introduced by prof. V.F. Demyanov in the late 1980s [1, 2]. This class, unlike most of the classes of subdifferentiable in some sense functions, enjoys a simple and thorough calculus that allows one to develop mathematical software for analytical codifferentiation. Furthermore, in contrast to most of subdifferential mappings, a codifferential mapping is continuous for many particular classes of nonsmooth functions appearing in applications.

Apart from the study of theoretical properties of codifferentiable functions, prof. Demyanov also developed a method for minimizing these functions called *the method of codifferential descent* [3, 4] (for various modifications of this method see [5, 6, 7, 8, 9]). Results of numerous computational experiments demonstrated that the method of codifferential descent is an effective and robust method of nonsmooth optimization that can be applied to convex, d.c. and general nonconvex nonsmooth problems. However, theoretical results on convergence of the method of codifferential descent are scarce. In fact, only the global convergence of the method of codifferential descent has been studied, and no estimates of the rate of convergence of this method are known. The main goal of this talk is to fill this void and get better understanding of the method of codifferential descent.

Recall that a function $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is called *codifferentiable* at a point $x \in \mathbb{R}^d$ if there exist compact convex sets $\underline{df}(x), \bar{df}(x) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ such that

$$\max_{(a,v) \in \underline{df}(x)} a + \min_{(b,w) \in \bar{df}(x)} b = 0, \quad (1)$$

and for any $\Delta x \in \mathbb{R}^d$ one has

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \max_{(a,v) \in \underline{df}(x)} (a + \langle v, \Delta x \rangle) + \min_{(b,w) \in \bar{df}(x)} (b + \langle w, \Delta x \rangle) + o(\Delta x), \quad (2)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the inner product in \mathbb{R}^d , and $o(\alpha \Delta x)/\alpha \rightarrow 0$ as $\alpha \rightarrow +0$. The pair $Df(x) = [\underline{df}(x), \bar{df}(x)]$ is referred to as a *codifferential* of f at x . Clearly, a codifferential of f at x is not unique.

The function f is said to be *continuously codifferentiable*, if f is codifferentiable at every point $x \in \mathbb{R}^d$, and there exists a codifferential mapping $Df(\cdot)$ defined and continuous on \mathbb{R}^d , i.e. such that the corresponding set-valued mappings $\underline{df}(\cdot)$ and $\bar{df}(\cdot)$ are continuous in Hausdorff metric. Let us note that the set of all continuously codifferentiable functions is closed under all standard algebraic operations, finite pointwise maximum and minimum, as well as composition with smooth functions (see [4]).

Let f be codifferentiable on \mathbb{R}^d . Observe that without loss of generality one can suppose that

$$\max_{(a,v) \in \underline{df}(x)} a = \min_{(b,w) \in \bar{df}(x)} b = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

since otherwise one can use a different codifferential mapping $\widehat{Df}(\cdot) = [\widehat{\underline{df}}(\cdot), \widehat{\bar{df}}(\cdot)]$ of the function f that has the form

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{df}}(x) &= \{(a - a(x), v) \mid (a, v) \in \underline{df}(x)\}, \\ \widehat{\bar{df}}(x) &= \{(b - b(x), w) \mid (b, w) \in \bar{df}(x)\}, \end{aligned}$$

where

$$a(x) = \max_{(a,v) \in \underline{df}(x)} a, \quad b(x) = \min_{(b,w) \in \bar{df}(x)} b.$$

(note that $a(x) = -b(x)$ by (1)). Observe that if the codifferential mapping $Df(\cdot)$ is continuous, then the codifferential mapping $\widehat{Df}(\cdot)$ is continuous as well.

Let f be codifferentiable at a point x_* , $Df(x_*)$ be its codifferential at this point, and let x_* be a local minimizer of f . The necessary condition for a minimum in terms of the codifferential $Df(x_*)$ has the form

$$0 \in \underline{df}(x_*) + \{(0, w)\} \quad \forall (0, w) \in \bar{df}(x_*). \quad (3)$$

One can check that this condition is satisfied if and only if $f'(x_*, h) \geq 0$ for all $h \in \mathbb{R}^d$, where $f'(x_*, h)$ is the directional derivative of f at x_* in the direction h . Therefore the necessary optimality condition (3) is invariant with respect to the choice of a codifferential. Any point x_* satisfying (3) is called a *stationary* point of the function f .

With the use of the optimality condition (3) one can construct a minimization method called *the method of codifferential descent*. Let a function $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ be continuously codifferentiable, $Df(\cdot)$ be its continuous codifferential mapping, and $\|\cdot\|$ be the Euclidean norm. For any $\mu > 0$ denote $\bar{d}_\mu f(x) = \{(b, w) \in \bar{d}f(x) \mid b \leq \mu\}$. The scheme of the method of codifferential descent is as follows.

1. Choose $\mu > 0$, $\alpha_* > 0$ and $x_0 \in \mathbb{R}^d$.
2. k th iteration ($k \geq 0$).
 - (a) Compute $Df(x_k)$.
 - (b) For any $z = (b, w) \in \bar{d}_\mu f(x_k)$ compute

$$\{(a(z), v(z))\} = \arg \min \left\{ \|(a, v)\| \mid (a, v) \in \underline{d}f(x_k) + \{z\} \right\}.$$

- (b) For any $z \in \bar{d}_\mu f(x_k)$ compute

$$\alpha(z) \in \arg \min \left\{ f(x_k - \alpha v(z)) \mid \alpha \in [0, \alpha_*] \right\}.$$

- (r) Compute

$$z_k \in \arg \min \left\{ f(x_k - \alpha(z)v(z)) \mid z \in \bar{d}_\mu f(x_k) \right\}.$$

- (d) Define $x_{k+1} = x_k - \alpha(z_k)v(z_k)$.

Note that at each iteration of the method of codifferential descent one must perform line search in several directions. One can verify that at least one of those directions is a descent direction, provided the necessary optimality condition (3) does not hold true. Therefore for any $k \in \mathbb{N}$ either x_k is a stationary point or $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

The parameter $\mu > 0$ is introduced into the method of codifferential descent in order to ensure convergence. From the form of necessary optimality conditions (see (3)) it seems natural to utilize the method of codifferential descent with $\mu = 0$, since it allows one to reduce the amount of computations at each iteration. However, the method of codifferential descent with $\mu = 0$ might converge to a non-stationary point of the function f (cf. [10], Section III.5).

As it was pointed out above, some of the directions at which the line search is performed at every iteration of the method of codifferential descent

are *descent* directions, but some are not (the function f may first increase and then decrease in these directions). This interesting feature of the method of codifferential descent allows it to “jump over” some points of local minima, provided the parameter $\mu > 0$ is chosen to be sufficiently large (for a particular example of this phenomenon see [5]).

Finally, one can verify that under natural assumptions every cluster point of the sequence constructed with the use of the method of codifferential descent is a stationary point of the function f [4, 5, 6, 7, 8, 9]. However, no other results on convergence of this method are known.

In this talk, we will discuss new theoretical results on the method of codifferential descent as well as some modifications of this method. Note that in the smooth case the method of codifferential descent is reduced to the method of gradient descent. Therefore it is natural to expect that the method of codifferential descent converges *linearly*, which is indeed the case, provided some second order sufficient optimality conditions are satisfied. On the other hand, if an optimization problem under consideration is “essentially nonsmooth”, then the method of codifferential descent converges *superlinearly*. In particular, this method converges superlinearly in the case of a minimax problem under the assumption on the existence of complete alternance.

We will also discuss the ability of the method of codifferential descent to “jump over” some points of local minima, and prove that, in fact, for some classes of nonsmooth functions this method converges to a *global* minimizer, provided $\mu = +\infty$.

Finally, we will consider some more practical issues. In particular, we will demonstrate that, in the method of codifferential descent, instead of the set $\bar{d}_\mu f(x)$ one can use the significantly “smaller” set that consists only of *extreme* points (b, w) of the set $\bar{d}f(x)$ satisfying the inequality $b \leq \mu$.

The reported study was supported by Russian Foundation for Basic Research, research project No. 16-31-00056.

References

- [1] V.F. Demyanov, “Continuous generalized gradients for nonsmooth functions”, in *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 304, A. Kurzhanski, K. Neumann and D. Pallaschke, eds., Springer, 24–27 (1988).
- [2] V.F. Demyanov, “On codifferentiable functions”, *Vestn. Leningr. Univ., Math.*, 2, 22–26 (1988).
- [3] V.F. Demyanov, “On the method of codifferential descent”, *Vestn. Leningr. Univ., Math.*, 7 (1989).
- [4] V.F. Demyanov, A.M. Rubinov, *Constructive Nonsmooth Analysis*, Peter Lang, (1995).

- [5] V.F. Demyanov, A.M. Bagirov, A.M. Rubinov, “A method of truncated codifferential with applications to some problems of cluster analysis”, *J. Glob. Optim.*, 23, No. 1, 63–80 (2002).
- [6] A.M. Bagirov, A.N. Ganjehlou, J. Ugon, A.H. Tor, “Truncated codifferential method for nonsmooth convex optimization”, *Pac. J. Optim.*, 6, No. 3, 483–496 (2010).
- [7] A.H. Tor, B. Karasözen, A. Bagirov, “Truncated codifferential method for linearly constrained nonsmooth optimization”, in the ISI Proc. of 24th Mini EURO Conference “Continuous Optimization and Information-Based Technologies in the Financial Sector”, Izmir, Turkey, 87–93 (2010).
- [8] A.M. Bagirov, J. Ugon, “Codifferential method for minimizing nonsmooth DC functions”, *J. Glob. Optim.*, 50, No. 1, 3–22 (2011).
- [9] A.H. Tor, A. Bagirov, B. Karasözen, “Aggregate codifferential method for nonsmooth DC optimization”, *J. Comput. Appl. Math.*, 259, 851–867 (2014).
- [10] V.F. Demyanov, V.N. Malozemov, *Introduction to Minimax*, Wiley, (1990).

Nonsmooth Speed-Gradient Algorithms for Control of Oscillatory Systems

Dolgopolik M., Fradkov A.

maxim.dolgopolik@gmail.com, fradkov@mail.ru

Institute for Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,
61 Bolshoy av. V.O., Saint Petersburg, 199178, Russia; Saint Petersburg State
University, Universitetsky prospekt, 35, Peterhof, Saint Petersburg, 198504,
Russia; University ITMO, Kronverkskiy prospekt, 49, Saint Petersburg, 197101,
Russia; Saint Petersburg State University, Universitetsky prospekt, 28, Peterhof,
Saint Petersburg, 198504, Russia

The Speed-Gradient (SG) method was proposed in the end of the 1970s as a general framework for design of control, adaptation, identification algorithms for nonlinear systems [1]. Since then it was extended in different directions [2, 3, 4, 5] and applied to a variety of problems in physics and mechanics [6, 7, 8, 9, 10]. An intimate relation between applicability of SG method and passivity of controlled system was established [11]. In the special case of affine controlled system the SG-algorithms encompass Jurdjevic-Quinn (LgV) algorithms [12].

Standard procedure of SG algorithms derivation requires differentiation of a nonnegative *goal function* $Q(x, t)$, which is to be minimized, along trajectories of the controlled system

$$\dot{x} = f(x, u, t). \quad (1)$$

One defines

$$\omega(x, u, t) = \frac{dQ(x, t)}{dt} = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + (\nabla_x Q(x, t))^T f(x, u, t),$$

and takes the control algorithm in the form

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t) = -\Gamma \left(\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \right)^T \nabla_x Q(x, t), \quad (2)$$

where Γ is a symmetric positive definite gain matrix. Note that in the above algorithm the change of the control input u is proportional to the gradient of the speed of change of the goal function $Q(x, t)$, which explain the name *Speed-Gradient algorithm*.

Together with the Speed-Gradient algorithm in the *differential form* (2) one can consider the algorithm in the *finite form*

$$u(t) = u_0 - \Gamma \nabla_u \omega(x(t), u(t), t),$$

where u_0 is some initial value of the control variable. One may also introduce a more general control algorithm

$$u(t) = u_0 - \gamma \psi(x(t), u(t), t),$$

where the vector function ψ satisfies the so-called *pseudogradient* (or *sharp angle*) condition

$$\psi(x, u, t)^T \nabla_u \omega(x, u, t) \geq 0,$$

and $\gamma > 0$ is a scalar gain.

In many cases the right hand sides of the system model (1) are nonsmooth. Furthermore, sometimes it may be profitable to introduce nonsmooth and even discontinuous terms into control algorithms in order to provide the desired system dynamics, e.g. finite time convergence. Therefore there is a need for a more general framework for design and analysis of SG-like algorithms in the general nonsmooth case.

In this talk, we will discuss some extension of the Speed-Gradient method to the nonsmooth case proposed in [13, 14]. Applications of the nonsmooth Speed-Gradient algorithms to control of several oscillatory systems will be presented.

The work was performed in IPME RAS and supported by RSF, grant 14-29-00142.

References

- [1] A.L. Fradkov “Speed-gradient scheme and its application in adaptive control problems”, *Autom. Remote Control*, 40, No. 9, 1333–1342 (1979).

- [2] A.L. Fradkov “Integro-differentiating algorithms of speed gradient”, *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 286, No. 4, 832–835 (1986).
- [3] B.R. Andrievskii, A.A. Stotskii, A.L. Fradkov, “Velocity-gradient algorithms in control and adaptation problems”, *Autom. Remote Control*, 49, No. 12, 1533–1564 (1988).
- [4] A.L. Fradkov, “Speed-gradient laws of control and evolution”, in *Proc. 1st European Control Conference (ECC)*, Grenoble, 1861–1865 (1991).
- [5] A.L. Fradkov, I.V. Miroshnik, V.O. Nikiforov, *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*, Kluwer Academic Publishers, (1999).
- [6] A.L. Fradkov, A.A. Stotsky, “Speed-gradient adaptive control algorithms for mechanical systems” *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, 6, No. 3, 211–220 (1992).
- [7] A.S. Shiriaev, A.L. Fradkov, “Stabilization of invariant sets for nonlinear systems with applications to control of oscillations”, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 11, 215–240 (2001).
- [8] A.L. Fradkov, A.Yu. Pogromsky, *Introduction to control of oscillations and chaos*, World Scientific Publishers, (1998).
- [9] M.S. Ananyevskiy, A.L. Fradkov “Speed-gradient method in cybernetical physics” in *Proc. Special International Conference on Complex Systems: Synergy of Control, Communications and Computing - COSY 2011*, Ohrid, 9–16 (2011).
- [10] A.A. Selivanov, J. Lehnert, T. Dahms, P. Hovel, A.L. Fradkov, E. Schoell, “Adaptive synchronization in delay-coupled networks of Stuart-Landau oscillators”, *Phys. Rev. E*, 85, No. 1, 016201 (2012).
- [11] A.L. Fradkov, P.Yu. Guzenko, D. Hill, A.Yu. Pogromsky, “Speed gradient control and passivity of nonlinear oscillators” in *IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'95)*, Tahoe City, USA, 655–659 (1995).
- [12] V. Jurdjevic, J.P. Quinn, “Controllability and stability”, *J. Differ. Equ.*, 28, 381–389 (1978).
- [13] M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov, “Nonsmooth speed-gradient algorithms”, in *Proceedings of 15th European Control Conference*, Linz, Austria, 998–1002 (2015).
- [14] M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov, “Speed-Gradient control of the Brockett integrator”, *SIAM J. Control Optim.*, 54, No. 4, 2116–2131 (2016).

Iterative Methods for Mixed Variational Inequalities

Konnov I.

konn-igor@ya.ru

Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan, 420008, Russia

Let D be a nonempty convex set in the real n -dimensional space \mathbb{R}^n ,
 $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a continuous single-valued mapping, and $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

a convex, proper and lower semicontinuous function. The *mixed variational inequality problem* (MVI) is the problem of finding a point $x^* \in D$ such that

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle + h(x) - h(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in D. \quad (1)$$

Theory and methods of this problem were developed by many authors due to its various applications. In case $h \equiv 0$, it corresponds to the usual VI. If h is subdifferentiable, MVI (1) becomes equivalent to the problem of finding $x^* \in D$ such that

$$\exists d^* \in \partial h(x^*), \quad \langle F(x^*) + d^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D.$$

If $F \equiv \mathbf{0}$, it coincides with the problem of minimization of the convex non-differentiable function h over D . For many applications this problem can be solved rather easily, at least in comparison with the initial problem (1). This is the case if the function h is separable. Then, the forward-backward splitting method [1] may lead to efficient computational schemes.

In order to enhance the stepsize rule choice we can utilize the descent approach with respect to some artificial merit (or otherwise, gap) function, which enables one to convert MVI into an optimization problem. The simplest regularized gap function can be defined as follows:

$$\varphi_\alpha(x) = \max_{y \in D} \Phi_\alpha(x, y),$$

where

$$\Phi_\alpha(x, y) = \langle F(x), x - y \rangle - 0.5\alpha\|x - y\|^2 + h(x) - h(y), \quad \alpha > 0;$$

see e.g. [2]. The function $\Phi_\alpha(x, \cdot)$ is strongly concave, hence, there exists the unique element $y_\alpha(x) \in D$ such that $\Phi_\alpha(x, y_\alpha(x)) = \varphi_\alpha(x)$. Observe that the computation of $y_\alpha(x)$ is equivalent to an iteration of the forward-backward splitting method applied to MVI (1). From the definition we have that MVI (1) is equivalent to the optimization problem

$$\min_{x \in D} \rightarrow \varphi_\alpha(x),$$

Despite the fact that φ_α is nondifferentiable and nonconvex, we can describe descent methods with respect to φ_α without computation of its derivatives. They utilize both exact and inexact linesearch procedures, but do not require even the differentiability of F . We now describe an example of the method; see e.g. [3].

Descent algorithm (DSIM). Choose a point $x^0 \in D$ and numbers $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \in (0, 1)$.

At the k -th iteration, $k = 0, 1, \dots$, we have a point $x^k \in D$, compute $y_\alpha(x^k)$ and set $d^k := y_\alpha(x^k) - x^k$. If $d^k = 0$, stop. Otherwise, we find m as the smallest non-negative integer such that

$$\varphi_\alpha(x^k + \gamma^m d^k) \leq (1 - \beta\gamma^m)\varphi_\alpha(x^k),$$

set $\lambda_k := \gamma^m$, $x^{k+1} := x^k + \lambda_k d^k$ and go to the next iteration.

Nevertheless, convergence of the methods is obtained under strengthened monotonicity of F . For this reason, in the case when F is only monotone, combined descent and either regularization or proximal point methods are also suggested.

For the usual VI, Peng [4] introduced the so-called D -gap function, which allows one to convert it into an unconstrained optimization problem. This approach was extended to MVI (1) in [5]. The D -gap function is defined as follows:

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(x) - \varphi_\beta(x),$$

where $0 < \alpha < \beta$. It appears that MVI (1) is equivalent to the unconstrained optimization problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \rightarrow \psi_{\alpha\beta}(x).$$

Next, if F a continuously differentiable, so is $\psi_{\alpha\beta}$ and

$$\nabla \psi_{\alpha\beta}(x) = \nabla F(x)[y_\beta(x) - y_\alpha(x)] + \beta(x - y_\beta(x)) - \alpha(x - y_\alpha(x)).$$

If $\nabla F(x)$ is positive definite on \mathbb{R}^n , then MVI (1) is equivalent to the equation:

$$\nabla \psi_{\alpha\beta}(x) = 0.$$

Utilizing the above properties, we can describe a descent method with respect to $\psi_{\alpha\beta}$ without computation of its derivatives. If the mapping F is strongly monotone, it generates a sequence, which converges to a unique solution of MVI (1). In [6], this approach was extended for MVI (1) with order monotonicity (P) properties. In the case when the mapping F is only P_0 , the descent methods can be combined with either regularization or proximal point methods, such that their auxiliary subproblems are solved approximately. Hence, we can apply the rapidly convergent algorithms in order to find a solution of the initial MVI.

It should be noted that solution methods for MVIs without differentiability and strengthened monotonicity properties of F were proposed in [7] and [8, Section 2.2] within the so-called combined relaxation (CR) approach; see also [9] for further developments. They also utilize a similar iteration of the

forward-backward splitting method as auxiliary procedure and the inexact linesearch.

Now we suppose that D is a nonempty, closed and convex subset in \mathbb{R}^n , $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a continuous monotone mapping, and $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a convex and subdifferentiable function. For the sake of clarity, we describe a simplified version of the method.

Method (CRS). *Step 0 (Initialization):* Choose a point x^0 and a sequence of $n \times n$ symmetric matrices $\{A_k\}$ such that

$$\tau' \|p\|^2 \leq \langle A_k p, p \rangle \leq \tau'' \|p\|^2 \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \tau' \leq \tau'' < \infty. \quad (2)$$

Choose numbers $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$, and $\gamma \in (0, 2)$. Set $k := 0$.

Step 1 (Auxiliary procedure):

Step 1.1 : Determine m as the smallest nonnegative integer such that

$$\langle F(x^k) - F(z^{k,m}), x^k - z^{k,m} \rangle \leq (1 - \alpha)\beta^{-m} \langle A_k(z^{k,m} - x^k), z^{k,m} - x^k \rangle,$$

where $z^{k,m}$ is a solution of the auxiliary problem: Find $z^{k,m} \in D$ such that

$$\langle F(x^k) + \beta^{-m} A_k(z^{k,m} - x^k), x - z^{k,m} \rangle + h(x) - h(z^{k,m}) \geq 0 \quad \forall x \in D.$$

Step 1.2: Set $\theta_k := \beta^m$, $y^k := z^{k,m}$. If $x^k = y^k$, stop. Otherwise set

$$g^k := F(y^k) - F(x^k) - \theta_k^{-1} A_k(y^k - x^k), \omega_k := \langle g^k, x^k - y^k \rangle.$$

Step 2 (Main iteration): Set

$$x^{k+1} := x^k - \gamma \omega_k g^k / \|g^k\|^2,$$

$k := k + 1$ and go to Step 1.

Obviously, there exist a number of rules of choosing the sequence $\{A_k\}$ satisfying condition (2). The simplest is $A_k \equiv I$, which yields the usual forward-backward splitting iteration. We denote by D^* the solution set of problem (1).

Theorem 1. *Let a sequence $\{x^k\}$ be constructed by (CRS). If the method terminates at the k -th iteration, then $x^k \in D^*$. Otherwise, if $\{x^k\}$ is infinite, then*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^* \in D^*.$$

Note that problem (1) has a unique solution if F is strongly monotone. Then (CRS) converges at least linearly.

Theorem 2. Suppose that F is strongly monotone. If (CRS) generates an infinite sequence $\{x^k\}$, then $\{x^k\}$ converges to a solution of problem (1) in a linear rate.

References

- [1] P.L. Lions and B. Mercier, “Splitting algorithms for the sum of two monotone operators”, *SIAM J. Num. Anal.*, 16, No. 6, 964–979 (1979).
- [2] M. Patriksson, *Nonlinear programming and variational inequality problems: a unified approach*, Kluwer Academic Publishers, (1999).
- [3] I.V. Konnov, “Descent methods for mixed variational inequalities with non-smooth mappings”, *Optimization Theory and Related Topics*, Ed. by S. Reich and A.J. Zaslavski, Contemporary Mathematics, V.568, Amer. Math. Soc., 121–138 (2012).
- [4] J.-M. Peng, “Equivalence of variational inequality problems to unconstrained minimization”, *Math. Progr.*, 78, No. 3, 347–355 (1997).
- [5] I.V. Konnov, “On a class of D-gap functions for mixed variational inequalities”, *Russ. Math. (Iz. VUZ)* 43, No. 12, (1999), No. 12, 60–64.
- [6] I.V. Konnov, “Properties of gap functions for mixed variational inequalities”, *Siberian J. Numerical Mathem.*, 3, No. 3, 259–270 (2000).
- [7] I.V. Konnov, “A combined method for variational inequalities with monotone operators”, *Comp. Maths. Math. Phys.*, 39, No. 7, 1051–1056 (1999).
- [8] I.V. Konnov, *Combined relaxation methods for variational inequalities*, Springer-Verlag, (2001).
- [9] I.V. Konnov, *Nonlinear optimization and variational inequalities*, Kazan Univ. Press, (2013).

Method of Successive Remove Modules in Problems of Nonsmooth Optimization

Kosolap A.

anivkos@ua.fm

Chemical-Technological University, Gagarin av., 8, Dnipro, 49005, Ukraine

Many problems referring to economy, finance, project optimization, planning, computer graphics, management, scheduling, sensor networks of difficult systems can be transformed to nonsmooth optimization problems in finite-dimensional space [1]. Such problems contain of the modules of function or maximum of function. We will name such functions modular. The set of values of variables at which modules of functions keep a sign, is dividing feasible set into not crossed areas with the general borders. In each of these areas modular functions will be smooth.

Consider the following problem

$$\min\{c^T x | g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}, \quad (1)$$

where all or a part $g_i(x)$ – nonsmooth the modular functions. We offered the following method of successive remove modules for the solution of a problem (1)

Step 1. We will choose any initial point $x^0, k = 0$.

Step k. We remove modules of nonsmooth functions in a point x^k and will solve a problem

$$\min\{c^T x | g_i^j(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k\}, \quad (2)$$

where all $g_i^j(x)$ are smooth functions after remove of modules of functions $g_i(x)$ in points $x^j, j = 0, \dots, k$. Let x^{k+1} – is the solution of a problem (2).

Step k+1. We check the solution x^{k+1} of the problems (3) on an feasibility. If it is feasible, x^{k+1} – is the solution of a problem (1), differently we set $k = k + 1$ and we pass to a step k.

We used primal-dual interior point method for search the solution of a problem (2) [2].

The considered algorithm will converge for finite number of iterations as the number of the hypersurfaces forming feasible domain of a problem (1) – is finite. However, considering that in an point of optimum will be active, as a rule, n the hypersurfaces, the considered method converges on the average for n iterations (number of solutions of smooth problems (2)).

The nonsmooth problem

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{10} |a_i^T x + b_i|\right\}, \quad (3)$$

its parameters are set under, solved by means of software Risk Solver, value of function equal 30 has been received.

Parameters of a problem (3)

$$a_1 = (1, 1, 1, 5, 1, 2, 3, 6, -2, -5),$$

$$a_2 = (2, -3, 0, 0, 0, 0, -12, -52, 15, 25.3),$$

$$a_3 = (5, -55, 6, -5, 25, 12, 4, 2, 14, -52),$$

$$a_4 = (-12, 24, -55, 64, 0, 0, 0, 0, -1, -22),$$

$$a_5 = (3, -3, 12, 1, -10, -5, 5, -95, 4, -74),$$

$$a_6 = (-1, 1, 0, 2, -1, 0, 1, 1, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}
a_7 &= (-56, 5, 1, 3, -25, 2, 4, -4, 12, -14), \\
a_8 &= (12, 1, 0, 1, 0, -11, -2, 1, 9, 0), \\
a_9 &= (14, 36, -33, -52, -15, -5, -3, 1, 0, 0), \\
a_{10} &= (5, 12, 0, 0, 0, -5, -5, -5, 1, 14), \\
b &= (56, 15, 58, -55, -100, 1, 15, 1, 8, 12).
\end{aligned}$$

We use a method of successive remove modules for the solution of the equivalent problem

$$\min\{e^T x \mid \sum_{i=1}^{10} |a_i^T x + b_i| \leq r\}, \quad (4)$$

where $e = (1, \dots, 1)$, and r decreased to zero. The solution of a problem (4) is found at of the point

$$\begin{aligned}
x^* &= (-19.3879764, -3.284240132, -13.57045411, -9.31057767, 38.1118518, \\
&\quad -42.98323925, 60.65556767, -11.58242605, -10.6301706, 11.81646044)
\end{aligned}$$

for $r = 0.000001$.

References

- [1] A. Bagirov, N. Karmitsa, M.M. Makela, Introduction to Nonsmooth Optimization. Theory, Practice and Software, Springer, (2014).
- [2] J. Nocedal, S. J. Wright, Numerical optimization, Springer, (2006).

On Minimum of Function with Extra Variable *Koulaguin V.*

wkoula@gmail.com

Institute of Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,
Bolshoy pr., 61, V.O., Saint-Petersburg, 199178, Russia

Abstract. A mathematical programming problem for function with two variables [1]'s talked; examples, existence conditions're considered.

1. Introduction. There are many ways to tackle a problem how to make a decision under uncertainty. In [1-3] another one is given. In [4-6] one can see some applications of the method to a control design problem.

2. The set of the problem. There are a function $f(x, y)$, $x \in E_x$, $y \in E_y$; a set

$$A = \{(x, y) \mid x = \arg \min_x f_y(x)\},$$

where $f_y(x)$ – a cross-section of function $f(x, y)$ by a variable y fixed; and a set

$$Y(x) = \{y \mid (x, y) \in A\},$$

which characterized the element $x \in E_x$ and named a robustness set of element $x \in E_x$.

The problem is to find an element x^0 so that

$$Y(x^0) \supseteq Y(x), \quad \forall x \in E_x. \quad (*)$$

Here x^0 – a maximal robustness element, $Y(x^0)$ – a maximal robustness set.

3. Remarks.

3.1. An example of the problem (*). Existence of a solution depends on a type of space E_x . Here is an example. First, let function $f(x, y)$ be $f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$; where $x \in R_1$, $y = (a, b, c) \in R_3$. Robustness sets $Y(x)$ don't have common elements [1]; That means a solution of the problem (*) doesn't exist. Now let element x be a function of an argument (a, b, c) , $x = x(a, b, c)$. In that case, (by properties of parabolas) a maximal robustness element is $x^0 = -b/2a$.

3.2. A trivial solution. A solution of the problem (*) always exists, when element $x \in E_x$ is a function $x(y)$. This solution cannot be acceptable for decision maker, because parameter y a priori isn't known.

3.3. Some condition of existence. Let's consider a set

$$X(y) = \{x \mid (x, y) \in A\}$$

and a problem to find an element x^+ , so that

$$x^+ \in \bigcap_y X(y). \quad (**)$$

Theorem [1]. An element x is a solution of problem (*), if and only if this element is a solution of problem (**).

3.4. A problem (*) as a design control problem. In such applications, element $x \in E_x$ is supposed to be a function of time and/or a function of a phase variable of a system controlled. If element x is a function of time $x(t)$, then a robustness sets $Y(x)$ are usually empty or contain only one element. On the contrary, if element x is a function of a phase variable and time, then often a solution of problem (*) might be found.

3.5. A problem (*) as a decision making problem. Features x^0 , $Y(x^0)$ in the problem (*) are basic (attributive) property of a system

constructing under uncertainty E_y . They give a theoretically maximal possibility to rase stability and resistance of the system.

6. Conclusion. In problem (*) only spaces E_x, E_y are to be given, there are no restrictions for variables. Hence, this principal allows unbounded parameters of uncertainty to be treated as minimax principle in that case usually doesn't work.

References

- [1] Koulaguin V.V. Mathematical programming problem for function with extra variable. // Report. Conference "Mathematical programming and applications". Institute of Mathematics and Mechanics, Russian Academy of Sciences. Ekaterinburg (2007). (In Russian)
- [2] Koulaguin V.V. Balance point method of design under some kind of uncertainty. // Report. International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of L.S.Pontryagin. Optimal Control. Moscow State University, Moscow (1998).
- [3] Koulaguin V.V. Robustness as an index of efficiency for a decision making under uncertainty. A maximal robustness problem. // Report. VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2016). Moscow State University. Moscow (2016). (In Russian)
- [4] Koulaguin V.V., Slesar N.O. Maximal robustness relocation of single mass point with a minimal velocity within the segment of real axis during the preassigned time. *Vestnik of Nizhny Novgorod University*, No. 4(2), 189–190 (2011). (In Russian)
- [5] Koulaguin V.V., Prourzin V.A. Maximal robustness shock absorber for an uncertain mass of object. *Mechanics of Solids, A Journal of Russian Academy of Sciences*, No. 1, (2005). (In Russian)
- [6] Koulaguin V.V. Maximal admissible nonparametric uncertainty in a control design problem. In: Proceedings of 11th IFAC international workshop "Control Applications of Optimization". St.-Petersburg, Russia. Published by Elsevier Science in PERGAMON for IFAC, pp.193-198, (2001).

Exact Penalty Functions in Decomposition Schemes in Variables for Convex Optimization Problems

Laptin Yu.

laptin_yu_p@mail.ru

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The use of exact penalty functions in decomposition schemes in variables to solve block optimization problems allows to overcome some problems related with implicit description of the feasible region in the master problem. How to find proper penalty coefficients is discussed here. Let consider a problem

$$f^* = \min \{f_0(x) : x \in C\}, \quad (1)$$

where $C = \{x : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in R^n\}$, $f_i : R^n \rightarrow R$ is convex function with finite values for all values of variables, $i = 0, \dots, m$.

Let $F_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda h^+(x)$, where $h(x) = \max\{f_i(x), i = 1, \dots, m\}$, $h^+(x) = \max\{0, h(x)\}$,

$$F_\lambda^* = \min\{F_\lambda(x) : x \in R^n\}. \quad (2)$$

$F_\lambda(x)$ is an exact penalty function, if the solutions of problems (1) and (2) coincide.

Lemma 1. Let C be a closed set, values of penalty coefficients are fixed, $\varepsilon > 0$, and a sequence of points $x_k, k = 1, 2, \dots$ converging to a solution \tilde{x} of the problem (2) be given. Let a rule P establishing a correspondence between x_k and a point $z_k = P(x_k), z_k \in C, k = 1, 2, \dots$ be given, and the following inequalities are fulfilled

$$F_\lambda(x_k) \geq f_0(z_k) + \varepsilon \|x_k - z_k\|, \text{ if the point } x_k \notin C \quad (3)$$

Then $\tilde{x} \in C$.

For a given point $x \notin C$ and the rule $P : R^n \rightarrow C$ let we denote $\lambda_P(x, \varepsilon) = \max(0, (f_0(z) + \varepsilon \|x - z\| - f_0(x))/h^+(x))$, where $z = P(x)$, $\lambda_P(\varepsilon) = \sup\{\lambda_P(x, \varepsilon), x \notin C\}$.

Let some converging algorithm A be used to solve the problem (2). For the exact penalty coefficients are not known in advance, their values will be specified (increased) in the course of the algorithm. Let λ_k be a value of the coefficient λ at the iteration k . For $k = 1$ the value $\lambda_1 > 0$ is given. The algorithm A uses the value λ_k to find the point x_k at the iteration k . If in the point x_k the inequality (3) is fulfilled at $\lambda = \lambda_k$, let put $\lambda_{k+1} = \lambda_k$, otherwise $\lambda_{k+1} = \lambda_P(x_k, \varepsilon) + R$, where $R > 0$ is a fixed given parameter.

Relations (3) are fulfilled, if $\lambda > \lambda_P(\varepsilon)$, and the number of corrections for the coefficients λ_k will be finite, if $\lambda_P(\varepsilon) < \infty$.

The use of penalty functions with too high values of penalty coefficients leads to problems related to rounding errors, worsening of the convergence of optimization algorithms. For this reason the value $\lambda_P(\varepsilon)$ is an important characteristics of the rule P .

For $x \notin C, y_0 \in C$ we denote $\pi_C(x, y_0)$ the point of intersection of a segment $[x, y_0]$ with a border of the set C .

Theorem 1. Let a set C be bounded, a function f be Lipschitz continuous on C , and a point $y_0 \in C$, $h(y_0) < 0$, $P(x) = \pi_C(x, y_0)$ be given for $x \notin C$. Then $\lambda_P(\varepsilon) < \infty$.

The rule $P(x) = \pi_C(x, y_0)$ gives rather efficient procedures to specify the penalty coefficient, but under unfortunate choice of the point y_0 the values of penalty coefficients may become rather large.

The ways to improve the rule P are considered. An analogous approach for finding penalty coefficients of the function $\Phi_\beta(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \beta_i f_i^+(x)$, and application in decomposition schemes in variables for block convex programming problems are also discussed. The proposed approaches do not require complex solutions of auxiliary problems. In the case when the functions of the initial problem are not defined on the whole space of variables, it is proposed to use convex extensions of functions.

References

- [1] Laptin Yu.P. “Questions of construction of exact penalty functions”, *Proc. St.-Petersb. Univ. Ser. 10: Applied mathematics*, No. 4, 21–31 (2013).
- [2] Laptin Yu.P. “Exact Penalty Functions and Convex Extensions of Functions in Schemes of Decomposition in Variables”, *Cybernetics and Systems Analysis* , 52.1, 85–95 (2016).

Undifferentiated Optimization of Data Sample

Orekhov A.

A_V_Orehov@mail.ru

Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

Any single statistical observation of an object can be considered as an element of a data sample extracted from the general sample (statistical population). In this observation we explore quantitative or qualitative variables. Among the variables we distinguish the control variables and target ones. Control variables have a known distribution in the general sample. Target variables have an unknown distribution in the general sample. The distribution law in the general sample is called theoretical. The distribution law in the data sample is called empirical. The variables appear to be control if they are invariant to the objectives of the study. If there are many variables, they can be regarded as a multi-dimensional random value with a joint distribution law. A sufficient condition for the reliability of the sampling results is the conformity of the sample structure with the structure of the general sample. Such data sample is called “representative” or “unbiased”. The distribution for any subset of observable variables (including controls variables) is called marginal. The phenomenon when the structure of the data sample is different to the structure of the general sample, is called “data sample bias”. Errors occur in sampling because of a bias of data sample. The natural desire is to obtain a representative sample computational methods. “The correction of data sample” is a procedure for adjusting the data sample structure in accordance with the structure of the general sample.

In 1940, Deming W.E. and Stephan F.F. proposed an algorithm to correct the data obtained during the US Census [1]. This algorithm got the name “Iterative Proportional Fitting” (IPF) [2]. The first article on the convergence of the IPF algorithm was published in 1942 [3], but a complete and rigorous proof of convergence of the IPF for positive numbers was given only in 1970 [4].

Nowadays IPF is mostly used to adjust data samples in sociological, marketing or other statistical researches with qualitative variables. However, this method, like all the others, known by now, has a significant drawback: it “corrects” empirical laws of distribution, but not the data sample. Consequently, it becomes impossible to obtain such important characteristics of the sample as various kinds of marginal laws for the joint distributions of target variables.

This article discusses the algorithm to correct data samples, rather than empirical laws of distribution in a sample.

Suppose that in a single statistical observation we explore $s + r$ variables. We put them in a line ordered set, $(X_1, \dots, X_s, Y_1, \dots, Y_r)$, where the variables X_1, \dots, X_s are control variables, and Y_1, \dots, Y_r are target ones.

We assume that any X_k ($1 \leq k \leq s$) and any Y_l ($1 \leq l \leq r$) are one-dimensional variables and have finite spectrum: $\{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^{\alpha_k}\}$ and $\{y_l^1, y_l^2, \dots, y_l^{\beta_l}\}$ respectively. We define vector \mathbf{Z} . Components of \mathbf{Z} are indicators of the spectral values of variables X_k ($1 \leq k \leq s$) and Y_l ($1 \leq l \leq r$). Indicators of spectral values X_k and Y_l we denote as $\{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^{\alpha_k}\}$ and $\{y_l^1, y_l^2, \dots, y_l^{\beta_l}\}$ respectively.

If we introduce the notation

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_s = n; \quad \beta_1 + \dots + \beta_r = m. \quad (1)$$

According to (1) vector \mathbf{Z} can be represented as:

$$\mathbf{Z} = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m). \quad (2)$$

All components of \mathbf{Z} have a Bernoulli distribution.

The set of control variables and the set of target variables do not intersect. It is reasonable to formally “delimit” the corresponding random variables. The vector \mathbf{Z} belongs to the linear space \mathbf{R}^{n+m} , with basis vectors: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_{n+m} = (0, 0, \dots, 1)$.

We present \mathbf{R}^{n+m} as a direct sum of linear subspaces: $\mathbf{R}^{n+m} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$, where the subspace \mathbf{X} is the linear span of the vectors e_1, \dots, e_n , and the complementary subspace \mathbf{Y} is the linear span of the vectors e_{n+1}, \dots, e_{n+m} . From $\mathbf{R}^{n+m} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ it follows that $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^x + \mathbf{Z}^y$ where \mathbf{Z}^x is the projection of \mathbf{Z} on \mathbf{X} , and \mathbf{Z}^y projection of \mathbf{Z} on \mathbf{Y} . \mathbf{Z}^x is the vector control variables, \mathbf{Z}^y is the vector of the target variables.

By $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m})$ we denote vector of events probabilities $x_i = 1$ and $y_j = 1$ that is, $p_i = P(x_i = 1)$, $p_{n+j} = P(y_j = 1)$. Projections of \mathbf{P} to the subspace \mathbf{X} and \mathbf{Y} are respectively a given vector $\mathbf{P}^x = (p_1, \dots, p_n)$ and an unknown vector $\mathbf{P}^y = (p_{n+1}, \dots, p_{n+m})$.

Let us consider sample $\{\mathbf{Z}_t\}_{t=1}^N = \{\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N\}$.

The random vector of this sample has the form (2), its components x_i ($1 \leq i \leq n$) or y_j ($1 \leq j \leq m$) are indicators of spectral values and have a Bernoulli distribution. Indicators x_i ($1 \leq i \leq n$) correspond to the control variables, and the indicators y_j ($1 \leq j \leq m$) correspond to the target variables.

By $\mathbf{W} = (w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_{n+m})$ we denote a vector whose components are the relative frequencies of random events $x_i = 1$ and $y_j = 1$. These components define the empirical probability of events $X_k = x_k^\alpha$ and $Y_l = y_l^\beta$ for a corresponding one-dimensional variables X_k and Y_l . Projections of \mathbf{W} on mutually complementary subspace \mathbf{X} and \mathbf{Y} are vectors:

$$\mathbf{W}^x = (w_1, \dots, w_n) \text{ and } \mathbf{W}^y = (w_{n+1}, \dots, w_{n+m}),$$

all components are known.

One of the main objectives of a sample survey is to approximate the unknown vector \mathbf{P}^y through statistical estimates. These estimates are the components of a random vector \mathbf{W}^y . Since the empirical distribution of the target variables depend on the distribution of control ones, the accuracy of this approach is the higher, the less is the difference between coordinates of vectors \mathbf{P}^x and \mathbf{W}^x .

Definition 1. A number $\theta_k > 0$ is called *the bias of data sample by the control variable* X_k , if $\theta_k = \max |w_i - p_i|$ where the maximum is defined for the set of natural indices i , satisfying the inequality

$$1 + \dots + \alpha_{k-1} \leq i \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_k.$$

Definition 2. A number $\varepsilon > 0$ is called *the index of representativeness of data sample for control variables* X_1, \dots, X_s , if $\varepsilon = \max(\theta_1, \dots, \theta_s)$.

Note that the index of representativeness is equal to the maximum bias of the data sample over all control variables.

Again, consider the data sample $\{\mathbf{Z}_t\}_{t=1}^N = \{\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N\}$.

Let δ be a given positive number.

Definition 3. A data sample $\{\mathbf{Z}_t\}_{t=1}^N$ is called *representative, for the control variables* X_1, \dots, X_s , if its index of representativeness ε , satisfies $\varepsilon \leq \delta$.

An algorithm is called randomized, if the execution of one or several iterations relies on a random rule [5]. Optimization of data sample carried out with a randomized algorithm can not be differentiable.

If the components of a random vector of the data sample subject to the Bernoulli distribution, the correction of the data sample can be performed with a randomized algorithm.

We describe this algorithm (**RAAS**) [6].

The following data is assumed to be known. The law of distribution of control signs \mathbf{P}^x in the general sample. The upper bound index of representativeness δ , data sample $\{\mathbf{Z}_t\}_{t=1}^N$. We need to adjust the data sample $\{\mathbf{Z}_t\}_{t=1}^N$ such that its index of representativeness ε obey inequality $\varepsilon \leq \delta$.

RAAS 1. [Write \mathbf{P}^x .]

RAAS 2. [Write δ .]

RAAS 3. [Write $\{\mathbf{Z}_t\}_{t=1}^N$.]

RAAS 4. [Calculation of \mathbf{W}^x .] Calculate the empirical probability of control variables in the data sample $\{\mathbf{Z}_t\}_{t=1}^N$.

RAAS 5. [Finding the maximum bias (a index of representativeness).] Determine the spectral value of a control variable such that $\max |w_k - p_k| = \varepsilon$ ($1 \leq k \leq n$). If there are several spectral values, for which $\max |w_k - p_k| = \varepsilon$, then randomly select any one of them (here we use any of standard algorithms with random number generator). Let it be component i for vectors \mathbf{W}^x and \mathbf{P}^x .

RAAS 6. [Comparison with δ .] If $\varepsilon \leq \delta$, then go to RAAS12, else proceed to RAAS7.

RAAS 7. [Comparison with 0.] If $w_i - p_i > 0$, then go to RAAS8, else $w_i - p_i < 0$ then go to RAAS10.

RAAS 8. [Delete.] Randomly delete some vector \mathbf{Z}_t , where component $x_i = 1$ from a data sample. Here, just as in RAAS5, we can use any of standard algorithms, comprising a random number generator.

RAAS 9. [Go to RAAS4.]

RAAS 10. [Duplicate]. Randomly duplicate some vector \mathbf{Z}_t , where component $x_i = 1$ from a data sample . Here, just as in RAAS5, we can use any of standard algorithms, comprising a random number generator.

RAAS 11. [Go to RAAS4.]

RAAS 12. [End of the algorithm.]

The reason for the use of this algorithm is the fact that at an increasing volume the data sample hypergeometric distribution become less and less different from the binomial distribution. If the volume of the general sample tends to infinity then there is no significant differences between repeated and the repetition-free data samples. Therefore, when the size of the data

sample is much smaller than the volume of the general sample, the empirical probability in a repetition-free sample will be little different from the empirical probability in a repetition sample.

At each iteration, a randomized sample data correction algorithm will form a new data sample and new vector \mathbf{W} . Getting a new data sample is random a event which denote Ω_k . Random event Ω_k we associate index of representativeness ε_k .

Consider the sequence: $\Omega_1, \dots, \Omega_k, \dots$

These random events assign the two-element set of outcomes $\{C, B\}$, where C is an event $\varepsilon_k \leq \varepsilon_{k+1}$, and the outcome of B is an event $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$.

Since the probability C , or B depends only on the type of data sample in a given time and does not depend on previous states, the sequence of random events $\Omega_1, \dots, \Omega_k, \dots$ is a inhomogeneous Markov chain with set of states $\{C, B\}$.

In the computational experiments, we obtained the following results.

If the sample size is two orders greater than the number of control variables, the submitted randomized algorithm “converges asymptotically”, in the sense that the maximum bias of the sample though not monotonously, but reduces.

The index of representativeness of ε_k stabilized around 10^{-2} . With these values ε_k all elements of the transition probability matrix of the Markov chain corresponding to this algorithm, tend to 0.5. Thus random events C and B are almost equally probable.

Methods of successive approximations are divided into two types of relaxation and nonrelaxation ones. The method is called relaxation, if the “object function” at the next step is less than at the previous step [7]. If you use a randomized algorithm, the sequential approaching of the empirical distribution of spectral values to their theoretical distribution is nonrelaxation.

References

- [1] Deming W. E., Stephan F. F. “On a least square adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known,” *The Annals of Mathematical Statistics.*, Vol. 11, No 4. pp. 427 – 444, 1940.
- [2] Bishop Y. M., Fienberg S. E., Holland, P. W. *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice*. New York: Springer-Verlag., 2007. P. 568
- [3] Stephan F. F. “An iterative method of adjusting sample frequency tables when expected marginal totals are known” *The Annals of Mathematical Statistics.*, Vol. 13, No 2. pp. 166–178, 1942.
- [4] Fienberg S. E. “An Iterative Procedure for Estimation in Contingency Tables” *Annals of Mathematical Statistics.*, Vol. 41, No 3. pp. 907–917, 1970.

- [5] Granichin O., Volkovich V., Toledano-Kitai D. *Randomized Algorithms in Automatic Control and Data Mining*. Springer-Verlag: Heidelberg New York Dordrecht London. 2014. P. 275
- [6] Orekhov A. V. "Randomized algorithm for adjusting sample data" *Vestn. S.-Petersb. Univ.*, Vol. 3: Applied Math., Computer Science., Control Proc., No. 3, pp. 96–104, (in Russian), 2015.
- [7] Demyanov V. F., Malozemov V.N. *Introduction to minimax*. New York: Dover, 1990. P. 307

On the Passage from Local to Global Optimization: New Challenges in Theory and Practice *Pardalos P.*

University of Florida; National Research University, Higher School of Economics

Large scale problems in the design of networks and energy systems, biomedicine, finance, and engineering are modeled as optimization problems. Humans and nature are constantly optimizing to minimize costs or maximize profits, to maximize the flow in a network, or to minimize the probability of a blackout in the smart grid. Due to new algorithmic developments and the computational power of computers, optimization algorithms have been used to solve problems in a wide spectrum of applications in science and engineering. In this talk I am going to address new challenges in the theory and practice of optimization. First, we have to reflect back a few decades to see what has been achieved and then address the new research challenges and directions.

References

- [1] P.M. Pardalos and J.B. Rosen (Eds.) Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications. Lecture Notes in Computer Science 268, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [2] P.M. Pardalos. Continuous Approaches to Discrete Optimization Problems. In: Pillo, G.D. and Giannessi, F. (Eds.) Nonlinear Optimization and Applications, Plenum, pp. 313-328, 1996.
- [3] D.Z. Du and P.M. Pardalos. Global Minimax Approaches for Solving Discrete Problems. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 452:34-48, 1997.
- [4] J. Abello, P.M. Pardalos and M.G.C. Resende. On maximum clique problems in very large graphs. In DIMACS Vol. 50, American Mathematical Society, pp. 119-130, 1999.
- [5] J. Abello, P.M. Pardalos and M.G.C. Resende (Eds.), Handbook of Massive Data Sets, Kluwer Academic Publishers, 2000.

- [6] P.M. Pardalos, D. Shalloway and G. Xue (Eds.) Global Minimization of Nonconvex Energy Functions: Molecular Conformation and Protein Folding. DIMACS Series, American Mathematical Society, 1996.
- [7] R. Horst and P.M. Pardalos (Eds.), Handbook of Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [8] R. Horst, P.M. Pardalos and N.V. Thoai. Introduction to Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, 1995 (Second Edition (2000)).
- [9] P.M. Pardalos (Ed.) Approximation and Complexity in Numerical Optimization, Nonconvex Optimization and Its Applications Series, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [10] B. Goldengorin, D. Krushinsky and P.M. Pardalos. Cell Formation in Industrial Engineering. Springer Optimization and Its Applications, Springer, 2013.
- [11] B. Goldengorin and P.M. Pardalos. Data Correcting Approaches in Combinatorial Optimization. Springer, New York, 2012.
- [12] A. Sorokin and P.M. Pardalos. Dynamics of Information Systems: Algorithmic Approaches. Springer, 2013.
- [13] P.M. Pardalos, D.-Z Du and R. Graham (Eds.) Handbook of Combinatorial Optimization. 5 volumes, 2-nd edition, Springer, 2013.
- [14] S.D. Eksioglu, S. Rebennack and P.M. Pardalos (Eds.) Handbook of Bioenergy: Bioenergy Supply Chain - Models and Applications. Springer, 2015.
- [15] P.M. Pardalos and E. Romeijn (Eds.) Handbook of Global Optimization, Volume 2: Heuristic Approaches. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [16] A. Chinchuluun, A. Migdalas, P.M. Pardalos and L. Pitsoulis. Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria., Springer, 2008.
- [17] V. Demyanov, P.M. Pardalos and M. Batsyn, Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics, Springer, 2014.

A Variant of Mirror Descent Method for Solving Variational Inequalities

Semenov V.

semenov.volodya@gmail.com

Taras Shevchenko Kiev National University, 64, Vladimirskaya Str., Kiev, 01601,
Ukraine

We consider a variational inequalities with Lipschitz continuous pseudo-monotone operators. Quite a number of operational research problems in applications can be stated in this form. We propose new variant of mirror descent method (mirror-prox algorithm) for solving the variational inequalities. This method can be interpreted as the modification of two-step Popov algorithm [9] with the projection onto the feasible set in the sense

of Bregman divergence. Our method, like other mirror descent schemes, can effectively take into account the structure of the feasible set of the problem. The main theoretical result is the proof of the theorem about the convergence of the method.

In 1980, L. Popov [9] proposed very interesting modification of Arrow–Hurwicz scheme for approximation of saddle points of convex-concave functions in Euclidean space. Under some suitable assumptions, L. Popov proved the convergence of this method. In recent works [4, 5, 6] proved the convergence of Popov algorithm for variational inequalities with monotone and Lipschitz operators in infinite-dimensional Hilbert space, and proposed some modifications of this algorithm. Euclidean distance and projection were used in all these methods. And often this does not allow to take into account the structure of feasible sets and solve problems effectively. A possible solution to the situation is a more flexible selection of the distance for projection onto the feasible set. One of the first successful implementations of this strategy is the work of L. Bregman [2] proposed a cyclic non-Euclidean projection method for finding a common point of convex sets. This work has opened the wide scientific field in mathematical programming and nonlinear analysis. The mirror descent method was proposed in the late 70-ies of the last century by A. Nemirovski and D. Yudin for solving convex optimization problems [7]. Since then the method has been widely used for solving large-scale problems [1]. For problems with constraints this method can be interpreted as a variant of the subgradient projection method when projecting is understood in the sense of Bregman divergence (Bregman distance) [1]. The mirror descent method allows to take into account the structure of feasible set of optimization problems. For example, for the probability simplex we can use the Kullback–Leibler divergence that is the Bregman divergence built on negative entropy. And then we have explicitly calculated projection operator on the simplex [1]. Versions of the mirror descent method for solving variational inequalities and saddle problems based on the Korpelevich extra-gradient algorithm are studied in [3, 8]. These includes also stochastic methods [3].

For finite-dimensional real vector space E , we denote by E^* its dual. We denote the value of a linear function $a \in E^*$ at $b \in E$ by (a, b) . Let $\|\cdot\|$ denote some norm on E (not necessary Euclidean).

Let C be a nonempty subset of space E , A be a operator, that acts from E to E^* . Consider the variational inequality problem:

$$\text{find } x \in C \text{ such that } (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (1)$$

The set of solutions of the problem (1) is denoted S .

Assume that the following conditions are satisfied:

- the set $C \subseteq E$ is convex and closed;

- operator $A : E \rightarrow E^*$ is pseudo-monotone and Lipschitz continuous with a constant $L > 0$ on C ;
- the set S is nonempty.

Recall, that operator A on the set C is called pseudo-monotone if for all $x, y \in C$ from $(Ax, y - x) \geq 0$ follows $(Ay, y - x) \geq 0$.

We will set the construction necessary for algorithm formulation. Let function $\varphi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfies the condition [3]:

- φ is continuous and convex on C . Particularly, the set $C^\circ = \{x \in C : \partial\varphi(x) \neq \emptyset\}$ is nonempty;
- φ is regular on C° , i.e. subdifferential $\partial\varphi$ on the set C° has continuous selector $\nabla\varphi$;
- function φ is strongly convex with respect to the chosen norm $\|\cdot\|$ with constant of strong convexity $\sigma > 0$:

$$\varphi(a) \geq \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) + \frac{\sigma}{2} \|a - b\|^2 \quad \forall a \in C, b \in C^\circ.$$

Such functions are called *distance generating functions* [3].

The Bregman divergence associated with φ is defined as $d(a, b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) \forall a \in C, b \in C^\circ$. Consider two main examples. If $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|_2^2$, where $\|\cdot\|_2$ is Euclidean norm, we will have $d(x, y) = \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$. For probability simplex $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ and negative Boltzmann–Shannon entropy $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m x_i \ln x_i$ (it is strongly convex with respect to the ℓ_1 -norm on S_m) we obtain Kullback–Leibler divergence (KL-divergence)

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i \ln \frac{x_i}{y_i}, \quad x \in S_m, y \in \text{ri}(S_m).$$

Suppose, that we have an ability to solve effectively following strongly convex minimization problems:

$$\pi_x(a) = \arg \min_{y \in C} \{-(a, y - x) + d(y, x)\} \quad \forall a \in E^*, x \in C^\circ.$$

Operator $\pi_x : E^* \rightarrow C^\circ$ is called *prox mapping*. The point $\pi_x(a)$ in Euclidean case coincides with Euclidean metric projection $P_C(x + a) = \arg \min_{y \in C} \|y - (x + a)\|_2$. For probability simplex case S_m and KL-divergence we have [1]

$$\pi_x(a) = \left(\frac{x_1 e^{a_1}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \frac{x_2 e^{a_2}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \dots, \frac{x_m e^{a_m}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}} \right), \quad a \in \mathbb{R}^m, x \in \text{ri}(S_m).$$

Let us describe the Mirror-Prox Algorithm for problems (1).

Algorithm 1. Mirror-Prox Algorithm for Variational Inequalities

Choose initial points $x_1 \in C^o$, $y_1 \in C$, and number $\lambda > 0$. Generate the sequence of elements x_n , y_n using iterative scheme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \pi_{x_n}(-\lambda A y_n), \\ y_{n+1} &= \pi_{x_{n+1}}(-\lambda A y_n). \end{aligned}$$

If $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|_2^2$, then Algorithm 1 takes the form [4, 5, 9]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n). \end{cases}$$

Consider the variational inequality on the probability simplex:

$$\text{find } x \in S_m \text{ such that } (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in S_m.$$

If we choose KL-divergence we obtain the next version of Algorithm 1:

$$\begin{cases} x_i^{n+1} = \frac{x_i^n \exp(-\lambda(Ay_n)_i)}{\sum_{j=1}^m x_j^n \exp(-\lambda(Ay_n)_j)}, & i = 1, \dots, m, \\ y_i^{n+1} = \frac{x_i^{n+1} \exp(-\lambda(Ay_n)_i)}{\sum_{j=1}^m x_j^{n+1} \exp(-\lambda(Ay_n)_j)}, & i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

where $(Ay_n)_i \in \mathbb{R}$ is i -th coordinate of vector $Ay_n \in \mathbb{R}^m$, $\lambda > 0$.

Notice, that if for some $n \in \mathbb{N}$ the equality is fulfilled

$$x_{n+1} = x_n = y_n \tag{2}$$

then $y_n \in S$ and the following stationarity condition holds $x_k = y_k = y_n \forall k \geq n$. Further, we assume that for all numbers $n \in \mathbb{N}$ the condition (2) doesn't hold.

Lemma 1. Let sequences (x_n) , (y_n) be generated by the Algorithm 1, and let $z \in S$. Then, we have

$$\begin{aligned} d(z, x_{n+1}) &\leq d(z, x_n) - \left(1 - \left(1 + \sqrt{2}\right) \lambda L \sigma^{-1}\right) d(y_n, x_n) - \\ &\quad - \left(1 - \sqrt{2} \lambda L \sigma^{-1}\right) d(x_{n+1}, y_n) + \lambda L \sigma^{-1} d(x_n, y_{n-1}). \end{aligned}$$

Now we can formulate the main result.

Theorem 1. Let $C \subseteq E$ is nonempty convex closed set, operator $A : E \rightarrow E^*$ is pseudo-monotone and Lipschitz continuous with a constant $L > 0$ and $S \neq \emptyset$. Assume that $\lambda \in (0, (\sqrt{2} - 1) \sigma L^{-1})$. Then sequences (x_n) , (y_n) ,

that generated by the Algorithm 1, converge to the solution $\bar{z} \in C$ of the problem (1).

In one of the future work we plan to consider a randomized version of Algorithm 1 and carry out the corresponding convergence analysis. It will help to have a progress in using this variant the mirror descent method for solving variational inequalities of huge size. Randomized versions of the mirror descent method, based on the extra-gradient algorithm are studied in [3]. Also it is interesting to obtain similar results for the equilibrium programming problems [4]. In conclusion we note that, in our opinion, the proposed Algorithm is promising for the further investigation and can be used in practical applications.

References

- [1] A. Beck, M. Teboulle, “Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization”, *Operations Research Letters*, 31 (3), 167–175 (2003).
- [2] L. Bregman, “The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming”, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 7, 200-217 (1967).
- [3] A. Juditsky, A. Nemirovski, C. Tauvel, “Solving variational inequalities with Stochastic Mirror-Prox algorithm”, *Stochastic Systems*, 1 (1), 17-58 (2011).
- [4] S. I. Lyashko, V. V. Semenov, “A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming”, in: Boris Goldengorin (ed.) *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. SOIA*, vol. 115, pp. 315–325. Springer, (2016).
- [5] Yu. V. Malitsky, V. V. Semenov, “An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities”, *Cybernetics and Systems Analysis*, 50, 271-277 (2014).
- [6] Yu. V. Malitsky, V. V. Semenov, “A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems”, *Journal of Global Optimization*, 61, 193-202 (2015).
- [7] A. Nemirovski, D. Yudin, *Problem complexity and method efficiency in optimization*, Wiley, (1983).
- [8] A. Nemirovski, “Prox-method with rate of convergence $O(1/t)$ for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems”, *SIAM Journal on Optimization*, 15, 229-251 (2004).
- [9] L. D. Popov, “A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points”, *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 28, 845-848 (1980).

On Local Search in d.c. Optimization

Strelakovsky A., Minarchenko I.

strelak@icc.ru, eq.progr@gmail.com

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, 134
Lermontov St., Irkutsk, 664033, Russia

Consider the following problem

$$(\mathcal{P}): \quad \begin{cases} f_0(x) \downarrow \min_x, & x \in S \subset \mathbb{R}^n, \\ f_i(x) \leq 0, & i \in I := \{1, \dots, m\}, \end{cases} \quad (1)$$

where functions $g_i(\cdot)$, $h_i(\cdot)$, $i \in \{0\} \cup I$, are convex on \mathbb{R}^n , a set $S \subset \mathbb{R}^n$ is convex as well [8, 12, 13].

Introduce the l_∞ -penalty function [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15]

$$W(x) := \max\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\} =: \max\{0; f_i(x), i \in I\}. \quad (2)$$

Furthermore, consider the penalized problem as follows ($\sigma \geq 0$)

$$(\mathcal{P}_\sigma): \quad \Theta_\sigma(x) := f_0(x) + \sigma W(x) \downarrow \min_x, \quad x \in S. \quad (3)$$

As well-known [3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15], if $z \in Sol(\mathcal{P}_\sigma)$, and $z \in \mathcal{F} := \{x \in S : f_i(x) \leq 0, i \in I\}$, then $z \in Sol(\mathcal{P})$. In addition, if $z \in Sol(\mathcal{P})$, then under supplementary conditions [1, 9, 12] for some $\sigma_* > 0$, $\sigma_* \geq \|\lambda_z\|_1$ (where λ_z is the KKT-multiplier vector corresponding to z), the inclusion $z \in Sol(\mathcal{P}_\sigma)$ holds. Moreover [12, 13], $Sol(\mathcal{P}) = Sol(\mathcal{P}_\sigma)$, so that Problems (\mathcal{P}) and (\mathcal{P}_σ) turn out to be equivalent $\forall \sigma \geq \sigma_*$.

It can be readily seen that the penalized function $\Theta_\sigma(\cdot)$ is a d.c. function, since the functions $f_i(\cdot)$, $i \in I \cup \{0\}$, are as such. Actually, since $\sigma > 0$,

$$\Theta_\sigma(x) = G_\sigma(x) - H_\sigma(x), \quad (4)$$

$$H_\sigma(x) := h_0(x) + \sigma \sum_{i \in I} h_i(x), \quad (5)$$

$$G_\sigma(x) := \Theta_\sigma(x) + H_\sigma(x) = g_0(x) + \\ + \sigma \max \left\{ \sum_{i=1}^m h_i(x); \max_{i \in I} [g_i(x) + \sum_{j \in I, j \neq i} h_j(x)] \right\}. \quad (6)$$

It is clear that $G_\sigma(\cdot)$ and $H_\sigma(\cdot)$ are convex functions.

Let be given a starting point $x^0 \in S$ and the current iterate $x^s \in S$.

Consider the convex linearized problem

$$(\mathcal{P}_\sigma L_k): \quad \Phi_{\sigma k}(x) := G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(x^k), x \rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S. \quad (7)$$

Then, we can find a next iterate $x^{k+1} \in S$ by solving Problem $(\mathcal{P}_\sigma L_k)$ approximately, so that the following inequality holds:

$$G_\sigma(x^{k+1}) - \langle \nabla H_\sigma(x^k), x^{k+1} \rangle - \delta_k \leq \inf_x \{G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(x^k), x \rangle \mid x \in S\}, \quad (8)$$

where

$$\delta_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < +\infty, \quad (9)$$

so that δ_k is the accuracy of solving Problem $(\mathcal{P}_\sigma L_k)$.

Denote by $\mathcal{V}_k := \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma L_k) := \inf_x \{\Phi_{\sigma k}(x) \mid x \in S\}$ the optimal value of Problem $(\mathcal{P}_\sigma L_k)$. Then the inequality (8) can be written as follows

$$\Phi_{\sigma k}(x^{k+1}) \leq \mathcal{V}_k + \delta_k. \quad (8')$$

We investigate the asymptotical convergence of the scheme (local search method (LSM) (8)–(9)).

Proposition 1. Suppose $\mathcal{V}(\mathcal{P}) > -\infty$. Then the sequence $\{x^k\} \subset S$ produced by LSM (8)–(9) satisfies the following conditions.

(A) The number sequences $\{\theta_{\sigma k} := \Theta_\sigma(x^k)\}$, $\{\Delta\Phi_k := \Phi_{\sigma k}(x^k) - \Phi_{\sigma k}(x^{k+1})\}$ converge so as

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{\sigma k} := \theta_{\sigma *} \geq \mathcal{V}(\mathcal{P}). \quad (10)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\Phi_k = 0; \quad (11)$$

$$(B) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathcal{V}_k - \Phi_{\sigma k}(x^{k+1})] = 0. \quad (12)$$

Theorem 1. Suppose, the sequence $\{x^k\}$ produced by LSM (8)–(9) converges to $x_* \in S$.

Then, the limit point x_* is a solution to the following linearized problem

$$(\mathcal{P}_\sigma L_*): \quad \Phi_{\sigma *}(x) := G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(x_*), x \rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S. \quad (13)$$

From Theorem 1 one readily derives that $\{x_*\}$ satisfies the classical optimality condition

$$0_n \in \partial G_\sigma(x_*) - \nabla H_\sigma(x_*) + N(x_*|S),$$

where $\partial G_\sigma(x_*)$ is the (convex) subdifferential of $G_\sigma(\cdot)$ at x_* , and $N(x_*|S)$ is the normal cone to S at x_* : $N(x_*|S) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x - x_* \rangle \leq 0 \ \forall x \in S\}$. One can easily show that the inequality

$$\Phi_{\sigma k}(x^k) - \Phi_{\sigma k}(x^{k+1}) \leq \frac{\tau}{2} \quad (14)$$

can be used as a stopping criterion.

Theorem 2. *Let a limit point x_* of the sequence $\{x^k\}$ produced by LSM (8)–(9) is feasible in Problem (\mathcal{P}) .*

Then, the point x_ turns out to be KKT-point in the original Problem (\mathcal{P}) with the Lagrange multipliers $\lambda_0 = 1$, $\lambda_i = \mu_i$, $i \in I$, where μ_i , $i \in I$, are Lagrange multipliers of the auxiliary (linearized at x_*) convex problem $(\mathcal{P}_\sigma L_*)$.*

Now we change a computational scheme for variation of penalty parameter $\sigma > 0$ at every step $k = 1, 2, \dots$, in order to take into account the results of computation, first of all, the feasibility of the point $x^{k+1} \in S$ (see also [16, 17, 18]). Besides, we aim at the feasibility of x^{k+1} at the final stage of computational solution.

For this purpose, consider the problem

$$(\mathcal{P}L_k): \quad G_k(x) - \langle \nabla H_k(x^k), x \rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S, \quad (15)$$

where $G_k(x) = G_{\sigma_k}(x)$ and

$$H_k(x) := H_{\sigma_k}(x) = h_0(x) + \sigma_k \sum_{i \in I} h_i(x). \quad (16)$$

One can see that, under condition of finite number of changes of penalty parameter, Theorems 1 and 2 stay valid.

In addition, the computational process of consecutive solution of Problem $(\mathcal{P}L_k)$ converges to a KKT-point of the original Problem (\mathcal{P}) .

First computational testing results show effectiveness of developed approach.

This research is supported by the Russian Science Foundation (project No. 15-11-20015).

References

- [1] J. Nocedal, S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, New York (2006).
- [2] V.F. Demyanov, A.M. Rubinov, *Constructive Nonsmooth Analysis*, Peter Lang, Frankfurt a/M (1995).
- [3] R.H. Byrd, J. Nocedal, R.A. Waltz, “Steering exact penalty methods for nonlinear programming”, *Optimization Methods & Software* 23, No. 2, 197–213 (2008).

- [4] R.H. Byrd, G. Lopez-Calva, J. Nocedal, “A line search exact penalty method using steering rules”, *Mathematical Programming, Ser. A* 133, No. 1, 39–73 (2012).
- [5] G. Di Pillo, S. Lucidi, F. Rinaldi, “A Derivative-free algorithm for constrained global optimization based on exact penalty functions”, *Journal of Optimization Theory and Applications* 164, No. 3, 862–882 (2015).
- [6] G. Pillo, S. Lucidi, F. Rinaldi, “An approach to constrained global optimization based on exact penalty functions”, *Journal of Global Optimization* 54, No. 2, 251–260 (2012).
- [7] G. Di Pillo, L. Grippo, “Exact penalty functions in constrained optimization”, *SIAM Journal on Control and Optimization* 27, 1333–1360 (1989).
- [8] R.T. Rockafellar, R.J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer, New York (1998).
- [9] J.-F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal, C.A. Sagastizábal, *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin (2006).
- [10] A.F. Izmailov, M.V. Solodov, *Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems*, Springer, New York (2014).
- [11] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York (1983).
- [12] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [13] J.-B. Hiriart-Urruty, “Generalized differentiability, duality and optimization for problems dealing with difference of convex functions”, In: Ponstein, J. (ed.) *Convexity and Duality in Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 256, 37–70, Springer, Heidelberg (1985).
- [14] J.V. Burke, “An exact penalization viewpoint of constrained optimization”, *SIAM J. Control and Optimization*, 29, No. 4, 968–998 (1991).
- [15] A.J. Zaslavski, “Existence of Exact Penalty and Its Stability for Nonconvex Constrained Optimization Problems in Banach Spaces”, *Set-Valued Analysis* 16, 673–691 (2008)
- [16] A.S. Strelkovsky, “On Solving Optimization Problems with Hidden Nonconvex Structures”, *Optimization in Science and Engineering* (ed. by T.M. Rassias, C.A. Floudas, S. Butenko), Springer, New York, 465–502, (2014).
- [17] A.S. Strelkovsky, *Elements of nonconvex optimization*, Nauka, Novosibirsk (2003) [in Russian].
- [18] A.S. Strelkovsky, “Global Optimality Conditions in Nonconvex Optimization”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, DOI: 10.1007/s10957-016-0998-7 (2017).

Interval Regularization, Recognizing Functional, and Non-Smooth Optimization Technique

Vorontsova E.

vorontsovaea@gmail.com

Far Eastern Federal University, Suhanova St. 8, Vladivostok, 690950, Russia

Interval analysis suggests many special methods to deal with uncertainty, approximation, rounding problems [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

We consider solutions of the linear algebraic systems of equations $Ax = b$, where $A = (a_{ij})$ is an $m \times n$ -matrix and $b = (b_i)$ is an m -vector of the right-hand side, under interval uncertainty of its elements. In other words, it is supposed that the memberships of a_{ij} and b_i in some intervals are known a priori:

$$a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij} = [a_{ij}, \bar{a}_{ij}], \quad b_i \in \mathbf{b}_i = [b_i, \bar{b}_i]$$

for all $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, where boldface letters denote intervals according to the informal notation standard [8]. So, we consider imprecise systems of linear algebraic equations $Ax = b$ as interval linear algebraic systems of equations

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \tag{1}$$

with an interval $m \times n$ -matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ and an interval right-hand side m -vector $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$.

There exists the *interval regularization* procedure for solving (1) as a model of $Ax = b$ imprecise system. In this procedure we need to find points from the *tolerable solution set* [11, 12, 13], frequently encountered in various practical computational problems:

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (Ax \in \mathbf{b})\}. \end{aligned}$$

The theoretical basis of the interval regularization is the fact that the tolerable solution set is "the most stable" among the solution sets to interval systems of equations. For example, the tolerable solution set is considered in [9, 10] as a kind of "regularizing tool" in the solution of sensitive and ill-conditioned $Ax = b$ systems, when one needs to "smooth" somehow the effect of the changes in the solution caused by inaccurate data.

The tolerable solution set $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ may be empty even for common interval data \mathbf{A} and \mathbf{b} (see [12]). To resolve this problem, one may inflate (artificially extend) the right-hand side vector \mathbf{b} of the interval system to get a non-empty tolerable solution set.

Definition 1. A point of the tolerable set $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}(v))$, where the modified right-hand side vector $\mathbf{b}(v) = [\bar{b} - v, \bar{b} + v]$, $v \geq 0$, that corresponds

to the minimal extension of the right-hand side of the system of equations, is called the best possible tolerable pseudo-solution of the original system (1):

$$v^* = \inf\{v \mid \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}(v)) \neq \emptyset\}.$$

Computational method to finding the best possible pseudo-solution of the system of equations (1), which is due to V.A. Golodov and A.V. Panyukov [9, 10], is based on the J. Rohn's theorem [11] about characterization for the tolerable solution set. In this method, the solution $z^* = [\underline{b} - z|\underline{b}|, \bar{b} + z|\bar{b}|]$ is defined as the solution of the linear programming (LP) problem with $4n + 1$ constraints. The resulting LP problem is nearly degenerate, so the authors suggested and implemented simplex method with high precision of the calculations, based on [14].

In this article we proposed another approach for finding the best possible tolerable pseudo-solution of the system (1). Our method uses *recognizing functional* technique, developed by S.P. Shary [5, 12].

Recognizing functional proposed by S.P. Shary [12] for an interval¹ $m \times n$ -matrix \mathbf{A} and an interval right-hand side m -vector \mathbf{b} $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{R}$ is defined as

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_j \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\},$$

where $\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}})$ is a radius of the corresponding interval, $\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})$ is a midpoint of the corresponding interval, and $|\mathbf{a}| = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}|\}$ is an absolute value of the interval \mathbf{a} . If the interval variables are fixed and the functional Tol is considered only as a function of x , then it is written as $\text{Tol}(x)$, omitting the occurrences of the interval matrix \mathbf{A} and interval vector \mathbf{b} .

Theorem 1. [12] The membership of a point $x \in \mathbb{R}^n$ in the solution set $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ to the interval linear system $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ is equivalent to non-negativity of the functional Tol in x :

$$x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \text{ if and only if } \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0.$$

In other words, $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$.

Theorem 2. [12] The functional $\text{Tol}(x)$ is concave and attains a finite maximum on all of \mathbb{R}^n .

Both of these theorems and the correction procedure of the linear tolerance problem from [12] (section 5) give us the algorithm for solving

¹We denote the set of all closed real intervals (one-dimensional boxes) as \mathbb{IR} .

interval regularization problem with recognizing functional technique. Let $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}(v)) = \emptyset$. The **algorithm** will look like the following.

Step 1. Non-smooth optimization. Find the global maximum of this recognizing functional:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{Tol}(x^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T. \quad (2)$$

Step 2. Right-hand side vector correction. It is clear now that the best possible tolerable pseudo-solution of the system (1) is equal to $|T|$. Indeed, $\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + v[-1, 1], \dots, [-1, 1]^T) = v + \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = v + T$. Then, to satisfy $v + T \geq 0$, it is necessary that $v \geq |T|$. And $v^* = -T$.

So, we replaced the linear programming problem to the convex non-smooth optimization (NSO) problem (2). Note that, in this special case, convex unconstrained optimization problem (2) is not much harder than nearly degenerate LP problem with $4n + 1$ constraints (for further information see the pioneering work of A. Nemirovksii and D. Yudin [15], Yu. Nesterov's lectures [16], and, for example, [17]). Both of these problems (LP problem is not in integers) have polynomial time algorithms, the last statement is not true for the simplex method, because it has exponential computational complexity in the worst case, as shown by the example of Klee and Minty from 1972.

Since the interval regularization problem can be very huge-scale in practical applications, it is suggested to use the separating plane (SP) methods (SPAclip [19], SPAclip-S [18]) for its solution (on the *Step 1. "Non-smooth optimization"* of our algorithm). SP methods [20, 21, 19, 18, 22] were created for solving unconstrained problems of multidimensional convex non-smooth optimization. These methods do not require additional information on the internal structure of the function being optimized. So, SP methods are the representatives of the so-called *black-box optimization*. At the same time SP methods can be classified as bundle methods, but with an important theoretical feature. Methods work in the extended conjugate space of subgradients and the Legendre-Fenchel conjugate of $f(x)$ $f^*(g) = \sup_x \{gx - f(x)\}$. More precisely, SP methods replace the problem (2) with computing the corresponding Legendre-Fenchel conjugate function at the origin of the conjugate space. As the investigations of SP methods showed, this idea of replacement increased the practical rate of convergence.

The test problem taken from [9] was to find the best possible tolerable pseudo-solution for the system of interval linear equations $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ with Hilbert interval matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ and the point (non-interval) right-hand side vector \mathbf{b} such that $\mathbf{a}_{ij} = \left[\frac{i(1-\delta)}{i+j-1}, \frac{i(1+\delta)}{i+j-1} \right]$, $\mathbf{b} = (1, 1/2, \dots, 1/(n-1), 1/n)^T$.

We compare the SPACLIP method with N.Z. Shor's r -algorithm [23] when solving interval regularization problem. Our experiments showed that SPACLIP outperforms the other considered methods in a case of the given accuracy $\text{eps} \geq 10^{-6}$ or large scale of the matrix \mathbf{A} (100×100 and greater).

So, interval regularization problem can be solved practically not only as a related linear programming problem but as a convex non-smooth optimization problem. The last way may be the only one for finding the solution in a case of large- and huge-scale problems.

References

- [1] R.E. Moore, B. Kearfott, M.J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, PA, USA, (2009).
- [2] *Global Optimization Using Interval Analysis*, 2nd ed., revised and expanded by E. Hansen, G.W. Walster, CRC Press, (2003).
- [3] G. Alefeld, J. Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New-York, (1983).
- [4] A. Neumaier, *Interval Methods for Systems of Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, (1990).
- [5] S.P. Shary, "Maximum Consistency Method for Data Fitting under Interval Uncertainty", *J. of Global Optimization*, 63, 1–16 (2015).
- [6] L.V. Kantorovich, "On Some New Approaches to Numerical Methods and Processing Observation Data", *Siberian Math. Journal*, 3(5), 701–709 (1962) (in Russian).
- [7] M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramik, J. Rohn, K. Zimmermann, *Linear Optimization Problems with Inexact Data*, Springer, New York, (2006).
- [8] R.B. Kearfott, M. Nakao, A. Neumaier, S. Rump, S.P. Shary, P. van Hentenryck, "Standardized Notation in Interval Analysis", *Comput. Technologies.*, 15(1), 7–13 (2010).
- [9] A.V. Panyukov, V.A. Golodov, "Computing Best Possible Pseudo-Solutions to Interval Linear Systems of Equations", *Reliable Computing*, 19:2, 215–228 (2014).
- [10] A.V. Panyukov, V.A. Golodov, "Computing the Best Possible Pseudo-Solutions to Interval Linear Systems of Equations", 15th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerics (SCAN'2012), Novosibirsk, Russia, September 23-29. Institute of Computational Technologies, Novosibirsk, 134–135 (2012).
- [11] J. Rohn, "Inner Solutions of Linear Interval Systems", in: K. Nickel (ed.) *Interval Mathematics 1985*, LNCS, vol. 212, pp. 157–158, Springer, New York, (1986).
- [12] S.P. Shary, "Solving the Linear Interval Tolerance Problem", *Mathematics and Computers in Simulation*, 39, 53–85 (1995).

- [13] A. Neumaier, "Tolerance Analysis with Interval Arithmetic", *Freiburger Intervall-Berichte*, 86(9), 5–19 (1986).
- [14] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, Chichester, (1986).
- [15] A.S. Nemirovsky, D.B. Yudin, *Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization*, Wiley, New York, (1983).
- [16] Yu. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, (2004).
- [17] D.S. Hochbaum, J.G. Shanthikumar, "Convex Separable Optimization is not Much Harder than Linear Optimization", *J. of the ACM*, 37, 843–862 (1990).
- [18] E. Vorontsova, "Extended Separating Plane Algorithm and NSO-Solutions of PageRank Problem", in: Yu. Kochetov, M. Khachay, Vl. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalos, (eds), *DOOR 2016*, LNCS, vol. 9869, pp. 547–560, Springer (2016).
- [19] E.A. Vorontsova, E.A. Nurminski, "Synthesis of Cutting and Separating Planes in a Nonsmooth Optimization Method", *Cybernetics and Systems Analysis*, 51(4), 619–631 (2015).
- [20] E.A. Nurminski, "Separating Plane Algorithms for Convex Optimization", *Math. Program*, 76, 373–391 (1997).
- [21] E.A. Nurminski, "Separating Plane Method with Bounded Memory for the Solution of Convex Nonsmooth Optimization Problems", *Computational Meth. and Program*, 7, 133–137 (2006).
- [22] E. Nurminski, "Multiple Cuts in Separating Plane Algorithms", in: Yu. Kochetov, M. Khachay, Vl. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalos (eds), *DOOR 2016*, LNCS, vol. 9869, pp. 430–440, Springer (2016).
- [23] N.Z. Shor, "Cut-Off Method with Space Dilation in Convex Programming Problems", *Cybernetics*, 13(1), 94–96 (1977).

Cutting Method with Approximating the Feasible Set and the Epigraph of the Objective Function

Zabotin I., Shulgina O., Yarullin R.

IYaZabotin@mail.ru, ONShul@mail.ru, YarullinRS@gmail.com

Kazan (Volga region) Fedefal University, Kremlevskaya Str. 18, Kazan, 420008,
Russia

A cutting method (e. g., [1–2]) is proposed for solving convex programming problem. For constructing iteration points this method approximates an epigraph of the objective function and a feasible set by some polyhedral sets. The method is characterized by the fact that during constructing approximating sets there is some opportunity of

dropping cutting planes. Convergence of the method is proved, discuss its implementations.

Let $f(x)$, $F(x)$ be convex functions defined in n -dimensional Euclidian space R_n ,

$$D = \{x \in R_n : F(x) \leq 0\}.$$

We solve the following problem:

$$\min\{f(x) : x \in D\}. \quad (1)$$

Suppose $f^* = \min\{f(x) : x \in D\} > -\infty$, $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $x^* \in X^*$. Let $\partial f(x)$, $\partial F(x)$ be subdifferentials at the point $x \in R_n$ of the functions $f(x)$ and $F(x)$ respectively. Assign $D_\varepsilon = \{x \in R_n : F(x) \leq \varepsilon\}$, $X^*(\varepsilon) = \{x \in D : f(x) \leq f^* + \varepsilon\}$, where $\varepsilon \geq 0$, $\text{epi}(f, G) = \{(x, \gamma) \in R_{n+1} : x \in G, \gamma \geq f(x)\}$, where $G \subset R_n$, $K = \{0, 1, \dots\}$.

The method is proposed for solving problem (1) as follows. Choose convex closed sets $M_0 \subset R_n$, $G_0 \subset R_{n+1}$ such that

$$x^* \in M_0, \quad \text{epi}(f, R_n) \subset G_0,$$

and for any point $(x, \gamma) \in G_0$, where $x \in M_0$, the inequality $\gamma \geq \bar{\gamma} > -\infty$ is determined. Select numbers $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, and assign $i = 0$, $k = 0$.

1. Find a point (y_i, γ_i) , where $y_i \in R_n$, $\gamma_i \in R_1$, as solution of the problem

$$\min\{\gamma : x \in M_i, (x, \gamma) \in G_i\}. \quad (2)$$

If $y_i \in D$ and $f(y_i) = \gamma_i$, then $y_i \in X^*$, and problem (1) is solved.

2. If $y_i \in D$ and $f(y_i) - \gamma_i \leq \delta_k$, then it follows that $y_i \in X^*(\delta_k)$, and minimization process is finished by finding δ_k -solution or go to Step 3. Otherwise, go to Step 3.

3. Choose a finite set $B_i \subset \partial f(y_i)$, and in case of $y_i \notin D$ select a finite set $A_i \subset \partial F(y_i)$.

4. The set M_{i+1} is constructed by the following rule. If $y_i \in D$, then assign

$$M_{i+1} = Q_i = M_i.$$

Otherwise, assign

$$M_{i+1} = Q_i \bigcap \{x \in R_n : F(y_i) + \langle a, x - y_i \rangle \leq \forall a \in A_i\},$$

where $Q_i = M_i$ in case of $y_i \notin D_{\varepsilon_k}$ or

$$y_i \in D_{\varepsilon_k} \setminus D, \quad f(y_i) - \gamma_i > \delta_k,$$

and Q_i is chosen as a closed and convex set according to conditions

$$Q_i \subseteq M_0, \quad x^* \in Q_i, \quad (3)$$

in case of

$$y_i \in D_{\varepsilon_k} \setminus D, \quad f(y_i) - \gamma_i \leq \delta_k.$$

5. Construct the set G_{i+1} as follows

$$G_{i+1} = S_i \bigcap \{(x, \gamma) \in R_{n+1} : f(y_i) + \langle b, x - y_i \rangle \leq \gamma \ \forall b \in B_i\},$$

where $S_i = G_i$ in case of $y_i \notin D_{\varepsilon_k}$ or

$$y_i \in D_{\varepsilon_k}, \quad f(y_i) - \gamma_i > \delta_k,$$

and S_i is chosen as a convex and closed set in accordance with conditions

$$S_i \subseteq G_0, \quad \text{epi}(f, R_n) \subset S_i \quad (4)$$

in case of

$$y_i \in D_{\varepsilon_k}, \quad f(y_i) - \gamma_i \leq \delta_k. \quad (5)$$

6. If the point (y_i, γ_i) satisfies condition (5), then assign $i_k = i$,

$$x_k = y_{i_k}, \quad \sigma_k = \gamma_{i_k}, \quad (6)$$

determine numbers $\varepsilon_{k+1} > 0$, $\delta_{k+1} > 0$, increment k by one and go to Step 7. Otherwise, immediately go to Step 7.

7. Increment i by one and go to Step 1.

It is obtained that problem (2) can be solved for any $i \in K$. Stopping criterion which is introduced into Step 1 of the method and criterion which is formed in Step 2 for determining δ_k -solution of the initial problem are proved.

It is clear that problem (2) is linear programming problem for any $i \in K$ in case of defining sets M_0, G_0 by polyhedra. It is obtained that if the set D is determined by linear functions, then M_i can be constructed by the form $M_i = D$ for all $i \in K$. If the function $f(x)$ is determined by maximum of linear functions, then during constructing the set G_i it is possible to assign $G_i = \text{epi}(f, R_n)$ for all $i \in K$.

Mentioned updates of approximating sets $M_i, G_i, i \in K$, can be performed by choice of sets Q_i and S_i in Steps 4, 5 according to conditions (3) and (4) respectively. Discuss specific ways of constructing sets Q_i, S_i in cases (3), (4).

Assertions are represented concerning convergence of the described method in case of constructing sets Q_i, S_i for all $i \in K$ by way $Q_i = M_i$, $S_i = G_i$.

It is obtained that during constructing the sequence $\{(y_i, \gamma_i)\}$ for each $k \in K$ there exists a number $i = i_k$ such that condition (5) is determined. Thereby it is proved existance of the main sequence $\{(x_k, \sigma_k)\}$.

Theorem. For any limit point $(\bar{x}, \bar{\sigma})$ of the sequence $\{(x_k, \sigma_k)\}$ expressions $\bar{x} \in X^*$, $\bar{\sigma} = f^*$ are defined.

References

- [1] V. P. Bulatov, *Embedding methods in optimization problem*, Nauka, (1977).
- [2] I. Ya. Zabotin, R. S. Yarullin, "One approach to constructing cutting algorithms with dropping of cutting planes *Russian Math.*, No. 57, 60–64 (2013).

Simplex-Like Algorithms for Linear Semidefinite Optimization

Zhadan V.

zhadan@ccas.ru

Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC, Vavilova st. 40, Moscow, 119333,
Russia

At present the most popular numerical methods for solving linear semidefinite programming problems are interior point techniques. Nevertheless there are some methods which are generalization of well-known primal simplex method for linear programming [1], [2]. In this paper we consider the other variants of primal and dual simplex-like algorithms for linear semidefinite optimization [3], [4].

Let \mathbb{S}^n denote the space of real symmetric matrices of order n , and let \mathbb{S}_+^n denote the cone of positively semidefinite matrices from \mathbb{S}^n . We right also $M \succeq 0$ to mean that $M \in \mathbb{S}_+^n$. The scalar (inner) product of two matrices M_1 and M_2 from \mathbb{S}^n is defined as the trace of the matrix $M_1 M_2$ and is denoted by $M_1 \bullet M_2$. The dimension of \mathbb{S}^n is equal to so-called n -th triangular number $n_\Delta = n(n + 1)/2$.

The linear semi-definite programming problem is to find

$$\begin{aligned} & \min C \bullet X, \\ & A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad X \succeq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $C \in \mathbb{S}^n$ and $A_i \in \mathbb{S}^n$, $1 \leq i \leq m$, are given. The matrix $X \in \mathbb{S}^n$ is a variable.

The dual problem to (1) has the form

$$\begin{aligned} & \max b^T u, \\ & \sum_{i=1}^m u^i A_i + V = C, \quad V \succeq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

where $b = [b^1, \dots, b^m]$, $V \in \mathbb{S}^n$. We assume that the matrices A_i , $1 \leq i \leq m$, are linear independent. We assume also that both problems (1) and (2) are nondegenerate, i.e. all feasible points are nondegenerate.

The optimality conditions for problems (1) and (2) are as follows

$$\begin{aligned} X \bullet V &= 0, \\ A_i \bullet X &= b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ V &= C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \\ X &\succeq 0, \quad V \succeq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Later on we will use the equivalent form of optimality conditions (3) based on vector representation of matrices.

Let $\text{vech}X$ denote the direct sum of parts of columns of $X \in \mathbb{S}^n$ beginning with the diagonal entry. The dimension of $\text{vech}X$ is equal to n_Δ . The operation $\text{svec}X$ is defined similarly. It differs from the preceding operation $\text{vech}X$ only in that the off-diagonal entries of X are multiplied by $\sqrt{2}$ before placing into $\text{svec}X$. Then the optimality conditions (3) can be rewritten in the vector form as

$$\begin{aligned} \langle \text{svec}X, \text{svec}V \rangle &= 0, \\ \mathcal{A}_{\text{svec}} \text{svec}X &= b, \\ \text{svec}V &= \text{svec}C - \mathcal{A}_{\text{svec}}^T u, \end{aligned} \tag{4}$$

where angle brackets indicate the Euclidean inner product in finite-dimensional vector space, and $\mathcal{A}_{\text{svec}}$ denotes the $m \times n_\Delta$ matrix with $\text{svec}A_i$ as its rows, $1 \leq i \leq m$. Matrices X and V must be positively semi-definite.

The primal and dual simplex-like algorithms for (1) and (2) can be considered as special ways for solving the system of optimality conditions (4).

1) The primal simplex method. Let \mathcal{F}_P be the feasible set in problem (1), and let for $X \in \mathcal{F}_P$ we have

$$X = Q \text{Diag}(\eta^1, \dots, \eta^r, 0, \dots, 0) Q^T, \tag{5}$$

where Q is an orthogonal matrix of order n , $\eta^i > 0$, $1 \leq i \leq r$. We denote by Q_B the $n \times r$ submatrix of Q formed from the first r columns of Q . We denote also by $\mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B}$ the $m \times r_\Delta$ matrix with rows $\text{svec}Q_B^T A_i Q_B$, $1 \leq i \leq m$. Then X is an extreme point of \mathcal{F}_P , if and only if the rank of the matrix $\mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B}$ is equal to r_Δ . Therefore the point $X \in \mathcal{F}_P$ may be extreme only when the rank r of X is such that $r_\Delta \leq m$. We say that the extreme point $X \in \mathcal{F}_P$ is *regular* if $r_\Delta = m$. Otherwise, in the case where $r_\Delta < m$, we call the extreme point X *irregular*. Note that all extreme points of \mathcal{F}_P are irregular if m is not a triangular number.

At first we consider pivoting in a regular case. Let X be the extreme point \mathcal{F}_P with the rank r , and let $V^{Q_B} = Q_B^T V Q_B$, $C^{Q_B} = Q_B^T C Q_B$. Then the first equality from (4) is fulfilled if

$$\text{svec}V^{Q_B} = \text{svec}C^{Q_B} - (\mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B})^T u = 0_{r_\Delta}. \quad (6)$$

This system is a system of m linear equations with respect to m unknowns u^i , $1 \leq i \leq m$. The square matrix $\mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B}$ of order $m = r_\Delta$ is non-degenerate. Solving system, (6) we obtain

$$u = \left((\mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B})^T \right)^{-1} \text{svec}C^{Q_B}.$$

If the matrix $V(u) = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i$ is positively semi-definite, then X is a solution of problem (1). Otherwise there exists the eigenvalue $\theta^k < 0$ of $V(u)$ with the corresponding eigenvector h_k . The point X is updated in accordance with the following formulae

$$\bar{X} = X + \alpha \Delta X, \quad \Delta X = Q_B \Delta Z Q_B^T + h_k h_k^T, \quad (7)$$

where $\alpha > 0$ is a step-size, and the matrix $\Delta Z \in \mathbb{S}^r$ satisfies to equations

$$A_i \bullet [Q_B \Delta Z Q_B^T + h_k h_k^T] = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

The value of objective function $C \bullet X$ in the updated point \bar{X} is less than in the previous point X , namely

$$C \bullet \bar{X} = C \bullet X + \alpha \theta^k < C \bullet X. \quad (8)$$

The step-size α is chosen in such a way that the updated point \bar{X} is an extreme point of \mathcal{F}_P too.

In the case where the extreme point X is irregular the system (6) is underdetermined. Therefore we take the normal solution

$$u = \mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B} \left[(\mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B})^T \mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B} \right]^{-1} \text{svec}C^{Q_B}.$$

The matrix ΔX in (7) is replaced by the following one

$$\Delta X = [Q_B h_k] \begin{bmatrix} \Delta Z & w \\ w^T & 1 \end{bmatrix} [Q_B h_k]^T,$$

where the vector w is chosen by a special way in order to preserve the formulae (8). Here we suppose in addition that $m = r_\Delta + p$ with $0 < p < r$.

2) The dual simplex method. Denote by \mathcal{F}_D the feasible set at problem (2), i.e.

$$\mathcal{F}_D = \left\{ u \in \mathbb{R}^m : C - \sum_{i=1}^m u^i A_i \succeq 0 \right\}.$$

Let $u \in \mathcal{F}_D$, and let the rank of the matrix $V(u) = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i$ be equal s . Then the point u is an extreme point of \mathcal{F}_D if and only if $s_\Delta \leq n_\Delta - m$. In the case where this inequality is fulfilled as equality, we call u a regular extreme point. Otherwise, when $s_\Delta < n_\Delta - m$, we say that u is an irregular extreme point.

We assume that the matrix $V = V(u)$ can be represented in the form

$$V = H \text{Diag}(0, \dots, 0, \theta^{r+1}, \dots, \theta^n) H^T,$$

where H is an orthogonal matrix, and $r = n - s$. The eigenvalues θ^i , $r < i \leq n$, are positive. In what follows we need in matrices: $V^H = H^T V H$, $X^H = H^T X H$, $A_i^H = H^T A_i H$, $1 \leq i \leq m$. We denote also by \mathcal{A}_{svec}^H the $m \times n_\Delta$ matrix, in which the rows are the vectors $\text{svec}A_i$, $1 \leq i \leq m$.

Consider the case where u is a regular extreme point of \mathcal{F}_D . Thus we have $m = n_\Delta - s_\Delta$. Let $\mathcal{A}_{svec_B}^H$ be the submatrix of \mathcal{A}_{svec}^H consisting of the first m columns. We partition also the vector $\text{svec}X^H$ on two parts:

$$\text{svec}X^H = [\text{svec}_B X^H, \text{svec}_N X^H]^T, \quad \text{svec}_B X^H \in \mathbb{R}^m, \quad \text{svec}_N X^H \in \mathbb{R}^{n_\Delta - m}.$$

The same partition will be used for other n_Δ -dimensional vectors.

Assume that $\text{svec}_N X^H = 0_{n_\Delta - m}$. Then the equality $\mathcal{A}_{svec} \text{svec}X = b$ from (4) is reduced to

$$\mathcal{A}_{svec_B}^H \text{svec}_B X^H = b. \quad (9)$$

Since u is an extreme point, the matrix of this system is nonsingular. Therefore, solving the system (9), we obtain

$$\text{svec}X^H = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}_{svec_B}^H)^{-1} b \\ 0_{s_\Delta} \end{bmatrix}.$$

If the corresponding matrix $X = H X^H H^T$ is positively semi-definite, then u is the solution of (2).

Let $X = Q \text{Diag}(\eta) Q^T$, where Q is an orthogonal matrix, and η is a vector of eigenvalues of X . If the matrix X is not positively semi-definite, then there exists the negative eigenvalue η^k with the corresponding eigenvector q_k . Then we update the point u by setting

$$\bar{u} = u - \alpha \Delta u,$$

where α is a step-size. The vector Δu is satisfied to the following system of linear equations

$$(\mathcal{A}_{svec_B}^H)^T \Delta u = svec_B Q_k^H, \quad Q_k^H = H^T q_k q_k^T H. \quad (10)$$

The value of objective function in the dual problem (2) is increased according to the following formulae

$$b^T \bar{u} = b^T u - \alpha \eta^k > b^T u. \quad (11)$$

In the case where u is an irregular extreme point of \mathcal{F}_D , the system (9) is underdetermined and we take

$$svec_B X^H = (\mathcal{A}_{svec_B}^H)^T \left[\mathcal{A}_{svec_B}^H (\mathcal{A}_{svec_B}^H)^T \right]^{-1} b$$

as its solution. On the contrary, the system (10) is overdetermined. Therefore we apply the other more general approach for finding Δu . We pass from the direction Δu in \mathbb{R}^m to the direction ΔV in the space \mathbb{S}^n , for which the following expression is used

$$\Delta V = [q_k \ H_N] \begin{bmatrix} 1 & w^T \\ w & \Delta Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_k^T \\ H_N^T \end{bmatrix}.$$

Here H_N is a submatrix of the matrix H , composed from the last s columns of H , and $w = Wy$, where the columns w_j of the matrix W are such that $q_k^T H_N w_j = 0$. Using the relation $\Delta V = \sum_{i=1}^m \Delta u^i A_i$, it is possible to find Δu , for which the formulae (11) is preserved.

Theorem. *Let solutions X_* and $V_* = V(u_*)$ of problems (1) and (2) be strictly complementary, i.e. for eigenvalues η_*^i and θ_*^i of X_* and V_* the following inequalities $\eta_*^i + \theta_*^i > 0$, $1 \leq i \leq n$, hold. Then the sequences $\{X_k\}$ and $\{u_k\}$, generated by proposed methods, converge to X_* and u_* respectively.*

References

- [1] J.B. Lasserre, “Linear programming with positive semi-definite matrices”, *MPE*, 2, 499–522 (1996).
- [2] A.I.Kosolap, “Symplex method for solving semi-definite programming problems”, *Vest. Donetsk nats. Univ., Ser A Estestv. Nauki*, No. 2, 365–369 (2009).
- [3] V.G. Zhadan, “On variant of the simplex method for linear semidefinite programming problem”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS*, 21, No. 3, 117–127 (2015).
- [4] V.G. Zhadan, “A variant of dual simplex method for linear semidefinite programming problem”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS*, 22, No. 3, 90–100 (2016).

A Stable Solution of Linear Programming Problems with the Approximate Matrix of Coefficients

Ерохин В.И.

erohin_v_i@mail.ru

Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского, ул. Ждановская, д.
13, Санкт-Петербург, 197198, Россия

Устойчивое решение задач линейного программирования с приближенной матрицей коэффициентов

Пусть

$$\begin{aligned} L(A, b, c) : Ax = b, \quad x \geq 0, \quad c^\top x \rightarrow \max, \\ L^*(A, b, c) : u^\top A \geq c^\top, \quad b^\top u \rightarrow \min \end{aligned}$$

– пара взаимно двойственных задач линейного программирования (ЛП),
 $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b, u \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{M}^{m \times n}$, $\mathcal{M}^{m \times n}$ – множество вещественных матриц размера $m \times n$, $\mathcal{X}(A, b) \triangleq \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $\mathcal{U}(A, c) \triangleq \{u \mid u^\top A \geq c^\top\}$
– допустимые множества указанных задач, причем разрешимость задач $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ в общем случае не оговаривается.

Предположим, что существует матрица $A_0 \in \mathcal{M}^{m \times n}$ такая, что задачи $L(A_0, b, c)$ и $L^*(A_0, b, c)$ являются собственными. Будем называть матрицу A_0 *точной*, матрицу A – *приближенной*, а соответствующие задачи ЛП – задачами с точной и приближенной матрицами. Предположим, что выполняется условие $\|A - A_0\| \leq \mu$, где $\mu > 0$ – некоторая априорно известная константа, символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова матричная норма (в дальнейших выкладках также обозначена евклидова векторная норма). Следуя логике работ [1, 2], рассмотрим следующую задачу.

Задача Z_A : найти $A_1 \in \mathcal{M}^{m \times n}$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $u_1 \in \mathbb{R}^m$ такие, что $\|A - A_1\| \leq \mu$, $x_1 \in \mathcal{X}(A_1, b)$, $u_1 \in \mathcal{U}(A_1, c)$, $c^\top x_1 = b^\top u_1$, $\|x_1\|^2 + \|u_1\|^2 \rightarrow \min$.

Формулировка задачи Z_A допускает следующую содержательную интерпретацию: паре задач $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ (не обязательно разрешимых) с приближенной матрицей A ставятся в соответствие разрешимые задачи $L(A_1, b, c)$ и $L^*(A_1, b, c)$ с матрицей A_1 , «близкой» к A в смысле евклидовой нормы разности указанных матриц. Векторы x_1 и u_1 – решения указанных задач, сумма квадратов их евклидовых норм – минимальна. Можно показать, что при $\mu \rightarrow 0$ выполняются условия $A_1 \rightarrow A_0$, $x_1 \rightarrow x_0$, $u_1 \rightarrow u_0$, где x_0 и u_0 – решения задачи $L(A_0, b, c)$ и $L^*(A_0, b, c)$ соответственно, причем сумма евклидовых норм векторов x_0 и u_0 является минимальной. Т.е., векторы x_1 и u_1 являются устойчивым приближением к

нормальному решению пары взаимно двойственных задач ЛП с точной матрицей A_0 .

Важным инструментом решения задачи Z_A , наряду с классической теорией двойственности для задач ЛП, является следующая

Теорема 1[3]. Система $Ax = b, u^\top A = v$ разрешима относительно неизвестной матрицы $A \in \mathcal{M}^{m \times n}$ при заданных векторах $x, v \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$, $u \neq 0$, тогда и только тогда, когда выполняется условие $v^\top x = u^\top b = \alpha$. Решение \hat{A} с минимальной евклидовой нормой единственно и определяется формулами

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{uv^\top}{u^\top u} - \alpha \frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u}, \quad \|\hat{A}\|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2}.$$

Теорема 1 позволяет свести задачу Z_A к следующей задаче математического программирования.

Задача \tilde{Z}_A : найти $x, d \in \mathbb{R}^n$, $d^\top x = 0$, $u \in \mathbb{R}^m$ такие, что $x, d \geq 0$, $c^\top x = b^\top u = \gamma$, $\alpha = \gamma - u^\top Ax$,

$$\frac{\|b - Ax\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|c + d - A^\top u\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2} \leq \mu^2, \quad \|x\|^2 + \|u\|^2 \rightarrow \min.$$

Справедлива

Теорема 2. Решение задачи Z_A (матрица A_1 , векторы x_1 и u_1) существует. При этом векторы x_1 , d_1 и u_1 являются решением задачи \tilde{Z}_A , матрица A_1 имеет вид $A_1 = A + H$, где

$$H = \frac{(b - Ax_1)x_1^\top}{x_1^\top x_1} + \frac{u_1(c + d_1 - A^\top u_1)^\top}{u_1^\top u_1} - \alpha \frac{u_1 x_1^\top}{x_1^\top x_1 \cdot u_1^\top u_1},$$

$$\alpha = \gamma - u_1^\top Ax_1, \quad \gamma = c^\top x_1 = b^\top u_1, \quad \text{и выполняются условия } \|H\| = \mu,$$

$$\|x_1\| \geq \frac{\|b - Ax_1\|}{\mu}, \quad \|u_1\| \geq \frac{\|c + d_1 - A^\top u_1\|}{\mu}. \quad (1)$$

Следствие. Если условия (1) выполнены как равенства и существуют скаляры $k_1, k_2 > 0$ такие, что

$$A(c + d_1 - A^\top u_1) = k_1 Ax_1, \quad A^\top(b - Ax_1) = k_2 A^\top u_1,$$

то для матрицы H справедливы соотношения

$$H = \mu \frac{b - Ax_1}{\|b - Ax_1\|} \cdot \frac{(c + d_1 - A^\top u_1)^\top}{\|c + d_1 - A^\top u_1\|} = \mu \frac{u_1 x_1^\top}{\|x_1\| \cdot \|u_1\|}, \quad \text{rank } H = 1.$$

Пример. Даны задачи ЛП $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ со следующими численными значениями [3]:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 9 & 9 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 15 & -7 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 0 \\ -4 & 18 & 14 & 30 & -10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемые задачи являются *несобственными задачами ЛП 3-го рода* [4]. В этом можно убедиться, проверив выполнение условий $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset, \mathcal{U}(A, c) = \emptyset$ с помощью леммы Минковского-Фаркаша и теоремы Александрова-Фань-Цзи. В первом случае достаточно подставить вектор $u = (1 \ 1 \ 2 \ -1)^\top$ в систему неравенств $u^\top A \geq 0, u^\top b < 0$, во-втором – подставить вектор $x = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)^\top$ в систему $Ax = 0, c^\top x > 0, x \geq 0$. Решение задач $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ методами матричной коррекции [3, 4, 5] невозможно в силу невыполнения соответствующих необходимых условий существования решения. При этом $\|\tilde{x}\|, \|\tilde{u}\| \rightarrow \infty$ при $\|\tilde{A} - A\| \rightarrow 0$ для всех $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{A}$ таких, что $\tilde{x} \in \mathcal{X}(\tilde{A}, b), \tilde{u} \in \mathcal{U}(\tilde{A}, c)$. В то же время задача Z_A разрешима при всех $\mu > 0$. Приведем решение задачи Z_A при $\mu = 1$:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1.10820604 \\ 0.00000000 \\ 1.48617218 \\ 0.31546409 \\ 1.72643469 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} 0.00000000 \\ 2.64534153 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} -1.36737253 \\ -1.16368332 \\ -0.75014467 \\ 1.27068209 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -6.28768083 & 0.00062888 & 8.68557119 & 8.96905780 & -3.34193009 \\ 1.73570295 & 9.00053520 & 4.70629889 & 14.96812462 & -7.32132691 \\ -0.18032342 & 9.00034500 & -0.20267162 & 5.97661988 & -0.22263716 \\ -3.70908047 & 17.99941559 & 14.32381877 & 30.03546691 & -9.64551213 \end{pmatrix}.$$

Простой подстановкой можно убедиться в выполнении условий $\|A - A_1\| = \mu, x_1 \in \mathcal{X}(A_1, b), u_1 \in \mathcal{U}(A_1, c), c^\top x_1 = b^\top u_1$. Численные эксперименты показывают, что малым вариациям параметра μ соответствуют малые вариации параметров x_1, u_1, A_1 .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А.Н., “О приближенных системах линейных алгебраических уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 20, No. 6, 1373–1383 (1980).
- [2] Тихонов А.Н., “О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений”, *Докл. АН СССР*, 254, No. 3, 549–554 (1980).

- [3] Ерохин В.И., “Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 47, No. 4, 587–601 (2007).
- [4] Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н., *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования*, М.: Наука, (1983).
- [5] Ерохин В.И., “О некоторых достаточных условиях разрешимости и неразрешимости задач матричной коррекции несобственных задач линейного программирования”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 21, No. 3, 110–116 (2015).

On a Family of Subgradient Algorithms with Space Transformation

Журбенко Н.Г.

zhurbnick@yandex.ru

Институт кибернетики НАН Украины, проспект Глушкова, 40, г. Киев, 03187,
Украина

Об одном семействе субградиентных алгоритмов с преобразованием пространства

Более 40 лет назад был разработан субградиентный алгоритм минимизации с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов – г-алгоритм [1]. Практика использования г-алгоритма показывает, что до сих пор он является одним из наиболее эффективных алгоритмов негладкой оптимизации. Однако теоретическое исследование эффективности алгоритма далеко не закончено.

В докладе будет представлено семейство субградиентных алгоритмов с преобразованием пространства – результаты автора по разработке субградиентных алгоритмов, сравнимых по эффективности с г-алгоритмом. Алгоритмы основаны на свойствах отсекающих плоскостей и поэтому имеют много общего с методами уровней [2] и методом отсекающих плоскостей [3]. Однако описание содержательного смысла и формальная схема алгоритмов основана на использовании языка « ε -субградиентнов». При этом используется несколько отличное от классического определение ε -субградиента [4]. Определение агрегатного субградиента также не совпадает с (обычно используемым) кратчайшим вектором выпуклой оболочки накопленного множества субградиентов.

На содержательном уровне краткая характеристика алгоритмов состоит в следующем.

Рассматривается задача ε -минимизации ограниченной снизу выпуклой функции $f(x)$ в n -мерном евклидовом пространстве R^n .

Определены данные:

шар с центром в начальной точке алгоритма, содержащий (хотя бы одну) оптимальную точку;

ε – параметр, определяющий задаваемую точность решения задачи (по функционалу);

$q < 1$ – гарантированный коэффициент уменьшения объема эллипсоида локализации решения задачи на каждой итерации алгоритма.

Если известно оптимальное значение функции $f(x)$, то в алгоритме это значение f^* существенно используется (взамен текущего значения вычисленного рекордного значения функции).

Итерация k алгоритма состоит в следующем.

В текущей точке x_k имеется множество ε -субградиентов G . Это множество пополняется новыми ε -субградиентами. Генерация этих субградиентов основана на использовании конструктивной процедуры спуска по специальному выбираемым направлениям. Эти направления определяются текущим множеством G . Такая генерация множества G производится до тех пор, пока это множество обеспечит уменьшение объема эллипсоида текущей локализации решения задачи не менее чем в q -раз. Доказывается, что такой процесс генерации G конечен: или заданное уменьшение объема обеспечивается, или устанавливается факт решения задачи ε -оптимизации.

Новый эллипсоид локализации определяется аналитическим решением одной из следующих двух простых задач. Первая задача (случай 1) состоит в определении минимального по объему эллипсоида, содержащего сектор шара. Сектор шара определяется «агрегатным» субградиентом множества G . Вторая задача (случай 2) состоит в определении минимального по объему эллипсоида, содержащего сегмент шара. Сегмент шара определяется двумя субградиентами из выпуклой оболочки множества G такими, что угол между ними больше $\pi/2$.

Очередное преобразование пространства производится в соответствии с линейным самосопряженным оператором, отображающим указанный эллипсоид в шар. Если новый эллипсоид локализации определяется реализацией случая 1, то этим оператором является оператор растяжения [5] по агрегатному ε -субградиенту. В этом случае при переходе к $k + 1$ -итерации изменяется текущее приближение x_k : выполняется шаг по агрегатному ε -субградиенту (разумеется, в преобразованном пространстве).

Если новый эллипсоид локализации определяется реализацией случая 2, то этим оператором является оператор растяжения по $(n - 1)$ -им взаимно ортогональным направлениям. В этом случае при переходе к $k + 1$ -итерации текущее приближение x_k не изменяется.

Для числа итераций k рассматриваемого семейства алгоритмов, за которые они обеспечивает решение 2ε -оптимизации, справедлива следующая оценка:

$$k \leq \left\lceil n \frac{\ln(1/\gamma)}{\ln(1/q)} \right\rceil,$$

где γ — относительная точность решения задачи ($\gamma = \varepsilon/(RC)$, где C — оценка сверху норм субградиентов в шаре начальной локализации решения).

Представляемое семейство алгоритмов относится к классу методов с преобразованием пространства [5]. Можно интерпретировать, что эти алгоритмы объединяют алгоритмы Н.З. Шора с растяжением пространства по субградиенту и по разности двух последовательных субградиентов [5].

В докладе будут представлены результаты исследования численной эффективности конкретной реализации алгоритма. Численные эксперименты показывают, что (по числу итераций) эффективность этой реализации сравнима с эффективностью г-алгоритма. Однако трудоемкость одной итерации этой реализации существенно больше трудоемкости итерации г-алгоритма.

На основе изложенных положений, разработана модификация субградиентного алгоритма Поляка Б.Т. [6] с использованием операторов преобразования пространства. Для этого алгоритма получена следующая оценка его трудоемкости.

Для числа итераций k алгоритма, за которые он обеспечивает решение задачи 2ε -оптимизации справедлива следующая оценка:

$$k \leq \frac{2n \ln(1/\gamma)}{n\gamma^2 + 2\gamma} < \min\{ (2/\gamma^2) \ln(1/\gamma); n(1/\gamma)\ln(1/\gamma) \},$$

где γ — относительная точность решения задачи ε -оптимизации.

Комментарий к оценке трудоемкости алгоритма.

Для задач большой размерности и относительно малой точности решения ($n \gg 1/\gamma$) оценка соответствует оценке трудоемкости алгоритма Б.Т. Поляка с точностью до множителя $\ln(1/\gamma)$. Как известно, оценка трудоемкости алгоритма Поляка — $O(1/\gamma^2)$, и она не улучшаема в классе алгоритмов с независящей от размерности R^n эффективностью [7].

Для задач высокой точности решения ($1/\gamma \gg n$) оценку целесообразно сравнить с трудоемкостью алгоритма эллипсоидов ($n^2 \ln(1/\gamma)$) [7].

Для задач минимизации овражных функций с высокой точностью решения и сравнительно небольшой размерностью (до 1000 переменных)

эффективность разработанной модификации может быть существенно выше эффективности классического алгоритма Поляка.

Работа выполнена при частичной поддержке Volkswagen Foundation (грант № 90 306).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. *Кибернетика*, No. 3, 51-59 (1971).
- [2] Lemarechal C., Nemirovskii A. and Nesterov Yu. New variants of bundle methods. *Mathematical Programming*. No. 69, 111-148 (1995).
- [3] Нурминский Е.А. Метод отделяющих плоскостей с ограниченной памятью для решения задач выпуклой негладкой оптимизации. *Вычислительные методы и программирование*. Т. 7, 133-137 (2006).
- [4] Lemarechal C., Mifflin K., *Nonsmooth Optimization*, Oxford: Pergamon Press, (1978).
- [5] Шор Н.З., *Методы минимизации недифференцируемых функций и их применение*, Киев: Наук.думка, (1979).
- [6] Поляк Б.Т., Минимизация негладких функционалов. *Журн. вычисл. математики и матем. физики*, No. 3, 507-521 (1969).
- [7] Юдин Д.Б., Немировский А.С, *Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач*, Москва: Наука, (1979).

Метод отсечений с использованием штрафных функций

Заботин И.Я., Казаева К.Е.

IYaZabotin@mail.ru, k.e.kazaeva@gmail.com

Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, г. Казань, 420008, Россия

Предлагается алгоритм для задачи выпуклого программирования, относящийся к классу методов отсечений и основанный на использовании внешних штрафных функций области ограничений. Для отыскания итерационных точек алгоритм использует операцию погружения допустимой области и надграфика каждой вспомогательной функции в некоторые многогранные множества.

Решается задача

$$\min \{f(x) : x \in D\}, \quad (1)$$

где D — выпуклое ограниченное замкнутое множество из n -мерного евклидова пространства R_n , а $f(x)$ — выпуклая в R_n функция.

Положим $f^* = \min\{f(x) : x \in D\}$, $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $\text{epi}(f, D) = \{(x, \gamma) \in R_{n+1} : x \in D, \gamma \geq f(x)\}$, $W(z, Q)$ — множество нормированных обобщенно-опорных к множеству $Q \subset R_{n+1}$ в точке $z \in R_{n+1}$ векторов, $\text{int } Q$ — внутренность множества Q , $K = \{0, 1, \dots\}$.

Предлагаемый алгоритм решения задачи (1) вырабатывает последовательность приближений $\{y_i\}$, $i \in K$, и заключается в следующем. Задаются выпуклые штрафные функции $P_i(x)$, $i \in K$, с условиями, что $P_i(x) = 0$ для всех $x \in D$, $i \in K$, и

$$0 < P_i(x) \leq P_{i+1}(x), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P_i(x) = +\infty$$

для всех $x \notin D$, $i \in K$, и полагается

$$F_i(x) = f(x) + P_i(x), \quad i \in K.$$

Выбирается точка $v \in \text{int epi}(f, D)$. Строятся выпуклое ограниченное замкнутое множество $D_0 \subset R_n$ и выпуклое замкнутое множество $M_0 \subseteq R_{n+1}$ такие, что

$$D \subset D_0, \quad \text{epi}(F_0, R_n) \subset M_0.$$

Задается число $\bar{\gamma}$ с условием, что $\bar{\gamma} \leq f_0^* = \min\{f(x) : x \in D_0\}$. Полагается $i = 0$.

1. Отыскивается точка $u_i = (y_i, \gamma_i)$, где $y_i \in R_n$, $\gamma_i \in R_1$, как решение задачи

$$\gamma = \min, \quad (2)$$

$$x \in D_0, \quad (x, \gamma) \in M_i, \quad \gamma \geq \bar{\gamma}. \quad (3)$$

Если

$$u_i \in \text{epi}(f, D), \quad (4)$$

то $y_i \in X^*$, и процесс заканчивается.

2. В интервале (v, u_i) выбирается точка $v_i \in R_{n+1}$ так, чтобы $v_i \notin \text{int epi}(F_i, R_n)$ и при некотором $q_i \in [1, q]$, $q < +\infty$, для точки $z_i = u_i + q_i(v_i - u_i)$ имело место включение $z_i \in \text{epi}(F_i, R_n)$.
3. Выбирается конечное множество $A_i \subset W(v_i, \text{epi}(F_i, R_n))$ и полагается

$$M_{i+1} = M_i \cap T_i, \quad (5)$$

где $T_i = \{u \in R_{n+1} : \langle a, u - v_i \rangle \leq \forall a \in A_i\}$.

4. Значение i увеличивается на единицу и следует переход к п.1 алгоритма.

Штрафные функции $P_i(x)$ на предварительном шаге алгоритма можно задать, например, согласно [1].

Если множества D_0 и M_0 выбирать многогранными, то задачи (2), (3) построения приближений будут при всех $i \in K$ задачами линейного программирования. Если положить $M_0 = R_{n+1}$, то любая точка $(y_0, \bar{\gamma})$, где $y_0 \in D_0$, будет решением задачи (2), (3) при $i = 0$.

Приводятся некоторые свойства задачи (2), (3). Показывается, что при выполнении включения (4) точка y_i является решением задачи (1). С учетом условий выбора точек z_i в п.2 обосновывается

Лемма 1. Для любой предельной точки \bar{z} последовательности $\{z_i\}$, $i \in K$, справедливо включение $\bar{z} \in \text{epi}(f, D)$.

На основе способа (5) построения аппроксимирующих множеств доказывается

Лемма 2. Если $\{u_i\}$, $i \in K' \subset K$, — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_i\}$, $\{u_i\}$, $i \in K$, то

$$\lim_{i \in K'} \|v_i - u_i\| = 0.$$

С использованием лемм 1, 2 доказывается следующая теорема сходимости алгоритма.

Теорема 1. Пусть $\tilde{u} = (\tilde{y}, \tilde{\gamma})$ — предельная точка последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$, построенной предложенным алгоритмом. Тогда

$$\tilde{y} \in X^*, \quad \tilde{\gamma} = f^*.$$

Описывается некоторые реализации метода. Для точек y_i , попавших в область D , приводятся оценки близости их к решению исходной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] 1. Васильев Ф. П., “Методы оптимизации: в 2 кн.”: — М.: МЦНМО. – 2011.
- Кн. 1. - 620 с.

Algorithms of Interior Point Method: Results of Development and Research

Зоркальцев В.И.

zork@isem.irk.ru

ИСЭМ СО РАН, ул. Лермонтова 130, Иркутск, 664033, Россия

Алгоритмы метода внутренних точек: результаты разработки и исследования

В докладе планируется представить результаты развития, исследования и применения в моделях энергетики алгоритмов внутренних точек [1].

Рассмотрим двойственные задачи линейного программирования:

$$c^T x \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad x \geq 0; \quad (1)$$

$$b^T u \rightarrow \max, \quad g(u) \geq 0, \quad g(u) \equiv c - A^T u. \quad (2)$$

Заданы векторы $c \in R^n$, $b \in R^m$, матрица A размера $m \times n$. Обозначим X , \bar{X} и U , \bar{U} множества из R^n и R^m допустимых и оптимальных решений задачи (1) и (2).

Семейство алгоритмов. Стартовой точкой может служить любой вектор $x^0 > 0$ из R^n . Вырабатывается последовательность векторов $x^k > 0$ (т.е. со всеми положительными компонентами), где $k = 0, 1, 2, \dots$, номер итерации.

В начале итерации k вычисляется вектор невязок

$$r^k = b - Ax^k. \quad (3)$$

Пусть $D_k = \text{diag } d^k$, где d^k – вектор R^n весовых коэффициентов таких, что

$$\underline{\sigma}(x_j^k) \leq d_j^k \leq \bar{\sigma}(x_j^k), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Здесь $\underline{\sigma}, \bar{\sigma}$ могут быть любыми непрерывными функциями, обладающими двумя свойствами:

$$0 < \underline{\sigma}(\alpha) \leq \bar{\sigma}(\alpha) \text{ при всех } \alpha > 0; \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}(\alpha) \leq M\alpha \text{ при всех } \alpha \in (0, \delta] \quad (6)$$

для некоторых $M > 0$, $\delta > 0$. В рамках этих условий существует много конкретных правил задания весовых коэффициентов, поэтому речь идет о семействе алгоритмов.

Считаем, что система $Ax = b$ совместна и $\text{rank } A = m$. Это гарантирует существование и единственность решений системы линейных уравнений

$$(AD_k A^T)u = r^k + AD_k c \quad (7)$$

относительно вектора переменных u из R^m . Решение этой системы обозначим u^k . Вычисляем направление и шаг корректировки решения:

$$s^k = -D_k g(u^k); \quad (8)$$

$$\lambda_k = \min\{1, \tilde{\lambda}_k\}, \quad \text{если } r^k \neq 0, \quad (9)$$

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k, \quad \text{если } r^k = 0, \quad (10)$$

где

$$\tilde{\lambda}_k = \gamma \min\left\{-\frac{x_j^k}{s_j^k} : s_j^k < 0\right\}, \quad (11)$$

при заданном $\gamma \in (0, 1)$. Если $s^k \geq 0$ при $r^k \neq 0$, то полагаем $\lambda_k = 1$. При $r^k = 0$ ситуация $s^k \geq 0$ не возникает, если $\bar{X} \neq \emptyset$, $\bar{X} \neq X$. Переходим к следующей итерации по правилу:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (12)$$

На всех итерациях

$$x^{k+1} \geq (1 - \gamma)x^k > 0, \quad (13)$$

$$r^{k+1} = (1 - \lambda_k)r^k. \quad (14)$$

При $r^k \neq 0$ происходит процесс ввода в область допустимых решений. Заметим, при этом учитывается целевая функция исходной задачи, что позволяет получать первое допустимое решение близким к оптимальному.

При $r^k = 0$ происходит процесс оптимизации в области допустимых решений: $r^{k+1} = 0$,

$$c^T x^{k+1} < c^T x^k. \quad (15)$$

Этап ввода в область допустимых решений можно представить, как процесс оптимизации в области допустимых решений задачи с дополнительной переменной:

$$x_{n+1} \rightarrow \min, \quad Ax + x_{n+1}r^0 = b, \quad x \geq 0, \quad x_{n+1} \geq 0. \quad (16)$$

Определим подмножество алгоритмов, удовлетворяющих более сильному, чем (6) условию: при некотором $M > 0$, для любых $\beta \in (0, 1]$ и $\alpha \in (0, \beta]$

$$\bar{\sigma}(\alpha)/\underline{\sigma}(\beta) \leq M(\alpha/\beta). \quad (17)$$

Выделим еще более узкий класс алгоритмов таких, что для изменяющихся $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1]$

$$(\beta\bar{\sigma}(\alpha))/(\alpha\underline{\sigma}(\beta)) \rightarrow 0 \text{ при } (\alpha/\beta) \rightarrow 0. \quad (18)$$

Условие невырожденности. Задачу (1) назовем невырожденной, если при любом $x \in X$ либо не существует, либо существует и тогда единственный вектор $u \in R^m$ такой, что

$$x_j g_j(u) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Аналогично определяется невырожденность задачи (16).

Теорема 1. *Пусть задача (16) невырожденная и имеет оптимальное решение с $x_{n+1} = 0$, $x > 0$. Тогда через конечное число итераций изложенным алгоритмом будет получено решение $x^k > 0$, $x^k \in X$.*

Эта и приводимая ниже теоремы являются развитием утверждений, доказанных в [2]. Обозначим $ri \bar{X}$, $ri \bar{U}$ множества оптимальных решений задач (1), (2) с минимальными наборами активных ограничений (множества относительно внутренних точек полиэдров \bar{X} и \bar{U}).

Теорема 2. *Пусть задача (1) невырождена, $x^0 \in X$. Справедливы следующие утверждения.*

1. Для некоторых $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{u} \in ri \bar{U}$

$$x^k \rightarrow \bar{x}, u^k \rightarrow \bar{u} \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (20)$$

2. Если выполняется (17), то $\bar{x} \in ri \bar{X}$, величины $\|x^k - \bar{x}\|$, $\|u^k - \bar{u}\|$ сходятся к нулю линейно.
3. Если выполняется (18), то

$$\|u^k - \bar{u}\| / \|x^k - \bar{x}\| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (21)$$

и, начиная с некоторой итерации

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|_\infty < \|x^k - \bar{x}\|_\infty, \quad (22)$$

$$\|x^{k+n} - \bar{x}\|_\infty / \|x^k - \bar{x}\|_\infty < (1 - \gamma). \quad (23)$$

Обоснование без привлечения предположения о невырожденности задачи имеется в [3] для алгоритмов с весовыми коэффициентами

$$d_j^k = (x_j^k)^p, j = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

при заданном $p \in [1, 3]$. Причем для $p > 1$ требуется дополнительное условие

$$\gamma \in (0, 2/(p+1)]. \quad (25)$$

В таком случае теорема 1 верна и при исключении условия невырожденности.

Для весовых коэффициентов (24) при всех $p > 1$ выполняется (17) и доказана в [3] линейная сходимость векторов x^k и u^k к некоторым точкам $\bar{x} \in ri \bar{X}$, $\bar{u} \in ri \bar{U}$ без предположения о невырожденности.

Для $p > 1$ выполняется (18). Доказано [3], что без условия невырожденности выполняется (21) и следующее, более сильное, чем (22), (23) утверждение

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| / \|x^k - \bar{x}\| \rightarrow (1 - \gamma) \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Еще в 70-х годах на моделях энергетики для алгоритмов внутренних точек экспериментально была выявлена более быстрая сходимость двойственных оценок, чем переменных исходной задачи. Утверждение (21) является теоретическим обоснованием этого факта. Это приводит к рекомендации использования двойственных алгоритмов внутренних точек в целях более быстрого или более точного получения решения исходной задачи.

Экспериментальные расчеты, в том числе на моделях расчета режимов электроэнергетических систем, показывают высокую вычислительную эффективность следующего правила задания весовых коэффициентов для $k \geq 1$

$$d_j^k = x_j^k / \max\{\varepsilon, |g_j(u^{k-1})|\}, j = 1, 2, \dots, n,$$

при заданном $\varepsilon > 0$.

Большего эффекта можно ожидать от вытекающего из (5) итеративного способа определения весовых коэффициентов, когда в процессе решения вспомогательной задачи поиска вектора u^k могут изменяться в заданных интервалах значения вектора d^k . Особенно эффективен этот путь при решении вспомогательной задачи (7) итеративными методами.

Чебышевская проекция точки на линейное многообразие. Проиллюстрируем возможность алгоритмов внутренних точек на основополагающей задаче минимакса [4, 5] – поиска чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие. Заданы матрица B размера $m \times n$, векторы $h > 0$, b из R^m . Необходимо найти векторы $x \in R^n$, $y \in R^m$, являющиеся решением задачи

$$\max_i h_i |y_i| \rightarrow \text{lex min}, \quad Bx + y = b. \quad (27)$$

Выражение lex min означает следующую лексикографически упорядоченную оптимизацию. Сначала решается задача (27) по всем переменным. Если после этого у решения остается неоднозначность в выборе каких-то y_i , то фиксируем остальные (однозначно заданные для всех оптимальных решений) y_i и решается задача (27) по оставшимся переменным. Процедура повторяется, пока не будет получено однозначное значение вектора y . Свойство алгоритмов внутренних точек вырабатывать относительно внутренние точки оптимальных решений позволяет очень просто осуществлять необходимую после каждого этапа оптимизации селекцию переменных.

Представим задачу (27) на первом этапе в виде задачи линейного программирования с дополнительной переменной α :

$$\alpha \rightarrow \min, \quad Bx + y = b, \quad \alpha + h_i y_i \geq 0, \quad \alpha - h_i y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (28)$$

Решение этой задачи удобно осуществлять двойственными алгоритмами внутренних точек, т.е. путем монотонного улучшения решения двойственной задачи

$$b^T u \rightarrow \max, \quad B^T u = 0, \quad u + Hv - Hw = 0, \quad \sum_{i=1}^m (v_i + w_i) = 1, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0. \quad (29)$$

Здесь $H = \text{diag } h$. Переменные составляют векторы u, v, w из R^m . Можно сразу начинать процесс оптимизации в области допустимых решений задачи (29) с исходного приближения $u^0 = 0, v_i^0 = w_i^0 = 0.5/n, i = 1, \dots, m$.

Пусть получены оптимальные решения с минимальными наборами активных ограничений $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ для задачи (29) и $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}$ для задачи (28). Векторы \bar{x}, \bar{y} , величина $\bar{\alpha}$ составляют множители Лагранжа ограничений-равенств задачи (29). Величина $\bar{\alpha}$ равна также оптимальному значению целевых функций задач (27), (28), (29). Множество номеров $i = 1, \dots, m$ разбивается на два подмножества I и J таких, что

$$\bar{v}_i + \bar{w}_i > 0, \quad h_i |\bar{y}_i| = \bar{\alpha}, \quad i \in I,$$

$$\bar{v}_i = \bar{w}_i = 0, \quad -\bar{\alpha} < h_i \bar{y}_i < \bar{\alpha}, \quad i \in J.$$

Пусть $J \neq \emptyset$. Значения переменных y_i при $i \in I$ фиксируются на уровне \bar{y}_i . В качестве переменных для задачи следующего этапа используются только компоненты вектора x и компоненты y_i при $i \in J$.

На следующем этапа можно осуществлять оптимизацию в области допустимых решений исходной задачи, используя в качестве начального приближения значения

$$\alpha^0 = \bar{\alpha}, \quad x^0 = \bar{x}, \quad y_i^0 = \bar{y}_i, \quad i \in J.$$

Этапы сужения состава переменных повторяются до ситуации, когда сформированное допустимое решение суженной задачи (28) станет и оптимальным. Эта ситуация легко выявляется алгоритмами внутренних точек как появление нулевых векторов корректировки решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-07-07412а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дикин И.И., Зоркальцев В.И., *Итеративное решение задач математического программирования (алгоритмы внутренних точек)*, Наука, (1980).
- [2] Зоркальцев В.И., “Об одном классе алгоритмов внутренних точек”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, 49, No. 12, 2114–2130 (2009).
- [3] Зоркальцев В.И., “Обоснование алгоритмов внутренних точек”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, 39, No. 2, 208–221 (1999).

- [4] Демьянов В.Ф., Малоземцев В.Н., *Введение в минимакс*, Наука, (1982).
 [5] Ремерз Е.Я., *Основы численных методов чебышевских приближений*, Наукова думка, (1969).

Binary Cut-and-Branch Method for Solving Mixed Integer Programming Problems

Мезенцев Ю.А.

mesyan@yandex.ru

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск,
630073, пр. К.Маркса 20, Российская Федерация

Метод Бинарных Отсечений и Ветвлений Решения Задач Смешанного Целочисленного Программирования

Введение

Предлагаемая работа является развитием темы построения эффективных алгоритмов решения задач смешанного целочисленного линейного программирования (milp), составляющих одно из важнейших для практических приложений подмножеств задач недифференцируемой оптимизации. Общим свойством большинства реализаций подобных задач является принадлежность классу NP, большие размерности и сложность структур ограничений, из чего непосредственно следует актуальность разработок специальных методов их решения. Доклад посвящен методу решения задач смешанного целочисленного линейного программирования, основанному на использовании бинарных отсечений (БО) [1,2]. Ниже представлены результаты распространения на задачи milp одного из его алгоритмов, являющегося гибридным алгоритмом бинарных отсечений и ветвлений (АБОВ), сочетающим идею метода ветвей и границ с построением отсекающих плоскостей [2]. Вычислительные эксперименты послужили практическим доказательством применимости АБОВ для их решения и позволили построить ряд новых эвристических процедур синтеза БО, максимально учитывающих специфику реализаций задач milp, что опосредовало существенное увеличение быстродействия программных реализаций алгоритма.

Работа выполнена при поддержке министерства образования и науки РФ, исследовательский проект № 2.2327.2017/ПЧ.

Основные положения метода

Рассматривается задача вида:

$$\gamma(x) = c^1{}^T x + c^2{}^T y + const \rightarrow \max \quad (1)$$

$$A^1x + A^2y \leq b, \bar{0} \leq x \leq \bar{1}, y \geq \bar{0}, \quad (2)$$

$$x \in I_2^{n^1}, \quad (3)$$

являющаяся задачей milp с булевыми переменными x и непрерывными y . Условия (3) определяют принадлежность компонент решения x одной из вершин единичного гиперкуба размерности n^1 , $c^1, x, \bar{0}, \bar{1}$ векторы той же размерности, $\bar{0}$ нулевой, $\bar{1}$ вектор, состоящий из единиц, $const$ некоторая константа и $c^1 \geq \bar{0}$. Векторы $c^2, y, \bar{0}$ имеют размерность n^2 . Фактически к (1)-(3) может быть компактно сведена любая задача milp и значительная часть задач mip, см., например [1,3,4,5].

Пусть x^0, y^0 решение ослабленной задачи (1)-(2), $[.]$ целая часть числа, $\beta_0 = \hat{\alpha}^T x^0$, где $\hat{\alpha}_j \in \{0, 1\}$, $j = \overline{1, n^1}$. Тогда любое неравенство вида:

$$\hat{\alpha}^T x \leq \hat{\beta}_0, \hat{\alpha}_j \in \{0, 1\}, j = \overline{1, n^1}, \hat{\beta}_0 = [\beta_0], \beta_0 = \hat{\alpha}^T x^0 \quad (4)$$

будем именовать бинарным отсечением для задачи (1)-(2).

Если x^0 часть решения ослабленной задачи (1)-(2) x^0, y^0 , то

$$\varsigma^T x \leq \varphi_0, \varphi_0 = \varsigma^T x^0, \quad (5)$$

(5) может являться порождающим неравенством при условиях $\varsigma_j = \sum_{i \in I^B} \lambda_i a_{ij}$, $\lambda_i \geq 0$, где $a_{ij}, i \in I^B$ коэффициенты базисной части A^1 , и λ_i веса базисных ограничений. В частности, если λ_i двойственные оценки ограничений (2), то $\varsigma_j = c_j$, $j = \overline{1, n^1}$.

Определим дополняющую систему БО к системе ограничений (2)

$$A^{1D}x \leq \beta, \quad (6)$$

где $A^{1D} = \left\| \hat{\alpha}_j^i \right\|_{m^D \times n^1}$, $\hat{\alpha}_j^i \in \{0, 1\}$, $j = \overline{1, n^1}$ матрица коэффициентов дополняющей системы, и вектор правых частей отсечений β определяется в соответствии с (4).

Можно предложить несколько способов идентификации правильности БО [2]. В частности, в АБОВ используется следующий признак. Определим:

$$\hat{\alpha}^T x \geq \beta(x^0) + 1, \quad (7)$$

где $\beta(x^0) = \left[\hat{\alpha}^T x^0 \right]$, и x^0 часть оптимального решения x^0, y^0 задачи (1),(2),(6).

Если задача (1),(2),(7) имеет решение, то отсечение $\hat{\alpha}^T x \leq \beta(x^0)$ неправильное. Напротив, если (1),(2),(7) решения не имеет из-за противоречивости условий (2),(7), то $\hat{\alpha}^T x \leq \beta(x^0)$ правильное БО. На применении этого признака основана процедура синтеза БО, названная выбором на множестве ближайших отсечений [1,2]. Опишем названную процедуру.

Определим неравенство-следствие базисной системы (2),(6), переставив упорядочив ς по убыванию (обозначим ς). Рассмотрим совокупность из n^1 векторов, размерности n^1 : $\hat{\alpha}^1 = (1, 0, \dots, 0)$, ..., $\hat{\alpha}^{n^1} = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$ (j начальных единиц), ..., $\hat{\alpha}^j = (1, 1, \dots, 1)$. Каждому $\hat{\alpha}^j$ поставим в соответствие величину

$$cs(\hat{\alpha}^j) = \frac{\varsigma^T \hat{\alpha}^j}{\|\varsigma\|_2 \|\hat{\alpha}^j\|_2}, j = \overline{1, n^1}. \quad (8)$$

Дискретная функция $cs(\hat{\alpha}^j)$ имеет строгий максимум и однозначно определяет приоритет каждого из альтернативных отсечений с коэффициентами $\hat{\alpha}^j$. Добавление всей совокупности таких БО в (6) с решением (1),(2),(7) позволяет выявить противоречивые условия при их наличии, идентифицируя правильные отсечения. Далее, при наличии правильных БО, выбирается единственное из них с максимальным значением $cs(\hat{\alpha}^j)$. При отсутствии правильных отсечений, выбирается БО, соответствующее максимуму $cs(\hat{\alpha}^j)$, $j = \overline{1, n^1}$.

Другой важнейшей характеристикой БО является мера радикальности. Данная величина характеризует глубину отсечения рассматриваемого типа. Для БО $\hat{\alpha}^T x \leq \hat{\beta}_0$, $\hat{\alpha}_j \in \{0, 1\}$, $j = \overline{1, n}$, $\hat{\beta}_0 = [\beta_0]$, $\beta_0 = \hat{\alpha}^T x^0$, под радикальностью r будем понимать число вершин единичного гиперкуба, отсекаемых БО (системой БО) в предположении, что отсечение правильное.

В общем случае $\hat{\alpha}^T x \leq b$, $b \in I_1^k$, $x \in I_{n^1}^2$, $\hat{\alpha} \in I_{n^1}^2$, $k = \sum_{j=1}^{n^1} \hat{\alpha}_j$, $1 \leq k \leq n^1$
или $\sum_{j=1}^{n^1} \hat{\alpha}_j x_j \leq b$, $x_j \in I_1^2$, $j = \overline{1, n^1}$ $\hat{\alpha}_j \in \{0, 1\}$ - коэффициенты отсечения.

При произвольном $b \in I_1^k$, $k = \sum_{j=1}^{n^1} \widehat{a}_j$, $1 \leq k \leq n^1$ и $C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}$, определим:

$$r_k^b = 2^{n^1-k} \sum_{l=b+1}^k C_k^l \rightarrow \max. \quad (9)$$

В (9) учитываются вершины единичного гиперкуба, лежащие «выше» уровня $\widehat{\alpha}^T x \leq b$, т.е. принадлежащие гиперплоскостям $\widehat{\alpha}^T x = l$ с правыми частями $(b+1, b+2, \dots, k)$. Сама же гиперплоскость $\widehat{\alpha}^T x = b$ содержит $2^{n^1-k} C_k^b$ вершин. Максимально радикальное БО определяется в соответствии с (9) и $\widehat{\alpha}_j = 1, j = \overline{1, n^1}$ с возможным исключением компоненты минимального относительно ζ порядка, если сумма коэффициентов левой части БО $\widehat{\alpha}^T \tilde{x} \leq b$ без такого исключения оказывается целым числом.

Независимо от того, какая мера, близость к порождаемому неравенству, или радикальность рассматривается в качестве приоритетной, алгоритм бинарных отсечений и ветвлений выглядит следующим образом.

Алгоритм бинарных отсечений и ветвлений

1. Пусть получено решение исходной релаксированной задачи (1),(2),(4) x^0, y^0 и $\gamma(x^0, y^0)$. Если x^0 целые, останов алгоритма. В противном случае:

2. На шаге $t(1, 2, \dots)$ выбираем вершину для зондирования с максимальной оценкой $\gamma(x^q, y^q)$, $q \in (1, 2, \dots, t-1)$. Если список вершин пуст, задача не имеет целочисленного решения. Останов алгоритма. Если вершина с максимальной оценкой $\gamma(x^q, y^q)$ содержит целочисленные x^q , решение (x^q, y^q) является оптимальным. Останов алгоритма. Иначе:

3. Образуем два новых кандидата, для каждого из которых дополнением текущую матрицу A^{1D} для шага q БО (4) и (7) в соответствии с процедурами выбора отсечения (по величине $cs(\widehat{\alpha}^j)$, либо по мере радиальности отсечения (9)): $(\widehat{\alpha}^{(t+1)})^T x \leq \beta(x^q)$ и $(\widehat{\alpha}^{(t+1)})^T x \geq \beta(x^q) + 1$, соответственно.

4. Решаем пару подзадач с отсечениями $(\widehat{\alpha}^{(t+1)})^T x \leq \beta(x^q)$ и $(\widehat{\alpha}^{(t+1)})^T x \geq \beta(x^q) + 1$.

5. Запоминаем компоненты их решения $\underline{x}^{t+1}, \bar{x}^{t+1}$ и оценки $\gamma(\underline{x}^{t+1}, \bar{y}^{t+1})$, $\gamma(\bar{x}^{t+1}, \bar{y}^{t+1})$, добавляя в список вершин дерева. Если какой либо кандидат не имеет решения, вычеркиваем его из списка вершин.

6. Увеличиваем номер шага ($t := t + 1$), переходим к п. 2.

Заключение

Практические применения выявили ряд классов задач, сводимых к milp, для которых в разной степени эффективны предложенные процедуры построения отсечений. В задачах, для которых удается построение правильных БО, представленная выше процедура, использующая только метрику (8) позволяет в среднем для 75 процентов шагов алгоритма синтезировать правильные отсечения, и в экспериментах АБОВ показывает быстродействие статистически близкое к быстродействию полиномиального алгоритма [2]. Вместе с тем, определены классы задач, для которых не существует правильных БО. Примером могут служить задачи синтеза оптимальных по быстродействию расписаний параллельных систем с задержками начала обслуживания и ряд связанных с ними задач [3-5]. В этих случаях существенно более эффективным, иногда на многое порядков ускоряющим вычисления АБОВ, оказалось использование меры радикальности отсечений (9).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мезенцев Ю.А. “Метод бинарных отсечений и ветвлений целочисленного программирования”, *Доклады академии наук высшей школы РФ*. Новосибирск: Изд-во НГТУ, No. 1(16), 12-25 (2011).
- [2] Mezentsev Y. A.,“Binary Cut-and-Branch Method for Solving Linear Programming Problems with Boolean Variables” *Ceramics International: Discrete Optimization and Operations Research*, No. 1623, 72-85 (2016), online <http://ceur-ws.org/Vol-1623/paperco12.pdf>
- [3] Avdeenko T. V., Mesentsev Y. A. “Efficient approaches to scheduling for unrelated parallel machines with release dates”, *IFAC-Papers Online (IFAC Proceedings Volumes)*, No. 49, iss. 12: 1743–1748 (2016), 8 IFAC conference on manufacturing modelling, management and control MIM 2016, France, Troyes, 28–30 June 2016. Mode of access: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S240589631631117X> .
- [4] Brucker P. Scheduling Algorithms (Fifth ed.), Springer, 372 p., (2007).
- [5] Pinedo, M. Scheduling Theory, Algorithms, and Systems (3nd. ed.), Springer, 672 p., (2008).

Problems and Optimization Algorithms of Schedules of Parallel-Serial Systems with Undefined Service Routes

Мезенцев Ю.А., Эстрайх И.В.

mesyan@yandex.ru, ive7@yandex.ru

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск,
630073, пр. К.Маркса 20, Российская Федерация

Задачи и Алгоритмы Оптимизации Расписаний Параллельно-последовательных Систем с Неопределенными Маршрутами Обслуживания

Введение

Предлагаемая работа посвящена задаче оптимизации расписаний параллельно-последовательной системы с неопределенными маршрутами обслуживания (Undefined routes parallel machines problem, URPM). Данная задача с произвольным числом заявок и приборов в различных модификациях имеет множество теоретических обобщений и практических применений. Частные ее случаи (задача коммивояжера (ЗК), задачи m -коммивояжеров, маршрутизации и связанные темы) разрабатываются давно. Однако, приемлемых по быстродействию средств точного решения общей, а также большинства порождаемых прикладных задач для реальных размерностей найти не удается в силу их принадлежности к множеству труднорешаемых задач дискретной оптимизации (ДО). Этим, а также наличием многочисленных практических приложений, обосновывается актуальность темы. Представлен новый подход к решению проблем составления оптимальных по быстродействию расписаний параллельно-последовательных систем с использованием двухэтапной схемы: кластеризации и последующего определения маршрутов. В качестве критерия рассматривается общее быстродействие системы, что приводит к необходимости применения минимаксных целевых функций с порождением задач трудоемкостей кратно превосходящих экспоненциальную относительно задачи той же размерности с линейным критерием.

Формальная постановка задачи

Рассматривается система параллельных приборов разной производительности и множество заявок с заданными характеристиками (пунктами) обслуживания, оценками переходов (переналадки) для каждого из приборов (временем переналадки, ценами, штрафами или расстояниями) между всеми заявками (пунктами). Маршруты переходов (последовательности обслуживания) не заданы и подлежат определению. Обслуживание заявок приборами монопольное. Прерывания обслуживания приборами одних заявок в пользу других запрещены, запрещены и

разрывы связности маршрутов. URPM-проблема определения множества оптимальных по быстродействию расписаний обслуживания всей системы включает: назначение каждому из приборов некоторого подмножества заявок, непересекающегося с подмножествами заявок других приборов; определение порядков обслуживания (маршрутов переходов) для каждого из приборов всего множества заявок. Поэтому, целесообразно рассматривать ее естественную декомпозицию на две подзадачи:

1. Кластеризация (наилучшее по быстродействию распределение заявок по m приборам). Фактически это задача о назначениях исходного множества приборов на множество заявок. Для каждой такой заявки и каждого прибора определены характеристики переходов от любых текущих к последующим заявкам (цена, время или расстояние). Маршруты переходов не фиксированы и подлежат определению. Пересечений приборов по маршрутам (и маршрутов по приборам) не допускается. Учитываются все прочие атрибуты заявленной URPM-проблемы, за исключением запрета на разрывы связности маршрутов.

2. Множество m ЗК (m подзадач коммивояжера). Быстродействие системы определяется наихудшей оценкой быстродействия из всех m ЗК.

Приведем формальную постановку подзадачи кластеризации.

Пусть: все приборы и заявки пронумерованы $k = \overline{1, m}$, k номер прибора, $i, j = \overline{1, n}$ номера заявок. Кроме этого для удобства обозначим через J множество заявок n , J^k подмножество заявок, назначаемых прибору k , а через n^k - число элементов каждого такого подмножества, $J = \bigcup_{k=1}^m J^k$,

$\bigcap_{k=1}^m J^k = \emptyset$. Также введем следующие обозначения. $s = \overline{1, S}$ индекс используемого ресурса (в задачах маршрутизации), $c_{i,j}^k$ оценка (цена, время или расстояние) перехода (переналадки, перемещения) прибора k от обслуживания заявки i к обслуживанию заявки j . Первый из нижних индексов всегда обозначает заявку-источник, второй - заявку-сток. Будем полагать, что оценка (цена или время) процесса обслуживания заявки j (в классической ЗК равная нулю) уже учтена в $c_{i,j}^k$. $x_{i,j}^k = 1$, если имеет место переход прибора k от обслуживания заявки i к j , и 0 - в противном случае ($i, j = \overline{1, n}, i \neq j$), R_s^k объем ресурса s , доступного прибору k . Например, в качестве ресурса может рассматриваться грузоподъемность автомобиля, тогда R_s^k величина грузоподъемности. $r_{j,s}^k$ затраты ресурса s прибором k при обслуживании заявки j .

Требуется найти наилучшие разбиения \tilde{J}^k , $k = \overline{1, m}$ и наилучшие назначения $\tilde{x}_{i,j}^k$, $i, j \in \tilde{J}^k$ в терминах представленного ниже критерия быстродействия при выполнении приводимых далее условий. Ограничения,

обеспечивающие непересечение приборов по заявкам (маршрутам) и заявок по приборам:

$$\sum_{k=1, m}^{k \neq l} \sum_{j=1}^n x_{i,j}^k + \sum_{j=1}^n x_{j,i}^l \leq 1, i = \overline{1, n}, l = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{j,i}^l + \sum_{k=1, m}^{k \neq l} \sum_{i=1}^n x_{i,j}^k \leq 1, j = \overline{1, n}, l = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Ниже следующие ограничения-равенства являются обычными условиями задачи о назначениях.

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n x_{i,j}^k = 1, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j}^k = 1, j = \overline{1, n}, i \neq j. \quad (4)$$

Дополняем задачу ограничениями на переменные (все переменные булевы): $x_{i,j}^k = 1$, если имеет место переход прибора k от обслуживания заявки i к j , и 0 - в противном случае ($i, j = \overline{1, n}, i \neq j$). И критерием быстродействия системы:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{i,j}^k x_{i,j}^k \leq \lambda, k = \overline{1, m}, \quad (5)$$

$$\lambda \rightarrow \min \quad (6)$$

В совокупности (5) и (6) реализуют минимаксный критерий, являющийся критерием быстродействия рассматриваемой параллельно-последовательной обслуживающей системы, или критерием равномерной нагрузки. Кроме этого задачи маршрутизации, являющиеся расширениями одного из вариантов рассматриваемой URPM-проблемы, обычно дополняются ресурсными ограничениями вида:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_{j,s}^k x_{i,j}^k \leq R_s^k, \quad \overline{1, m}, s = \overline{1, S}. \quad (7)$$

Оптимальные решения задач (1)-(6) и (1)-(7) $\widehat{J}^k, \widehat{x}_{i,j}^k, i, j \in \widehat{J}^k, k = \overline{1, m}$ определяют наилучшие из возможных нижние оценки $\lambda_{\min}(\widehat{x}_{i,j}^k)$ расписания всей URPM-проблемы. Для уточнения оценок и получения гарантированно связных маршрутов обслуживания заявок необходимо решить

m подзадач ЗК, для всех приборов k , $k = \overline{1, m}$. Любая такая подзадача представима в виде:

$$\sum_{i \in \widehat{J}^k} x_{i,j}^k = 1, j \in \widehat{J}^k, i \neq j, \quad (8)$$

$$\sum_{j \in \widehat{J}^k} x_{i,j}^k = 1, i \in \widehat{J}^k, i \neq j, \quad (9)$$

$$u_i^k - u_j^k + n^k x_{i,j}^k \leq n^k - 1, i, j = \overline{2, n^k}, i \neq j, \quad (10)$$

$$u_i^k \geq 0, i \in \widehat{J}^k, \quad (11)$$

$$\Lambda^k = \sum_{j \in \widehat{J}^k} \sum_{i \in \widehat{J}^k} c_{i,j}^k x_{i,j}^k \rightarrow \min. \quad (12)$$

(10) предполагает для удобства, что индексы всех подмножеств заявок \widehat{J}^k , $k = \overline{1, m}$ перенумерованы от 1 до n^k . Набор оптимальных решений m подзадач ЗК (8)-(12) $\tilde{x}_{i,j}^k, i, j \in \widehat{J}^k, k = \overline{1, m}$ с оценкой $\tilde{\Lambda} = \max \Lambda^k$ является приближенным решением рассматриваемой URPM-проблемы.

Процедуры поиска решений

Заметим, что обе представленные подзадачи принадлежат к одному классу NP-полных задач ДО. Постановка подзадачи кластеризации не позволяет использовать какие-либо специальные методы решения, основанные на релаксации. В данном случае применимы только общие методы решения задач псевдобулева программирования, например, соответствующие встроенные средства систем оптимизации IBM ILOG CPLEX Optimization studio, Gurobi, Xpress и др. На взгляд авторов, наибольшие перспективы имеет применение метода бинарных отсечений [3]. ЗК, наоборот, имеет существенное множество алгоритмов решения. Выделим только наилучшим образом зарекомендовавшие себя на практике алгоритмы, например Кристофида [1], Лина-Кернигана [2].

Тестирование свойств программной реализации

Программная реализация предложенного подхода на данном этапе опирается на средства IBM ILOG CPLEX Optimization studio и включает формирование файлов данных, решение и сохранение результатов расчетов. Сгенерировано около 100 примеров разных размерностей. В целом

полученные эмпирические оценки с учетом свойств тестовых задач можно признать вполне удовлетворительными. Проведенный анализ показал также целесообразность декомпозиции подзадачи кластеризации, что позволяет существенно снизить общее время счета без снижения оценки точности решения общей URPM-задачи.

Заключение

Анализ быстродействия программной реализации предложенного подхода, а также эмпирические оценки близости к оптимальным конструируемых расписаний, выявили его высокую эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Christofides N. “Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem”, *In Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity*. J. F. Traub, ed. Academic Press, Orlando, Fla., 441 (1976)
- [2] Lin S., Kernighan B. W. “An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem”, *Oper. Res.* . Vol. 21, No. 2, 498-516 (1973).
- [3] Мезенцев Ю.А. “Метод бинарных отсечений и ветвлений целочисленного программирования”, *Доклады академии наук высшей школы РФ*. Новосибирск: Изд-во НГТУ, No. 1(16), 12-25 (2011).

Estimates of Rate Convergence via Half-Derivatives

Михеев С.Е.

him2@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский пр. 35,
СПб, 198504, Россия

Оценки скорости сходимости с помощью полупроизводных

Прием, именуемый далее дифференцированием по итерации, можно использовать в исследовании скорости сходимости итеративных методов. Область его применения существенно расширяется на множество недифференцируемых функций введением понятия полу производной [1, 2]. Опишем вначале этот прием при наличии всех нужных производных.

Пусть поиск решения $\alpha \in U$ некоторой исходной задачи сведен к поиску решения уравнения $G(0, \alpha) = 0$ итерациями $\{x^k\} \subset U$, определяемыми рекуррентно из

$$G(x^{k+1} - x^k, x^k) = 0, \quad (1)$$

где $G : U \times U \rightarrow W$, U, W – B -пространства. Предполагается, естественно, что существует достаточно простой (сравнительно с исходной

задачей) алгоритм разрешения уравнения $G(x, y) = 0$ относительно первого аргумента. Такая схема, например, у метода Ньютона решения уравнения $g(x) = 0$, $g : U \rightarrow W$, состоящий в последовательном решении уравнений:

$$J(x^k)(x^{k+1} - x^k) + g(x^k) = 0, \quad J(x^k) := g'(x^k). \quad (2)$$

Соединим отрезком текущую итерацию x^k с решением α исходной задачи и параметризуем его:

$$x^k(t) := \alpha + \bar{d}t, \quad \bar{d} := x^k - \alpha, \quad t \in [0, 1].$$

После подстановки в (1) переменной $x^k(t)$ вместо постоянной x^k получится семейство уравнений с параметром t . Обозначим решение такого уравнения относительно x^{k+1} через $x(t)$ и введем $y := x(t) - \alpha$. Поскольку $G(0, \alpha) = 0$, справедливо $y(0) = 0$.

Если G имеет производные по первому и второму аргументам (G'_1, G'_2) , то тождество $G(y - \bar{d}t, x^k(t)) \equiv 0$ можно продифференцировать по t :

$$G'_1(y - \bar{d}t, x^k(t))(\dot{y} - \bar{d}) + G'_2(y - \bar{d}t, x^k(t))\bar{d} = 0. \quad (3)$$

Если $G'_1(y - \bar{d}t, x^k(t))$ не вырождена, (3) можно разрешить относительно \dot{y} :

$$\dot{y} = (I - (G'_1(y - \bar{d}t, x^k(t)))^{-1}G'_2(y - \bar{d}t, x^k(t)))\bar{d}.$$

Отсюда получаем дифференциальное неравенство

$$\|\dot{y}\| \leq \|I - (G'_1(y - \bar{d}t, x^k(t)))^{-1}G'_2(y - \bar{d}t, x^k(t))\| \|\bar{d}\|. \quad (4)$$

Если получить $f(\|y\|, t)$ — оценку сверху на его правую часть, то (4) совместно с очевидным $\|y\|'_t \leq \|\dot{y}\|$ и с $y(0) = 0$ даст систему

$$(\|y\|)'_t \leq f(\|y\|, t)\|\bar{d}\|, \quad \|y(0)\| = 0. \quad (5)$$

Если f непрерывна в некотором открытом множестве M , то максимальное решение задачи Коши

$$\dot{z} = f(z, t)\|\bar{d}\|, \quad z(0) = \|y(0)\| = 0,$$

мажорирует [3, 4] любое решение системы (5) относительно скалярной функции $\|y\|$ на общем интервале существования $[0, a]$.

Согласно построению $\|x_{k+1} - \alpha\| = \|y(1)\|$. Следовательно нужно получить оценку $\|y(1)\| \leq z(1)$.

В тех случаях, когда функция G всего лишь липшицева и не дифференцируема, существенное удобство в выкладках предоставляет несколько иной взгляд на понятие разностного отношения $h(t, \tau) := \frac{h(t + \tau) - h(t)}{\tau}$ функции $h(\eta)$ скалярного аргумента η из сегмента D . Обычно первый аргумент разностного отношения считается фиксированным, а в оценках, которые предстоит сделать, он будет переменным. В описании такой смысловой нагрузки на параметр удобно следующее.

Определение 1. Разностной производной в точке $t \in D$ заданной на сегменте $D \subset R^1$ вектор-функции $h : D \rightarrow U$ (U – B -пространство) будем называть зависящую от параметра t вектор-функцию $h^\nabla(t, \cdot)$, заданную в $\widehat{D}(t, D) := (D - t) \setminus \{0\}$ согласно формуле

$$h^\nabla(t, \varepsilon) = \frac{h(t + \varepsilon) - h(t)}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in \widehat{D}(t, D).$$

Величину ε будем называть отклонением (разностным), а операцию нахождения разностной производной – разностным дифференцированием.

Свойство 1. $(f \pm g)^\nabla = f^\nabla \pm g^\nabla$.

Свойство 2. $(\tau f)^\nabla = \tau f^\nabla$, τ – число.

Свойство 3. $(\exists f'(t) \implies f^\nabla(t, \varepsilon) = f'(t) + \omega(\varepsilon) \cong f'(t))$, где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon) = 0$.

Здесь и далее под знаками \cong и $\tilde{\leq}$ будут пониматься, соответственно, равенство и неравенство, приближенные с точностью до величин, стремящихся к $0 \in U$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть U, W – банаховы пространства (B -пространства), $M \subset U$ и имеется отображение $A : M \rightarrow W$.

Определение 2. [5, 6] Пусть x – не изолированная точка множества M и величина

$$L_A(x) := \overline{\lim_{\Delta \rightarrow 0}} \|A(x + \Delta) - A(x)\|_W / \|\Delta\|_U \quad (6)$$

конечна. Назовем тогда ее полупроизводной отображения A в точке x . Здесь предел берется по таким Δ , что $x + \Delta \in M$. Если M не имеет изолированных точек и полупроизводная $L_A(x)$ существует для всех $x \in M$, то формула (6) определяет на M функцию, которую будем именовать полупроизводной отображения A на множестве M .

Свойство 4. Пусть g имеет полупроизводную в t . Тогда справедливы

$$\begin{aligned} g(t + \varepsilon) &\equiv g^\nabla(t, \varepsilon) \varepsilon + g(t) \cong g(t), \\ (fg)^\nabla(t) &\cong f^\nabla(t)g(t) + f(t)g^\nabla(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть имеются вектор-функции $g : D \rightarrow U$, $h : D \rightarrow V$, которые определяют множество $D_f := \{(x, y) \mid (\exists t \in D) x = g(t) \wedge y = h(t)\}$. Пусть верно следующее:

- 1) g и h имеют полу производные L_g и L_h в точке $t \in D$;
- 2) в точке $z := (g(t), h(t))$ отображение $f(g, h)$ имеет полу производные по первому и второму аргументам: L_{fg} и L_{fh} .

Тогда $\|(f(g, h))_t^\nabla(t, \varepsilon)\| \lesssim L_{fg}L_g + L_{fh}L_h$.

Продемонстрируем применение полу производной и дифференцирования по итерации в оценивании скорости сходимости метода Ньютона (2). Не меняя сущности самого приема, проведем параметризацию немного иначе [7]. Положим $d = \|x^k - \alpha\|$, $\mathbf{d} = (x^k - \alpha)/d$, $x^k(t) = \alpha + \mathbf{d}t$. Теперь $(x^k)^\nabla(t) = \mathbf{d}$. После подстановок и замен в (2), получаем тождество

$$J(x^k(t)) [x(t) - x^k(t)] + g(x^k(t)) = 0. \quad (8)$$

Его решение относительно $x(t)$ при $t = d$ есть x^{k+1} , при $t = 0$ есть α . Дифференцируя разностно (8) по t и заменяя g^∇ на J , с точностью до погрешностей, возникших из-за этой замены и бесконечно малых относительно разностного отклонения, согласно (7), получаем:

$$(J)_t^\nabla(x - x^k) + J(x^\nabla - \mathbf{d}) + J\mathbf{d} \cong 0.$$

(Здесь опущены аргумент t у x^k и аргумент $x^k(t)$ у матриц J , J_t^∇). После преобразования получим $x^\nabla \cong J^{-1}J_t^\nabla(x^k - x)$. Оценивая сверху полу производной $L_J(x^k(t))$ норму разностной производной от J и затем произведение $\|J^{-1}(x^k(t))\|L_J(x^k(t))$ величиной σ , имеем

$$\|x^\nabla\| \lesssim \|J^{-1}\| L_J(x^k(t)) \|x^k - x\| \leq \sigma \|x^k - x\|.$$

Произведем подстановку $x = \alpha + y$. Тогда

$$\|y^\nabla\| \lesssim \sigma(t + \|y\|), \quad y(0) = 0.$$

Так как $\|y\|^\nabla \leq \|y^\nabla\|$, то согласно [3, 4], мажорирующую норму любого решения этой системы задача Коши имеет следующий вид:

$$\dot{z} = (t + z)\sigma, \quad z(0) = 0.$$

Решив ее, придем к оценке

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - \alpha\| &= \|y(d)\| \leq z(d) = \frac{e^{\sigma t} - \sigma t - 1}{\sigma} \Big|_{t=d} = \\ &= d \frac{e^{\sigma d} - \sigma d - 1}{\sigma d} = C(d) \|x^k - \alpha\|, \end{aligned}$$

где $C(d) = \sigma d/2! + (\sigma d)^2/3! \dots$ — монотонно возрастающая по d функция.

Аналогичным образом можно применять дифференцирование по итерации и в оптимизационных процессах [8].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Михеев С.Е. “Сходимость метода Ньютона на различных классах функций” *Вычислительные технологии*, 10, №3, 72-86 (2005).
- [2] Михеев С.Е., Позняк Л.Т. “Улучшение оценок в одной теореме Мысовских о методе Ньютона”, *Труды международной конференции “Устойчивость и процессы управления”*, 2, 876–885 (2005).
- [3] Михеев С.Е. “Существование и оценка решения нелинейного уравнения в банаховом пространстве”, *Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10, 3*, 13–27 (2005).
- [4] Михеев С.Е., Позняк Л.Т. “Одна новая теорема существования решения нелинейного уравнения в банаховых пространствах”, *Вестник С.-Петербург. ун-та*, Сер. 10, 3, 35–43 (2006).
- [5] Михеев С.Е. “Применение полу производной в численном анализе”, *Журнал вычислительной математики и математической физики* №1, 3-17 (2008).
- [6] Miheev, Serge E. “Application of half-derivatives in numerical analysis”, *Computational mathematics and mathematical physics*, 48, No. 1, 1-15 (2008)
- [7] Михеев С.Е. “Об одном парадоксе в теоремах о методе Ньютона” *Вестник С.-Петербург. ун-та* Сер. 10, 1, 22-36 (2013).
- [8] Bondarenko L.A., Zubov A.V., Orlov V.B., V.A. Petrova, N.S. Ugegov “Application in practice and optimization of industrial information systems”, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, Vol. 85, No. 3, 305-308 (2016).

Statistical Evaluation of the Exact Relaxation Method

Михеев С.Е.

him2@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский пр. 35,
СПб, 198504, Россия

Статистические оценки метода точной релаксации

Большая доля одноточечных итеративных методов поиска решения системы уравнений $F(x) = 0$, $F : \Omega \subset \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, или точки минимума функции $f : \Omega \subset \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ снабжается оценкой скорости сходимости вида

$$\|A(x^k) - \alpha\| \leq c\|x^k - \alpha\|, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

где $x^k, \alpha \in \mathbb{B}$, \mathbb{B} – в общем случае банахово пространство, алгоритм A – отображение $\Omega \subset \mathbb{B}$ в \mathbb{B} , $c < 1$, α – решение исходной задачи, т.е. либо $F(\alpha) = 0$, либо $\alpha = \arg \min_{x \in \Omega} f(x)$.

Если порождать последовательность приближений рекуррентно: $x^{k+1} = A(x^k)$, то оценка скорости сходимости (1) доставляет оценку d_i текущей погрешности в зависимости только от оценки погрешности начального приближения d_0 , номера итерации и константы c : $\|x^i - \alpha\| \leq d_i := c^i d_0$. Далее критерием остановки итеративного процесса обычно назначается условие $d_i < \varepsilon$, для некоторого заданного $\varepsilon > 0$. Оказывается, вместо добычи правила остановки знание (1) с помощью *принципа минимальности* позволяет распорядится трудом алгоритма A с большей выгодой, чем порождение итераций по формуле $x^{k+1} = A(x^k)$. А именно, каждую последующую итерацию выбирать такой, чтобы она минимизировала оценку погрешности для нее, т.е.

$$S(x, A) := \{\alpha | \|A(x^k) - \alpha\| \leq c\|x^k - \alpha\|\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{I}_k := S_{x^k}^{d_k} \cap S(x, A), \quad d(x, x^k, A) := \max_{y \in \mathcal{I}_k} \|y - x\|, \quad (3)$$

$$x^{k+1} := \arg \min d(x, x^k, A), \quad d_{k+1} := d(x^{k+1}, x^k, A). \quad (4)$$

Если банахово пространство есть гильбертово естественной нормой $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, или же конечномерное с нормой $\|\cdot\|_2$, то множество $S(x, A)$, именуемое зоной Аполлония есть шар и \mathcal{I}_k есть пересечение шаров – мениск. Тогда принцип минимальности предлагает найти минимальный шар, содержащий мениск \mathcal{I}_k , точнее центр x^{k+1} и радиус d_{k+1} этого шара. Преобразование пары x^k, d_k в пару x^{k+1}, d_{k+1} согласно (2), (3) и (4) именуется *точной релаксацией* (TP) [1].

Обозначим для краткости текущие итерацию и оценку погрешности через x и d , а на следующей итерации через x^* и d_* , соответственно. Расчетные формулы TP для x^* и d_* несложны как в скалярном, так и в многомерном случаях.

В скалярном. Вначале работает базовый алгоритм: вычисляются $\mathbf{r} := A(x) - x$, $r := |\mathbf{r}|$, затем

$$x^* = \begin{cases} x + \text{sign } \mathbf{r} \left(d + \frac{r}{1+c} \right) / 2 & \wedge \quad d \leq \frac{r}{1-c}, \\ x + \frac{\mathbf{r}}{1-c^2} & \wedge \quad d > \frac{r}{1-c}, \end{cases} \quad (5)$$

$$d_* = \begin{cases} \left(d - \frac{r}{1+c} \right) / 2 & \wedge \quad d \leq \frac{r}{1-c}, \\ \frac{rc}{1-c^2} & \wedge \quad d > \frac{r}{1-c}. \end{cases} \quad (6)$$

В многомерном. $\mathbf{r} := A(x) - x$, $r := \|\mathbf{r}\|$, $\hat{r} = d(1 - c^2)/\sqrt{1 + c^2}$,
затем

$$x^* := \begin{cases} x + \mathbf{r}(1/2 + d^2(1 - c^2)/2r^2) & \wedge \hat{r} < r, \\ x + \frac{\mathbf{r}}{1 - c^2} & \wedge \hat{r} \geq r, \end{cases} \quad (7)$$

$$d_* := \begin{cases} \sqrt{d^2 - (r + d^2(1 - c^2)/r)^2/4} & \wedge \hat{r} < r, \\ \frac{cr}{1 - c^2} & \wedge \hat{r} \geq r \end{cases} . \quad (8)$$

Вычислительные расходы на ТР в обоих случаях легко оцениваются. Однако непосредственное сравнение итераций согласно приведенным расчетным формулам с итерациями $x^* = A(x)$ не дает понимания что вычислительно "дешевле" в конечном итоге: немного потратится на ТР и получить лучшую сходимость и, тем самым сократить общее количество итераций, или же обойтись без такого усложнения, сделать больше итераций, но каждую "дешевле"?

Оценки d_* погрешности последующей итерации метода точной релаксации в (8), (6) существенно отличны от оценок $c^k d_0$ в методе простой итерации своей априори непредсказуемостью. Поэтому сравнение этих оценок по худшему варианту представляется неполноценным. Ближе к реальным вычислительным процессам оценка эффективности по математическому ожиданию при той или иной гипотезе о вероятностном распределении результата работы базового алгоритма.

Сравнение качества итеративных алгоритмов с присутствие случайностей в их работе произведем с помощью обобщающей схемы .

Пусть $X := (x, d)$, где $x \in \mathbb{B}$, $d \in \mathbb{R}$. Пусть для поиска приближенных решений однотипных задач имеется одноточечный итеративный метод, порождающий из начальной точки $x^0 \in B$ и начальной оценки d_0 с помощью алгоритма вида $\mathcal{G}(X, v(X))$ сходящуюся к α — решению исходной задачи — последовательность итеративных точек $\{x^k\}_1^\infty \subset B$ по рекуррентной формуле

$$X^{k+1} = \mathcal{G}(X^k, v(X^k)), \quad k = 1, 2, \dots . \quad (9)$$

Здесь v — вектор наблюдения, вообще говоря, случайная величина с параметрами X . Будем называть такой базовый алгоритм *обобщающей схемой*.

Выбор начальных значений x^0 и d_0 лежит вне рамок метода.

Обозначим с помощью индекса x x -составляющую обобщающей схемы, d -составляющую — с помощью индекса d . Тогда $\mathcal{G}_d(X, v(X)) \geq \|\mathcal{G}_x(X, v(X)) - \alpha\|$.

В обобщающих схемах обоих сравниваемых методов наблюдение одинаково: $v(X) = (v_1(X), v_2(X)) = (A(x), d)$. Если \mathcal{G} — схема метода с чистым базовым алгоритмом без ТР, то $\mathcal{G}_x(X, v(X)) := A(x)$ и $\mathcal{G}_d(X, v(X)) := cd$. Если \mathcal{L} — схема метода с ТР и с тем же базовым алгоритмом, то $\mathcal{L}_x(X, v(X)) := x^*$ и $\mathcal{L}_d(X, v(X)) := d_*$, где x^*, d_* вычисляются согласно приведенным расчетным формулам.

Пусть \mathcal{G} и \mathcal{L} две обобщающие схемы для решения одной задачи. При отсутствии случайностей их качество количественно можно было бы сравнивать так.

Определение 1. В детерминированном случае схема \mathcal{L} в K раз лучше схемы \mathcal{G} , если

$$(\forall X) \quad K\mathcal{L}_d(X, v(X)) \leq \mathcal{G}_d(X, v(X)) \quad (10)$$

и для больших K высказывание (10) неверно.

Расширим такую трактовку качества на схемы со случайностями.

Определение 2.

$$K = \inf_X \frac{\mathbb{E}\mathcal{G}_d(X, v(X))}{\mathbb{E}\mathcal{L}_d(X, v(X))}, \quad (11)$$

где \mathbb{E} — символ математического ожидания. Величину $e = 1/K$ назовем коэффициентом эффективности (схемы \mathcal{L} относительно схемы \mathcal{G}).

Легко заметить, что определение 1 есть частный случай определения 2.

Сравним с этих позиций базовый алгоритм совместно с оценкой (1) и его точную релаксацию. До тех пор, пока базовый алгоритм не отработал, величина $z = A(x)$ может трактоваться случайной. Согласно имеющейся информации (текущее состояние X и условие (1)) она должна быть распределена в шаре S_x^ρ , $\rho = d + cd$. Из разнообразия гипотез о распределении случайной величины z исследуем две, как достаточно разумные.

Гипотеза I: z равномерно распределена в шаре S_x^ρ .

Эта гипотеза является своего рода минорантой нашего знания о случайной величине z , а минорантой нашего знания об отклонении вектора наблюдения от текущего приближения x является

Гипотеза II: Случайная величина (с. в.) $r = \|z - x\|$ равномерно распределена на отрезке $[0, \rho]$.

Отметим, что в одномерном случае гипотезы I и II совпадают.

Теорема 1. В одномерном случае для гипотез I и II эффективность точной релаксации относительно метода простой итерации с одним базовым алгоритмом есть

$$e = \frac{d_*}{cd} = \frac{1}{2 + 2c}. \quad (12)$$

Согласно определению 2 и последней теореме точная релаксация улучшает базовый алгоритм в $(2+2c)$ раз. При сравнении по худшему варианту получается улучшение лишь в $(1+c)$ раз. Следует отметить, что ТР обеспечивает сходимость в скалярном случае и при $c \in [1, 2)$, т.е. когда простые итерации с базовым алгоритмом могут не сходиться. [2], [3].

В многомерном случае точная релаксация может выдавать то же значение, что и базовый алгоритм A. Нетрудно проверить, что это происходит, когда r максимизирует d в (8): $r = \check{r} = d\sqrt{1 - c^2}$. То есть, когда $\|A(x) - x\| = \check{r}$, можно говорить, что у точной релаксации *холостой ход* и дополнительные вычисления, потраченные на нее, были напрасны. При гипотезе I вероятность попадания z на сферу холостого хода $C_x^{\check{r}}$ есть отношение «объема сферы» $C_x^{\check{r}}$ к объему шара S_x^ρ . В идеальном случае оно равно нулю. При машинном представлении множеств возможны хотя и малые, но не нулевые значения этого отношения. Они будут сильно зависеть от плотности разрядной сетки, расположения начала координат и от трактовки включения $z \in C_x^{\check{r}}$. С другой стороны, близость точки z к сфере холостого хода соответствует малому выигрышу от применения модификации, что может вызвать некоторые сомнения по поводу ее эффективности. Снимем их количественными оценками.

Теорема 2. Пусть имеется метод простой итерации с оценкой (1). Положим

$$a_-(t) := \sqrt{1 + c^2 - 2t^2 - \sqrt{(1 + c^2 - 2t^2)^2 - (1 - c^2)^2}}, \quad (13)$$

$$a_+(t) := \sqrt{1 + c^2 - 2t^2 + \sqrt{(1 + c^2 - 2t^2)^2 - (1 - c^2)^2}}. \quad (14)$$

Тогда в евклидовом пространстве E^n ($n \geq 2$) для гипотезы I эффективность основанной на (1) точной релаксации базового алгоритма относительно метода простой итерации с тем же базовым алгоритмом есть

$$e = \frac{-(1 - c)^n}{(n + 1)(\sqrt{1 + c^2})^{n+1}} - \frac{1}{c(1 + c)^n} \left(\int_{c/\sqrt{1+c^2}}^c a_-^n(t) dt - \int_0^c a_+^n(t) dt \right), \quad (15)$$

а для гипотезы II, независимо от размерности пространства, такая эффективность доставляется формулой (15) при $n = 1$.

Полученные оценки эффективности точной релаксации хорошо согласуются с практическими результатами [4].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Михеев С.Е. “Метод точных релаксаций” *Вычислительные технологии*, 11, No. 6, 71-86 (2006).
- [2] Miheev, Serge E. “Exact relaxation of multi point iterative methods in scalar case”, Emission Electronics (ICEE), 2014 2nd International Conference on DOI: 10.1109/Emission.2014.6893970
- [3] Михеев С.Е. “Глобализация некоторых итеративных методов решения скалярных уравнений”, *Вестник С.-Петербург. ун-та* Сер.10, No.1, 43–52 (2008).
- [4] Bondarenko L.A., Zubov A.V., Orlov V.B., V.A. Petrova, N.S. Ugegov “Application in practice and optimization of industrial information systems”, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, Vol. 85, No. 3, 305-308 (2016).

To the Solution of One Class of Systems of the Polynomial Equations of Volterra First Kind by Newton Method

Солодуша С.В.

solodusha@isem.irk.ru

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск 664033,
Россия

К решению одного класса систем полиномиальных уравнений Вольтерра I рода методом Ньютона

Один из известных подходов к математическому моделированию нелинейных динамических систем (объектов) типа „вход–выход“ основан на применении аппарата интегростепенных рядов Вольтерра.

В данной работе рассматривается численный способ решения одного класса систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра, связанных с задачей автоматического управления динамическим объектом с векторными входом и выходом.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений Вольтерра I рода

$$y_p(t) = \sum_{m=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq 2} \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1, \dots, i_m}^{(p)}(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{j=1}^m x_{i_j}(s_j) ds_j, \quad (1)$$

$$p = 1, 2, t \in [0, T],$$

которая описывает нелинейный динамический объект для входа $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ и выхода $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$. В (1) ядра Вольтерра $K_{i_1, \dots, i_m}^{(p)}$ симметричны по переменным, соответствующим совпадающим индексам i_1, \dots, i_m . В математическом плане задача поиска управляемого параметра применительно к (1), где известны $y_p(t)$ и $K_{i_1, \dots, i_m}^{(p)}$, заключается в решении системы полиномиальных уравнений Вольтерра I рода N -ой степени относительно $x(t)$. Для понимания её специфики рассмотрим случай постоянных ядер:

$$\sum_{m=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq 2} K_{i_1, \dots, i_m}^{(p)} \prod_{j=1}^m \left(\int_0^t x_{i_j}(s_j) ds_j \right) = y_p(t), \quad (2)$$

$$p = 1, 2, t \in [0, T].$$

Как известно, линейная система (1) ($N = 1$) имеет непрерывное решение при любом $T < \infty$ при условиях: $K_i \in C_\Delta$, $i = 1, 2$, $\Delta = \{t, s/0 \leq s \leq t \leq T\}$, определитель блочной матрицы $(\mathcal{K}_1 \ \mathcal{K}_2)$, не нулевой ($\mathcal{K}_i = (K_i^{(1)}, K_i^{(2)})^T$), $y_p(0) = 0$, $y'_p(t) \in C_{[0, T]}$.

Принципиальное отличие (1) при $N > 1$ от линейного случая состоит в локальности T^* — области существования (единственного) непрерывного решения [1]. В статье [2] получены аналитическое решение (2) при $N = 2$ и его численная аппроксимация квадратурными методами (правых и средних прямоугольников) путем сведения системы к уравнению четвертого порядка. Цель данной работы состоит в получении приближенного решения (2) при $N = 2$ на отрезке $[0, T]$, $T < T^*$, с помощью метода Ньютона-Канторовича [3].

2. Численный метод. Специфика (2) позволяет заменой

$$\theta_1(t) = \int_0^t x_1(s) ds, \quad \theta_2(t) = \int_0^t x_2(s) ds$$

свести исходную задачу к поиску непрерывного решения $\Theta^*(t) = (\theta_1^*(t), \theta_2^*(t))^T$ системы полиномиальных уравнений

$$f_p(\theta_1(t), \theta_2(t)) = y_p(t), \quad p = 1, 2,$$

где

$$f_p(\theta_1(t), \theta_2(t)) = \sum_{i=1}^2 K_i^{(p)} \theta_i(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^i K_{ji}^{(p)} \theta_i(t) \theta_j(t).$$

Рассмотрим

$$\Phi(\Theta) = (\Phi_1(\Theta), \Phi_2(\Theta)) = 0, \quad \Theta = (\theta_1(t), \theta_2(t))^T, \quad (3)$$

где

$$\Phi_p(\theta_1, \theta_2) \equiv f_p(\theta_1(t), \theta_2(t)) - y_p(t).$$

Систему (3) будем решать методом Ньютона–Канторовича, для этого запишем итерационный процесс

$$\Phi'(\Theta_{m-1})(\Theta_m - \Theta_{m-1}) + \Phi(\Theta_{m-1}) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Зададим начальное приближение $\Theta_0 = (\theta_{10}(t), \theta_{20}(t))^T$ следующим образом

$$\theta_{10}(t) = \frac{|y(t) \mathcal{K}_2|}{|\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2|}, \quad \theta_{20}(t) = \frac{|\mathcal{K}_1 y(t)|}{|\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2|}.$$

Производная $\Phi'(\Theta_{m-1})$ нелинейного оператора $\Phi(\Theta)$ в точке Θ_{m-1} определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} \partial\Phi_1/\partial\theta_1|_{(\theta_{1m-1}, \theta_{2m-1})} & \partial\Phi_1/\partial\theta_2|_{(\theta_{1m-1}, \theta_{2m-1})} \\ \partial\Phi_2/\partial\theta_1|_{(\theta_{1m-1}, \theta_{2m-1})} & \partial\Phi_2/\partial\theta_2|_{(\theta_{1m-1}, \theta_{2m-1})} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & (K_1^{(p)} + 2K_{11}^{(p)}\theta_{1m-1} + K_{12}^{(p)}\theta_{2m-1})\Delta\theta_1(t) + \\ & + (K_2^{(p)} + 2K_{22}^{(p)}\theta_{2m-1} + K_{12}^{(p)}\theta_{1m-1})\Delta\theta_2(t) = -\Phi_p(\Theta_{m-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Delta\theta_1(t) = \theta_{1m}(t) - \theta_{1m-1}(t)$, $\Delta\theta_2(t) = \theta_{2m}(t) - \theta_{2m-1}(t)$.

Таким образом, последовательность приближенных решений $\Theta_m = (\theta_{1m}(t), \theta_{2m}(t))^T$ находится из решения системы двух линейных уравнений вида (4).

3. Вычислительный эксперимент. Для иллюстрации полученных формул приведем следующий

Пример. Пусть $K_1^{(1)} = K_2^{(1)} = K_1^{(2)} = 1$, $K_{11}^{(1)} = K_{12}^{(1)} = -1$, $K_{22}^{(1)} = \frac{1}{4}$, $K_2^{(2)} = 2$, $K_{22}^{(2)} = -\frac{1}{2}$, $K_{11}^{(2)} = K_{12}^{(2)} = \frac{1}{2}$. Зададим $y_1(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{6} + \frac{t^6}{36}$, $y_2(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^5}{12} - \frac{t^6}{18}$, $T = 0,63$.

Результаты расчетов приведены в табл. 1, где m — число итераций, $\varepsilon_{p, t_k} = \max_{0 \leq t \leq t_k} |\theta_{p_m}(t) - \theta_p^*(t)|$ ($t_1 = 0,58$; $t_2 = 0,6$), начальные приближения: $\theta_{10}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{5t^4}{8} - \frac{5t^5}{12} + \frac{t^6}{9}$, $\theta_{20}(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^4}{8} + \frac{t^5}{4} - \frac{t^6}{12}$.

Вычислительный эксперимент показал, что итерационный алгоритм с выбранными начальными приближениями сходится к точному значению $\Theta^* = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)^T$.

Таблица 1.

m	$\theta_{1_m}(t_1)$	ε_{1,t_1}	$\theta_{2_m}(t_1)$	ε_{2,t_1}	$\theta_{1_m}(t_2)$	ε_{1,t_2}	$\theta_{2_m}(t_2)$	ε_{2,t_2}
1	0,14823	0,01997	0,07699	0,01195	0,14807	0,03193	0,09133	0,01933
2	0,16688	0,00132	0,06582	0,00079	0,17563	0,00437	0,07464	0,00264
3	0,16819	$6 \cdot 10^{-6}$	0,06504	$4 \cdot 10^{-6}$	0,17989	0,00011	0,07207	0,00007
4	0,16820	$2 \cdot 10^{-10}$	0,06504	$1 \cdot 10^{-10}$	0,18000	$7 \cdot 10^{-8}$	0,07200	$4 \cdot 10^{-8}$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-01425.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Апарчин А.С., Полиномиальные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы, *Известия Иркутского гос. университета. Математика*, Т. 1, №. 1, 13-41 (2007).
- [2] Солодуша С.В., Об одном классе систем билинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода второго порядка, *Автоматика и телемеханика*, №. 4, 110-118 (2009).
- [3] Канторович Л.В., Акилов Г.П., *Функциональный анализ в нормированных пространствах*, М.: Физматлит, (1959).

Shor's r -Algorithms for Separable Quadratic Programming Problems

Стецюк П.И.

stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики НАН Украины, проспект Глушкова, 40, г. Киев, 03187,
Украина

r -Алгоритмы Шора для сепарабельной задачи квадратичного программирования

r -Алгоритмы Шора [1]. Рассматривается задача минимизации выпуклой функции $f(x)$, где $x \in E^n$ – вектор из n переменных. Минимальное значение функции будем обозначать $f^* = f(x^*)$, $x^* \in X^*$. Будем предполагать, что $f(x)$ имеет ограниченное множество минимумов X^* , т.е. выполняется условие $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Это условие обеспечивает корректность регулировки шага в r -алгоритмах. Обозначим $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ – коэффициенты растяжения пространства, такие что $\alpha_k > 1$.

r -Алгоритмом называется итеративная процедура нахождения последовательности n -мерных векторов $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и последовательности $n \times n$ -матриц $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \quad B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где

$$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad h_k \geq h_k^* = \arg \min_{h \geq 0} f(x_k - h B_k \xi_k), \quad (2)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\alpha_k} < 1, \quad \eta_k = \frac{B_k^T r_k}{\|B_k^T r_k\|}, \quad \text{где } r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k). \quad (3)$$

Здесь x_0 – стартовая точка; $B_0 = I_n$ – единичная $n \times n$ -матрица¹; h_k^* – величина шага из условия минимума функции $f(x)$ в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных; $R_\beta(\eta) = I_n + (\beta - 1)\eta\eta^T$ – оператор сжатия пространства субградиентов в нормированном направлении η с коэффициентом $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$; $g_f(x_k)$ и $g_f(x_{k+1})$ – субградиенты функции $f(x)$ в точках x_k и x_{k+1} . Если на итерации k для процесса (1)–(3) выполнены некоторые критерии (условия) останова, то полагаем $k^* = k$, $x_k^* = x_k$ и заканчиваем работу алгоритма.

На каждой итерации r -алгоритмов реализуется субградиентный спуск для выпуклой функции $\varphi(y) = f(B_k y)$ в преобразованном пространстве переменных $y = A_k x$, где $A_k = B_k^{-1}$. На самом деле, если обе части формулы $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$ умножить слева на матрицу A_k , то получим

$$y_{k+1} = A_k x_{k+1} = A_k x_k - h_k \xi_k = y_k - h_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|} = y_k - h_k \frac{g_\varphi(y_k)}{\|g_\varphi(y_k)\|}, \quad (4)$$

где вектор $g_\varphi(y_k) = B_k^T g_f(x_k)$ является субградиентом функции $\varphi(y) = f(B_k y)$ в точке $y_k = A_k x_k$ пространства переменных $y = A_k x$. Это легко видеть из того, что субградиент функции $f(x)$ в точке x_k удовлетворяет неравенству

$$f(x) \geq f(x_k) + (g_f(x_k))^T (x - x_k) \quad \forall x \in E^n,$$

откуда, осуществляя замену переменных $x = B_k y$, получаем

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_k) + (B_k^T g_f(x_k))^T (y - y_k) = \varphi(y_k) + (g_\varphi(y_k))^T (y - y_k) \quad \forall y \in E^n.$$

$r(\alpha)$ -Алгоритм с адаптивным шагом. Одним из эффективных является $r(\alpha)$ -алгоритм с адаптивной регулировкой шага, где α – постоянный коэффициент растяжения пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов, а величина шага h_k настраивается в процессе выполнения одномерного спуска в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных. Настройка шага осуществляется с помощью четырех параметров:

¹В качестве матрицы B_0 часто выбирают диагональную матрицу D_n с положительными коэффициентами по диагонали, с помощью которой осуществляется масштабирование переменных.

$h_0 > 0$ – величина начального шага (используется на 1-й итерации, на каждой последующей итерации эта величина уточняется); q_1 – коэффициент уменьшения шага ($q_1 \leq 1$), если условие завершения спуска по направлению выполняется за один шаг; q_2 – коэффициент увеличения шага ($q_2 \geq 1$); через каждые n_h шагов одномерного спуска ($h_h > 1$) шаг будет увеличиваться в q_2 раз. Условие завершения спуска по направлению выполняется, как только обнаружена точка x_{k+1} , для которой выполняется условие $(x_{k+1} - x_k)^T g_f(x_{k+1}) \geq 0$. Поскольку предполагается, что $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, то после конечного числа шагов аддитивного спуска в направлении нормированного антисубградиента обязательно выполнится условие завершения спуска по направлению.

Итеративный процесс в $r(\alpha)$ -алгоритме с аддитивной регулировкой шага продолжается до выполнения некоторого критерия останова, где ключевую роль играют параметры ε_x и ε_g . Алгоритм останавливается в точке x_{k+1} , если выполнено $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon_x$ (останов по аргументу) или выполнено условие $\|g_f(x_{k+1})\| \leq \varepsilon_g$ (останов по норме субградиента, используется для гладких функций). Кроме них используются еще два условия останова: стандартный останов, если превышено максимальное количество итераций, и аварийный останов, который сигнализирует о том, что либо функция $f(x)$ неограничена снизу, либо начальный шаг h_0 слишком мал и его требуется увеличить.

Если $r(\alpha)$ -алгоритм с аддитивной регулировкой шага применять для минимизации негладких функций, то рекомендуется следующий выбор параметров: $\alpha = 2 \div 4$, $h_0 = 1.0$, $q_1 = 1.0$, $q_2 = 1.1 \div 1.2$, $n_h = 2 \div 3$. Если известна априорная оценка расстояния от начальной точки x_0 до точки минимума x^* , то начальный шаг h_0 целесообразно выбирать порядка $\|x_0 - x^*\|$. При минимизации гладких функций рекомендуемые параметры такие же, за исключением q_1 ($q_1 = 0.8 \div 0.95$). Это обусловлено тем, что дополнительное измельчение шага способствует увеличению точности поиска минимума функции по направлению, что при минимизации гладких функций обеспечивает более быструю скорость сходимости. При таком выборе параметров, как правило, количество шагов по направлению не превышает в среднем двух-трех на одну итерацию, а за n итераций точность по функции улучшается в три-пять раз. Параметры останова $\varepsilon_x, \varepsilon_g \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$ при минимизации выпуклой функции, даже существенно овражной структуры, обеспечивают нахождение точки x_k^* – приближения к точке $x^* \in X^*$, для которого значение функции, достаточно близко к оптимальному ($\frac{f(x_k^*) - f^*}{|f^*| + 1} \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$ – для негладких и $\sim 10^{-12} \div 10^{-10}$ – для гладких функций). Это подтверждают результаты многочисленных вычислительных экспериментов.

Сепарабельная задача квадратичного программирования. В докладе рассмотрим применение $r(\alpha)$ -алгоритма с адаптивным шагом для решения задачи квадратичного программирования

$$\begin{aligned} f^* = \min_{x \in E^n} \sum_{i=1}^n (c_i x_i^2 + d_i x_i + e_i) \\ b^{low} \leq Ax \leq b^{up}, \quad x^{low} \leq x \leq x^{up}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $c_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $A - m \times n$ -матрица, b^{low} и b^{up} , x^{low} и x^{up} – конечнозначные нижние (*low*) и верхние (*up*) граници на строки-ограничения и переменные, соответственно.

Для решения задачи (5) рассматривается два алгоритма: (1) прямой алгоритм решает задачу (5), сводя ее к минимизации негладкой штрафной функции от n переменных; (2) двойственный алгоритм использует эквивалентную задачу квадратичного программирования

$$\begin{aligned} f^* = \min_{x \in E^n} \sum_{i=1}^n (c_i x_i^2 + d_i x_i + e_i) \\ Ax = y, \quad x^{low} \leq x \leq x^{up}, \quad b^{low} \leq y \leq b^{up}, \end{aligned}$$

и решает частично двойственную задачу, которая построена для ограничений $Ax = y$ и состоит в максимизации вогнутой функции от m переменных. Программные реализации обоих алгоритмов используют octave-программу **ralgb5** [2], с. 383–386.

Прямой алгоритм ориентирован на решение задач (5), которые содержат немного переменных ($n \sim 500$) и много линейных ограничений. Он может быть использован для полиэдральных ограничений с очень большим количеством неравенств. Двойственный алгоритм ориентирован на решение задач (5), которые содержит немного линейных ограничений ($m \sim 500$) и много переменных.

Работа выполнена при поддержке НАНУ, проект №0116U004558.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шор Н.З., *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения*, Киев: Наукова думка, (1979).
- [2] Стецюк П.И., *Методы эллипсоидов и r-алгоритмы*, Кишинэу: Эврика, (2014).

**One Modification of the Method of Hypodifferential
Descent in the Problem for Finding a Point of an Ellipsoid
Nearest to the Origin**

Тамасян Г.Ш., Чумаков А.А., Просолупов Е.В.

g.tamasyan@spbu.ru, andrew1991.spb@gmail.com,
e.prosolupov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет

**Об одной модификации метода
гиподифференциального спуска в задаче
проектирования начала координат на эллипсоид**

В работе рассматривается задача нахождения точки эллипсоида ближайшей к началу координат [1, 2, 3, 4]. Данная проблема условной оптимизации сводится к безусловной с помощью теории точных штрафных функций [5]. Построенная точная штрафная функция принадлежит к классу гиподифференцируемых функций [6]. Для ее исследования на экстремум применяется хорошо известный и эффективный метод гиподифференциального спуска [6]. Предлагается модификация этого метода. Эта модификация обладает рядом преимуществ. В частности, упростились поиски направления и величины шага спуска. Полученные результаты численных экспериментов демонстрируют более высокую скорость сходимости модифицированного метода гиподифференциального спуска.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тамасян Г. Ш., Чумаков А. А. *Нахождение расстояния между эллипсоидами* // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21. № 3. С. 87–102.
- [2] Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш. *Методы нахождения ближайшей к началу координат точки эллипсоида* // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 73–78.
- [3] Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш. *Методы нахождения наименьшего расстояния между эллипсоидами* // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 94–99.
- [4] Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш. *Поиск наименьшего расстояния между эллипсоидами методом сопряженных гипоградиентов* // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. С. 62–64.
- [5] Демьянов В. Ф. *Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации* // Вестник С.-Петербург. унив. Сер 1. 1994. Вып. 4. № 22. С. 21–27.

- [6] Демьянов В.Ф. Рубинов А.М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*. М.: Наука, 1990. 432 с.
- [7] Тамасян Г. Ш., Просолупов Е. В., Ангелов Т. А. *Сравнительный анализ двух быстрых алгоритмов проецирования точки на стандартный симплекс* // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. Т. 23. № 2. С. 100–123.

Section 5

Applications of Nonsmooth Analysis

Ambulance Resources Reallocation in St. Petersburg Using Imitation Modelling Approach

Balykina Yu., Lezhnina E., Shavidze G.

*julia.balykina@gmail.com, solka2000@yahoo.com,
gshavidze92@gmail.com*

Saint Petersburg University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034,
Russian Federation

Перераспределение ресурсов скорой помощи г. Санкт-Петербург с использованием методов имитационного моделирования

Введение

Система скорой медицинской помощи является одним из самых востребованных и важных элементов городской инфраструктуры. От эффективности работы данной системы зависят жизни людей. Особенностью работы службы скорой помощи является постоянное место дислокации машин скорой помощи и необходимость их возвращения на станцию прежде, чем отправиться на следующий вызов. Загруженность системы отображается в количестве вызовов, поступающих на станции, влекущие выезды машин, совершаемых за сутки. В качестве объекта исследования рассмотрена система скорой медицинской помощи г. Санкт-Петербург. Развитая инфраструктура и отсутствие сильного влияния климатических условий на транспортную систему окажут меньшее влияние на работу системы, что позволит нам работать с системой скорой помощи без рассмотрения внешних зависимостей.

Литературный обзор

Первые попытки построения математических моделей систем скорой помощи были предприняты во второй половине 20 века. Все модели можно разбить на три класса: детерминированные, вероятностные и динамические. Идея заключена в том, что районы обслуживания должны покрыть максимально возможную площадь населенного пункта, при этом задействовав оптимальное количество машин, чтобы заранее заданный процент вызовов мог обслуживаться за установленное нормативное время, т.е. время с момента получения вызова до приезда машины скорой помощи на место вызова. Первый класс (детерминированные модели)

описывает простейшие модели, которые сейчас используются в качестве элементов для моделей других классов или не используются совсем. В качестве примеров детерминированных моделей можно рассмотреть LSCM, MCLP и DSM [1, 2, 3]. Вероятностные модели появились немного позже и в них рассматривается возможность занятости машин, приоритетность вызовов, классификацию машин, классификацию вызовов и т.п. Одной из первых вероятностных моделей была MEXCLP[4]. MERLP[5] представляет собой две модели – MERLP1 и MERLP2, целью которых является минимизация ожидаемого распределения. Модель MALP-I[6], целью которой является максимизация спроса с заданной долей вероятности. С развитием компьютерных технологий появились модели динамического класса, реагирующие на изменение системы, рассматривающие вероятности подобных изменений на протяжении заданного периода времени. Одной из первых моделей данного класса является модель DDSM[7], mDSM[8] представляет собой интерес с точки зрения рассмотрения идеи мультипериодичности, модель DACL[9] определяет минимальное количество машин и их местоположение для каждого временного периода.

Постановка задачи и описание модели

Целью данной работы является построение распределения машин среди станций г. Санкт-Петербурга с уменьшением загруженности машин в течение суток, где под загруженностью понимается отношение количества вызовов к количеству машин в районе обслуживания станции. В качестве дополнительного условия используется мультипериодичность. Задача формулируется в терминах «спроса» и «предложения». Под спросом в данной работе будет пониматься количество звонков, поступающих на станцию. Под предложением будет пониматься количество машин, которое находится в том или ином районе. Параметры, описывающие работу системы скорой помощи: I – количество районов работы, по условиям задачи, совпадает с количеством станций; N – количество периодов в системе, величина постоянная; p - суммарное количество машин p_i – емкость станции i , где $i \in I$, величина постоянная; nas_{in} – количество жителей в районе i в период n , где $i \in I$, а $n \in N$, случайная величина; ter_i – оценка загрязненности района i , случайная величина, где $i \in I$; voz_{in} – численность населения старше трудоспособного возраста района i в период n , где $i \in I$, а $n \in N$; $skor_{in}$ – значение средней скорости в районе i в период n , где $i \in I$, а $n \in N$; α – коэффициент функции спроса; B_i – количество несчастных случаев, величина случайная, где $i \in I$; $K_1(voz_{in})$ – значение коэффициента численности возрастного населения, после применения оценочной шкалы, где $i \in I$, а $n \in N$; $K_2(ter_i)$ – значение коэффициента загрязнения после применения оценочной шкалы, где $i \in I$; $K_3(B_i)$ – значение коэффициента несчастных

случаев, после применения оценочной шкалы, где $i \in I$; $K_4(skor_{in})$ – значение коэффициента скорости, после применения оценочной шкалы, где $i \in I$, а $n \in N$. Переменная y_{in} – количество машин в районе i в период n , где $i \in I$, а $n \in N$. W_{in} – загруженность машины, где $i \in I$, а $n \in N$; $d_{in}(nas_{in}, ter_i, voz_{in}, skor_{in}, B_i)$ - спрос, где

$$\begin{aligned} d_{in}(nas_{in}, ter_i, voz_{in}, skor_{in}, B_i) &= \\ &= (K_1(voz_{in}) * K_2(ter_i) * K_3(B_i) * K_4(skor_{in})) * \alpha * \frac{nas_{in}}{1000} \\ W_{in} &= \frac{d_{in}(nas_{in}, ter_i, voz_{in}, skor_{in}, B_i)}{y_{in}} \end{aligned}$$

Целевая функция

$$\left(\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I W_{in} \right) \rightarrow \min_{W_{in}}$$

при условиях:

$$p_i > y_{in} \quad (1)$$

$$p = \sum_{i=1}^I y_{in} \quad (2)$$

где (1) – условие вместимости станций района i , где $i \in I$, по отношению к распределенным машинам в этот район, для $\forall n$ (2) – условие постоянства машин в системе, где $i \in I$, а $n \in N$.

Результаты

Программная реализация решения поставленной задачи была осуществлена на языке Java. Имитационное моделирование проводилось при следующих начальных условиях: периодом исследования взяли сутки и разбили на пару подпериодов с 8.00 до 20.00 и с 20.00 до 8.00. Было рассмотрено 4 сценария: с количеством машин 130 и ограничением машин на станции 3 единицы, с количеством машин 150 и вместимостью станций 3 машины, с количеством машин 130 и вместимостью станций 5 машин и 150 машин размер автопарка и вместимостью станций 5 единиц. Было замечено, что выбранные размеры автопарка недостаточны для необходимого полученного распределения. Рекомендованное число машин в городе варьируется от 165 до 170. В результате решенных задач наблюдается необходимость перераспределения машин в течение суток, в связи с движением потоков населения в течении подпериодов. Построение областей работы станций скорой помощи определило часть "проблемных" участков города: западная часть Васильевского острова, также западная часть Выборгского района. Возможным решением подобной проблемы является построение дополнительных станций скорой помощи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Toregas C. R., Swain R., ReVelle C. S., Bergman L. "The location of emergency service facilities ", *Operations Research*, 19, 1363-1373 (1971).
- [2] Church R. L., ReVelle C. S. "The maximal covering location problem", *Papers of the Regional Science Association*, 32, 101-118 (1974).
- [3] Gendreau M., Laporte G., Semet F. "Solving an ambulance location model by Tabu search ", *Location Science*, 27, 1641-1653 (1997).
- [4] Daskin "A maximum expected location model: Formulation, properties and heuristic solution", *Transportation Science*, 7, 48-70 (1983).
- [5] Rajagopalan H. K., Saydam C. "A minimum expected response model: Formulation, heuristic solution and application", *Socio-Economic Planning Sciences*, 43, 253-262 (2009).
- [6] ReVelle C. S., Hogan K. "The maximum availability location problem", *Transportation Science*, 23, 192-200 (1989).
- [7] Gendreau M., Laporte G., Semet F. "A dynamic model and parallel Tabu search heuristic for real-time ambulance relocation", *Parallel Computing*, 27, 1641-1653 (2001).
- [8] Schmid V., Doerner K. F. "Ambulance location and relocation problems with time-dependent travel times", *European Journal of Operational Research*, 207, 1293-1303 (2010).
- [9] Rahagopalan H. K., Saydam C., Xiao J. "A multiperiod set covering location model for dynamic redeployment of ambulances", *Computers and Operations research*, 35, 814-826 (2008).

Analysis of Color Characteristics of Plants Using Aerial Photography

Bure V., Mitrofanova O.

v1b310154@gmail.com, omitrofa@gmail.com

St. Petersburg State University, 7-9, Universitetskaya embankment, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; Agrophysical research institute, 14, Grazhdanskiy pr., 195220, Russian Federation

Nowadays, different aspects of statistical analysis of ecological data have significant importance, as well as image analysis methods, that are used for solving following ecological problems:

- detection of emergencies;
- plant condition monitoring;
- yield forecast;
- differentiated nitrogen fertilization;
- melioration system status monitoring;
- and others.

In this paper the problem of assessing the state of plants using the aerial photography data is considered. The solution of this problem is based on an analysis of the color characteristics of plants on aerophotos. To interpret the color parameters, the CIELAB color space model is used.

An automated unmanned aerial vehicle (UAV) – quadrocopter Geoskan-401 [2] is used for the aerial photography. It allows to get complete information for the statistical analysis. Two SLR cameras used as a payload allow to take high quality pictures without any digital noise in the visible and near-infrared regions.

The process of obtaining aerial photos using automated UAV consists of three main stages:

1. The flight plan. The supplied packaging of UAV Geoskan-401 also includes GeoScan Planner, a special software for planning flights, allowing the identification of field boundaries, which should be evaluated (for example, using Google Earth maps), and then the flight plan is created automatically. As a result, the created plan is loaded into the UAV.
2. Flying and photography. In this configuration, this step is fully automated. One just needs to start off the UAV to the created route, and the system will automatically take pictures with on-board cameras and sensors during the flight. The quadcopter uses GPS coordinates to take the pictures. The basic requirement for the shooting is the sufficient overlap of the images.
3. Pre-processing of the images. The supplied set also includes Agisoft PhotoScan software, which allows to create orthophotos in Geotiff format automatically from a mosaic of obtained images or 3D relief model.

The objects of research are experimental agricultural fields located on the territory of the Agrophysical Institute branch in Menkovo (Leningrad region, Gatchina district, Menkovo, coordinates of the center of the fields are $59^{\circ} 25'$ n. l. $30^{\circ} 01'$ e. l.).

The initial data of the problem are the color parameters L, a, b of plants from test areas. The test area is a small region of the field on which the qualitative characteristics of the plant are known. Consider the following example: there are test areas of wheat with known doses of nitrogen (0, 60, 90, 120 kg of active ingredient per 1 ha). In addition, certain quality parameters of plants are formed on each area: grain size (large, small), plants protection (there are weeds, no weeds), seeding rate (6 million per 1 ha, 5 million per 1 ha). It is necessary to analyze the existence of a linear relationship between the color of plants and the dose of nitrogen, depending on various qualitative factors.

First of all, it is necessary to present the color characteristics as a single value. Therefore, it was proposed to roll the color parameter vector into a single value using a convex linear combination. This value is conventionally

called the generalized color characteristic C_{Lab} , which is calculated by following formula [1]:

$$C_{Lab} = \alpha L^* + \beta_1 a^* + \beta_2 b^*, \quad (1)$$

where $\alpha \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ and $\beta_2 \geq 0$ – empiricall coefficients for each image of plants, and

$$\alpha + \beta_1 + \beta_2 = 1.$$

The main criterion for selection of α , β_1 , β_2 coefficients is the provision of the most pronounced linear relationship between the color characteristic (1) and the nitrogen dose in the test areas. For this, eight equations of linear regressions are constructed (for each situation). With this approach, the following condition must be met for obespeping the most pronounced linear connection:

$$\max_{(\alpha, \beta_1, \beta_2)} \min_{i=1, \dots, 8} R_i^2(\alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (2)$$

where R_i^2 - coefficients of determination of constructed linear regressions.

The most natural approach to solving this problem is to try the coefficients α , β_1 , β_2 . For each set of coefficients, the equations of linear regressions are constructed, the determination coefficients are calculated, and the maximin (2) is searched.

The given analysis allows to estimate possibilities of definition of a state of plants on any site of a field. This is necessary for the effective use of fertilizers, increasing the yield and quality of products, as well as for improving the ecological state of the field.

Further in this paper we consider this analysis more detail, as well as an example of the application of the proposed approach using statistical language R.

References

- [1] Mitrofanova O. A., Bure V. M., Kanash E. V., *Math module to automate the colorimetric method for estimating nitrogen status of plants*, Vestnik of St. Petersburg University. Series 10 Applied mathematics. Computer science. Control processes, issue 1, pp. 87-93, (2010).
- [2] UAV Geoscan-401, Web. <https://www.geoscan.aero>

Methods of Cluster Analysis for Detection of Homogeneous Groups of Healthcare Time Series

Bure V., Staroverova K.

vlb310154@gmail.com, ksenygnirps@gmail.com

Saint Petersburg University, Universitetskii prospekt 35, Saint Petersburg,
198504, Russia

Introduction. Methods of statistical analysis are often used for hypothesis testing. That is why mathematical approaches are applied for problems from different fields. We present a research on Saint Petersburg morbidity rate. Medical organizations in the city have an executive body responsible for control and supervision. However, every district has his own one, so possibly the quality of work of executive bodies can affect health problems of inhabitants of the district. The aim of the research is to detect the heterogeneity in districts of the city with respect to morbidity rate, which was chosen as an indicator of population health.

Methods of cluster analysis were utilized for detection of homogeneous groups of districts. Key feature is that data are time dependent so it is necessary to use special distance. There are a huge amount of studies of time series dissimilarity measures which are based on autocorrelation [1], spectral characteristics [2], assumptions of time series model [3,4], correlation [5], wavelet transformation [6,7] and others.

Besides each district is characterized by three values: children, teenagers and adult morbidity that call for multidimensional time series analysis. There are mainly two approaches: the overall matching and match-by-dimension. The first one takes the multidimensional time series as a whole to save the important correlations of the variables [8, 9, 10]. The second one conducts the univariate clustering and then uses some techniques to aggregate information from all dimensions [11, 12].

Firstly, we made a multidimensional clustering analysis correspondingly to both approaches described above. Then we made deeper research on children morbidity and propose a new dissimilarity measure for short time series.

Multidimensional clustering. Consider that some object or phenomenon is observed and every moment $t = \overline{1, T}$ several values, which usually are called as variables or dimensions, $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ are fixed. If n is equal to 1 it is a univariate time series. If n is higher than 1 then it is *multidimensional time series* (MTS).

The MTS can be treated as a unit that helps to consider the correlations of MTS dimensions. This way of working with MTS is called *the overall matching*. Clustering methods, which hold to that idea, usually use some techniques of dimension reduction because of curse of dimensionality. For example, principal component analysis often is a base for such kind of

methods. We applied a method *Eros* [10] in the research but unfortunately, it showed confusing results. The problem is that we have short time series: 16 observation (from 1999 to 2014) and 3 variables (children, teenagers and adult morbidity). That is why we split MTS to several univariate time series and applicate BORDA method to aggregate the information about similarity from every dimension [11, 12]. This concept is named as *match-by-dimension*. Instead of using Borda count such functions as mean, maximum, minimum can be used. However, the univariate time series clustering must be conducted before aggregation.

Univariate clustering. As we have short time series we cannot use methods based on spectral characteristics, assumptions of time series model and so on. Therefore, we decided to apply Euclid, Fréchet distances and adaptive dissimilarity index. Euclid distance can give not accurate results because it does not consider that data are time dependent, but we wanted to compare it with other distances. Fréchet distance (to be exact, discrete Fréchet distance [13]) is one of the first dissimilarity measures, which is appropriate for time series but it does not bear in mind the variability. Adaptive dissimilarity index [14] is a parametric function of two variables. The first is a distance computed by any conventional way (Euclid, Manhattan, Minkovski distance etc.). The second is value, which shows if two time series behave the same or different way. The parameter regulates the influence of two components on the result.

Stable clusters. We got 4 clustering distributions using Euclid distance, Fréchet distance and adaptive dissimilarity index with two variants of parameter for every variable of MTS dataset. Then weighted Borda counting method was applied to them. Therefore, 4 models of heterogeneity in Saint Petersburg derived. We found such districts that belonged to the same clusters in all models and named it “stable clusters”.

Several districts were not determined to any stable cluster. Consequently, we propose a heuristic algorithm to cope with such objects. It is based on Borda count too. The indeterminate object includes in one of stable clusters correspondingly to several criteria, which are chosen in accordance with aim of research [15].

Dissimilarity measure based on time series characteristics. Many present dissimilarity measures work well only with long time series. Unfortunately, such fields as economics or demography are more presented by short time series. Therefore we propose a new dissimilarity measure based on time series characteristics (CBD — characteristics based distance) [16]. The distance a linear combination of 3 values. The first presents the dissimilarity of such statistical characteristics as mean, standard deviation, median, minimum and maximum values. The second is dissimilarity with

respect to dynamic. The third is distance between behavior characteristics. Every addend fluctuates between 0 (absolutely similar time series in some sense) and 1 (absolutely different time series in some sense). It is obtained due to the special normalization. The distance was tested on 3 synthetic datasets and it showed appropriate results for further application.

Children morbidity rate. Children morbidity has the highest influence on result of MTS clustering. Besides, it is socially important value in healthcare system. That is why we conducted deeper research on it. We construct more than 9 clustering models and chose 4 with the highest silhouette index and Dunn index. The model obtained with CBD was included too. Then we defined stable clusters and applied a heuristic algorithm (described above) to set indeterminate districts to the found clusters.

Conclusion. Firstly, the multidimensional cluster analysis of Saint Petersburg with respect to morbidity was conducted. Three clusters were found by aggregating information from 4 clustering models. The heuristic method for determination of uncertain objects to cluster was proposed. Then a new dissimilarity measure based on time series characteristic was presented. It was validated on 3 synthetic datasets. At last, we made a children morbidity rate research using proposed method and several other methods. Therefore, we got 2 models. The first shows the groups of homogenous districts with respect to three variables: children, teenager and adult morbidity, the second - with respect to children morbidity rate only.

References

- [1] P. Galeano, D. Peña, “Multivariate analysis in vector time series”, *Resenhas IME-USP*, 4, No. 4, 383–403 (2000).
- [2] J. Caido, N. Crato and D. Peña, “A periodogram-based metric for time series classification”, *Computational Statistics & Data Analysis*, 50, 2668–2684 (2006).
- [3] E. A. Maharaj, “Clusters of time series”, *Journal of Classification*, 17, 297–314 (2000).
- [4] U. Triacca, “Measuring the distance between sets of ARMA models”, *Econometrics*, 4 (3), 32, 1–11 (2016).
- [5] X. Golay, S. Kollias, G. Stoll, D. Meier and A. Valavanis, “A new correlation-based fuzzy logic clustering algorithm for fMRI”, *Magnetic Resonance in Medicine*, 40 (2), 249–260 (2000).
- [6] A. Graps, “An introduction to wavelets”, *Journal IEEE Computational Science & Engineering*, 2, No. 2, 50–61 (1995).
- [7] H. Zhang, T. B. Ho, “Unsupervised feature extraction for time series clustering using orthogonal wavelet transform”, *Informatica*, 30, 305–319 (2006).
- [8] H. Lee and S. Choi, “PCA+HMM+SVM for EEG pattern classification”, *Signal Processing and Its Applications*, 65–74 (2003).

- [9] W. J. Krzanowski, “Between-groups comparison of principal components”, *Journal of the American Statistical Association*, 1, No. 7, 541–544 (1979).
- [10] K. Yang and C. Shahabi, “A PCA-based similarity measure for multivariate time series”, *Proceedings of the 2nd ACM International Workshop on Multimedia Databases (MMDB '04)*, 65–74 (November 2004).
- [11] J. Wang, Y. Zhu, S. Li, D. Wan, and P. Zhang, “Multivariate Time Series Similarity Searching”, *The Scientific World Journal*, 2014, Article ID 851017, 8 pages (2014).
- [12] S. J. Li , Y. L. Zhu, X. H. Zhang, D. Wan, “BORDA counting method based similarity analysis of multivariate hydrological time series”, *Journal of Hydraulic Engineering*, 40, No. 3, 378–384 (2009).
- [13] T. Eiter, H. Mannila, “ Computing discrete Fréchet distance”, Tech. Report CD-TR 94/64, Christian Doppler Laboratory for Expert Systems, TU Vienna, Austria, (2014).
- [14] Douzal Chouakria A., Nagabhushan P. N., “Adaptive dissimilarity index for measuring time series proximity”, *Advances in Data Analysis and Classification*, 1 (1), 1–43 (March 2007).
- [15] V. M. Bure, K. U. Staroverova, “Research on heterogeneity of children morbidity rate in Saint Petersburg ”, *International Mathematical Forum*, 12, No. 2, 77–85 (2017).
- [16] V. M. Bure, K. Yu. Staroverova, “Applying clustering analysis for discovering time series heterogeneity using Saint-Petersburg morbidity rate as an illustration”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 4, 44–50 (2016).

Evolutionary Behaviour of Taxpayers in the Model of Information Dissemination

Gubar E., Kumacheva S., Zhitkova E.

e.gubar@spbu.ru, s.kumacheva@spbu.ru, e.zhitkova@spbu.ru

St. Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Universitetskii prospekt 35, Peterhof, Saint-Petersburg, 198504, Russia

Recent studies has shown that tax audit can be used as an effective instrument of fiscal system. Following to the mathematical tradition, founded in such classical works as [5] and [11] this aspect is considered as the interaction between taxpayers and tax authority and is studied in the framework of game theoretical attitude.

For these models the optimal solution is usually presented in the form of the “threshold rule” in various modifications. In [4] this rule is formulated so

that the optimal value p^* of the probability of tax auditing is

$$p^* = \frac{\xi}{\xi + \pi}, \quad (1)$$

where ξ and π are tax and penalty rates correspondingly.

In spite of the total tax audit is an effective measure, at the same time it is very expensive and can not be applied regularly with the probability (1). However, an intensive growth of information technologies and an invasion of social networks in many parts of the modern life-style gives us the new facilities to control taxpayers. Nowadays proliferation of special information or valuable news about possible tax audit can help tax authority in collection taxes and reduce costs.

In contrast to many other research [2], [3], [5], [11] we consider a dynamic evolutionary model which describes the behavior of the taxpayers that depends on the information circulated over the population. We assume that in well-mixed population of economic agents, who are taxpayers and tax auditors, the series of random matches are occurred. We say that the strategy of tax authority influence on the behavior of taxpayers indirectly, because they usually do not have a reliable information about the time of tax audit and can only estimate the probability of this event.

We suppose that at the initial time moment tax-authority throw an information about future tax audit into small part of population of economic agents. Economic agents communicate over the time period and information will spread. Received information can change the behavior of an agent. This technic allow to improve the process of collection taxes with less costs. Propagation of information also initiates migration of economic agents between two subgroups: those who pay taxes and those who evade taxation.

Thus, we have the evolutionary process of changing of the population state, which is caused by the adaptation of behavior of taxpayers to the updated economic environment [12]. If a taxpayer switches on another status, then he transfers to the new subgroups, and thus the qualitative structure of the population is changed. This population process resembles an evolutionary game. Therefore, we can use the tools of evolutionary game theory, such as stochastic evolutionary dynamics, to describe the changes in the taxpayers behavior.

A taxpayer, who receives the opportunity to change his status, following a revision protocol [6], [10] chooses an opponent at random and switches from status i to status j according to the conditional rate c_{ij} . In other words the taxpayer can compare his behavior with the behavior of the random agent. If the exemplified strategy gives better payoff then he changes his status (strategy).

In current work we formulate an evolutionary model which describe the behavior of taxpayers depending on information received from tax authority. We estimate the optimal value of initial information invasion. We also corroborate our theoretical results by numerical simulations.

References

- [1] A. Antocia and P. Paolo Russua and L. Zarrib “Tax Evasion in a Behaviorally Heterogeneous Society: An Evolutionary Analysis”, *Economic Modelling*, 10, No. 42, 106 – 115 (2014).
- [2] L. Antunes and J. Balsa and P. Urbano and L. Moniz and C. Roseta-Palma “Tax Compliance in a Simulated Heterogeneous Multi-agent Society”, *Lecture Notes in Computer Science*, 3891, 147–161 (2006).
- [3] K. M. Bloomquist “A comparison of agent-based models of income tax evasion”, *Social Science Computer Review*, 11, No. 24(4) (2006).
- [4] V. Boure and S. Kumacheva “A game theory model of tax auditing using statistical information about taxpayers”, *Vestnik SPbGU*, series 10, 4, 16–24 (in Russian) (2010).
- [5] P. Chander and L. L. Wilde “A General Characterization of Optimal Income Tax Enforcement”, *Review of Economic Studies*, 65, 165–183 (1998).
- [6] E. A. Gubar “Construction Different Types of Dynamics in an Evolutionary Model of Trades in the Stock Market”, *Contributions to Game Theory and Management*, 3, SPb: Graduate School of Management, SPbU, 162–171, (2010).
- [7] E. Gubar, S. Kumacheva, E. Zhitkova, O. Porokhnyavaya “Impact of Propagation Information in the Model of Tax Audit”, *Recent advances in game theory and applications*, “Static& Dynamic Game Theory: Foundations & Applications”, Birkhauser, 91–110 (2015).
- [8] I. Kolesin, E. Gubar, E. Zhitkova *Strategies of control in medical and social systems*, Unipress, SPbSU, St.Petersburg, (2014).
- [9] S. Sh. Kumacheva, E.A. Gubar “Evolutionary Model Of Tax Auditing”, *Contributions to Game Theory and Management*, 8, SPb: Graduate School of Management, SPbU, 164–175 (2015).
- [10] W. H. Sandholm *Population Games and Evolutionary Dynamics*. The M.I.T.Press, (2010).
- [11] A. Vasin and V. Morozov *The Game Theory and Models of Mathematical Economics*, Moscow: MAKSPress (in Russian), (2005).
- [12] J. Weibull *Evolutionary Game Theory*, Cambridge, MA: The M.I.T.Press, (1995).

An Optimization Approach to Parameter Identification in Nonsmooth Boundary Value Problems

Gwinner J.

joachim.gwinner@unibw-muenchen.de

Institute of Mathematics, Department of Aerospace Engineering, Universität der
Bundeswehr München, Germany

This contribution is based on [2] and is concerned with the inverse problem of parameter identification in nonsmooth boundary value problems that can be expressed as variational inequalities (VIs) of the second kind.

A prominent example of this class is the following *direct* problem: Find the function u in the standard Sobolev space $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in (L^2(\Omega))^d\}$ on a bounded Lipschitz domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ such that for any $v \in H^1(\Omega)$ there holds

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} e(x) [\nabla u \cdot \nabla(v - u) + u(v - u)] dx + \int_{\partial\Omega} f(s) |u|(|v| - |u|) ds \\ & \geq \int_{\Omega} g(x) (v - u) dx. \end{aligned} \tag{1}$$

This VI is related to the Helmholtz partial differential equation $-\Delta u + u = g$ rendering the coercive bilinear form $\nabla u \cdot \nabla v + u v$. (1) provides a simplified scalar model of the Tresca frictional contact problem in linear elasticity. By the classic theory of variational inequalities there is a unique solution u of (1) if the datum g that enters the right-hand side is given in $L^2(\Omega)$ and moreover, the “ellipticity” parameter $e > 0$ in $L^\infty(\Omega)$ and the “friction” parameter $f > 0$ in $L^\infty(\partial\Omega)$ are known. Here we study the *inverse* problem that asks for the distributed parameters e and f , when the state u or, what is more realistic, some approximation \tilde{u} from measurement is known. In other words, we are interested in the variable parameters e and f such that $u(e, f) = \tilde{u}$. However, due to the lack of regularity in the measured data, it is unrealistic to expect such coefficients. Consequently, the inverse problem of parameter identification will be posed as an optimization problem which aims to minimize the misfit function, namely the gap between the solution $u = u(e, f)$ and the measured data \tilde{u} . This approach has been precisely the case with simpler inverse problems. To the best of our knowledge, this is the first work on the inverse problem of parameter identification in variational inequalities that does not only treat the parameter e linked to a bilinear form, but importantly also the parameter f linked to a nonlinear nonsmooth function, like the modulus function above.

To cover this frictional contact model problem as well as other non-smooth problems from continuum mechanics we propose the following new abstract framework. Let (as above) V be a Hilbert space; moreover E, F Banach spaces with convex closed cones $E_+ \subset E$ and $F_+ \subset F$. Let as with [1], $t : E \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(e, u, v) \mapsto t(e, u, v)$ a trilinear form and $l : V \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto l(v)$ a linear form. Assume that t is continuous such that $t(e, \cdot, \cdot)$ is V -elliptic for any fixed $e \in \text{int } E_+$. Now in addition we have a "semisublinear form" $s : F \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, u) \mapsto s(f, u)$, that is, for any $u \in V$, $s(f, u)$ is linear in its first argument f on F and for any $f \in F_+$, $s(f, \cdot)$ is sublinear, continuous, and nonnegative on V . Moreover assume that $s(f, 0_V) = 0$ for any $f \in F$.

Then the forward problem is the following VI: Given $e \in \text{int } E_+$ and $f \in F_+$, find $u \in V$ such that

$$t(e; u, v - u) + s(f; v) - s(f; u) \geq l(v - u), \quad \forall v \in V. \quad (2)$$

Now with given convex closed subsets $E^{\text{ad}} \subset \text{int } E_+$ and $F^{\text{ad}} \subset F_+$ we seek to identify two parameters, namely the "ellipticity" parameter e in E^{ad} and the "friction" parameter f in F^{ad} .

In the model problem we have some convex closed cone $E_+ \subseteq \{e \in L^\infty(\Omega) : e \geq 0 \text{ a.e. on } \Omega\}$ containing the convex closed "feasible" set $E^{\text{ad}} = \{e \in E_+ : \underline{e} \leq e \leq \bar{e} \text{ a.e. on } \Omega\}$, where the bounds $\underline{e} < \bar{e}$ are given in $\mathbb{R}_{++} = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$. Likewise we have some convex closed cone $F_+ \subseteq \{f \in L^\infty(\Gamma_C) : f \geq 0 \text{ a.e. on } \Gamma_C\}$ containing the convex closed "feasible" set $F^{\text{ad}} = \{f \in F_+ : \underline{f} \leq f \leq \bar{f} \text{ a.e. on } \Gamma_C\}$, where the bounds $0 \leq \underline{f} < \bar{f}$ are given.

In the first step we investigate the dependence of the solution of the forward problem on these parameters. To this end we assume

$$t(e; u, v) \leq \bar{t} \|e\|_E \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall e \in E, u \in V, v \in V \quad (3)$$

$$t(e; u, u) \geq \underline{t} \|u\|_V^2, \quad \forall e \in E^{\text{ad}} \subset E, u \in V. \quad (4)$$

In fact, $\bar{t} < \infty$ directly follows from the assumed continuity of t , where in the model problem $\bar{t} = 1$, and $\underline{t} > 0$ comes from Poincaré inequality;

Moreover assume that there holds with some constant \bar{s}

$$|s(f; u_2) - s(f; u_1)| \leq \bar{s} \|f\|_F \|u_2 - u_1\|_V, \quad \forall f \in F, u_1 \in V, u_2 \in V. \quad (5)$$

Also this assumption can be readily verified in the model problem and further nonsmooth boundary value problems.

Under these assumptions we obtain the following Lipschitz continuity result.

Theorem. Suppose that the trilinear form t satisfies (3) and (4) and that the semisublinear form s satisfies (5). Consider the uniquely defined solution

map $(e, f) \in E^{\text{ad}} \times F^{\text{ad}} \mapsto u = S(e, f)$. Let $e_i \in E^{\text{ad}}, f_i \in F^{\text{ad}}$ ($i = 1, 2$). Then there holds for some constant $c > 0$

$$\|S(e_2, f_2) - S(e_1, f_1)\|_V \leq c \{ \|e_1 - e_2\|_E + \|f_1 - f_2\|_F \}.$$

Then we present an optimization approach to the parameter identification problem as follows. Let an observation $\tilde{u} \in V$ be given. Then the parameter identification problem studied in this paper reads: Find parameters $e \in E^{\text{ad}}, f \in F^{\text{ad}}$ such that $u = S(e, f)$ "fits best" \tilde{u} , where $u \in V$ satisfies the VI (2), namely

$$t(e; u, v - u) + s(f; v) - s(f; u) \geq l(v - u), \forall v \in V.$$

Introduce the "misfit function"

$$j(e, f) := \frac{1}{2} \|S(e, f) - \tilde{u}\|^2$$

to be minimized.

Here we assume similar to [3] that the sought ellipticity and friction parameters are smooth enough to satisfy with compact imbeddings

$$E^{\text{ad}} \subset \hat{E} \subset\subset E; F^{\text{ad}} \subset \hat{F} \subset\subset F.$$

Example of such spaces are $\hat{E} = H^1(\Omega) \subset\subset L^\infty(\Omega); \hat{F} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C) \subset\subset L^2(\Gamma_C)$. For simplicity let \hat{E}, \hat{F} be Hilbert spaces (or more generally reflexive Banach spaces). Thus with given weights $\beta > 0, \gamma > 0$ we pose the stabilized optimization problem

$$(OP) \quad \begin{aligned} &\text{minimize } j(e, f) + \frac{\beta}{2} \|e\|_{\hat{E}}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f\|_{\hat{F}}^2 \\ &\text{subject to } e \in E^{\text{ad}}, f \in F^{\text{ad}} \end{aligned}$$

Under these assumptions we have the following solvability theorem.

Theorem. Suppose the above compact imbeddings. Suppose that the trilinear form t satisfies (3) and (4) and that the semisublinear form s satisfies (5). Then (OP) admits an optimal (not necessarily unique!) solution $(e^*, f^*, u) \in E^{\text{ad}} \times F^{\text{ad}} \times V$, where $u = S(e^*, f^*)$. i.e. $u \in V$ solves the VI (2).

Based on the Galerkin method and Mosco set convergence we finally establish a convergence result for finite dimensional approximation in the optimization approach.

References

- [1] M.S. Gockenbach and A.A. Khan, "An abstract framework for elliptic inverse problems. I. An output least-squares approach *Math. Mech. Solids*, 12, No. 3, 259–276 (2007).

- [2] J. Gwinner, "An optimization approach to parameter identification in variational inequalities of second kind submitted (2016).
- [3] M. Hintermüller, "Inverse coefficient problems for variational inequalities: optimality conditions and numerical realization *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 35, No. 1, 129–152 (2001).

Non-smooth Resource Allocation Problem

Krylatov A., Shirokolobova A., Zakharov V.

a.krylatov@spbu.ru, a.shirokolobova@spbu.ru, v.zaharov@spbu.ru
Saint Petersburg University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034,
Russian Federation

Resource allocation problem is one of the canonical problems in networked systems. The most significant representatives of such systems are urban road networks, power grids, gas pipelines, the Internet, supply chains, financial networks and other. This paper is devoted to non-smooth resource allocation problem corresponded decentralized decision-making [1]. The user equilibrium principle was formulated in 1952 by John Wardrop [5] and states that travelers in the road network seek to choose the route with minimum travel time, so all used routes have the same travel time that is less than the travel time of a single vehicle on any unused route. Power grids, gas pipelines, financial networks and supply chain could be modeled as network equilibrium problems with convex performance functions. Here, we focus on resource allocation problem with convex piecewise linear nondecreasing performance function.

Let us consider a network presented by an oriented graph G consisting of two nodes (source and sink) and n links between these two nodes. We call this network — *the network of parallel routes*. Introduce notation: F — the demand between source and sink; f_i — the amount of resource on link i , $i = \overline{1, n}$: $\sum_{i=1}^n f_i = F$. The performance function of a link is modeled by a convex non-smooth piecewise linear nondecreasing function:

$$t_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j f_i \right] \delta I_i^j, \quad i = \overline{1, n},$$

where

$$\delta I_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if } f_i \in I_j, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $I_i = (I_i^1, \dots, I_i^{q_i})$ — is the set of intervals corresponding to the linear segments of some piecewise linear functions $t_i(f_i)$. Moreover, we suppose that $t_i(x) \geq 0$, $x \geq 0$ and $\partial t_i(x)/\partial x > 0$, $x > 0$ and $i = \overline{1, n}$. Define also $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Resource allocation $f^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ is *user-equilibrium* in the network G if and only if [3, 5]:

$$t_i(f_i^*) \begin{cases} = t^* > 0 & \text{when } f_i^* > 0, \\ \geq t^* & \text{when } f_i^* = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}.$$

It is proved that the user equilibrium problem can be formulated as an optimization program [2, 4]:

$$\min_f z(f) = \min_f \sum_{i=1}^n \int_0^{f_i} t_i(u) du, \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{i=1}^n f_i = F, \quad (2)$$

$$f_i \geq 0. \quad (3)$$

Let us apply the Khun–Tucker conditions to optimization problem (1)-(3) by differentiating the Lagrangian

$$L = \sum_{i=1}^n \int_0^{f_i} \sum_{j=1}^{q_i} [a_i^j + b_i^j u] \delta I_i^j du + \omega \left(F - \sum_{i=1}^n f_i \right) + \sum_{i=1}^n (-\eta_i) f_i$$

with respect to f_i and equating the result to zero:

$$\frac{\partial L}{\partial f_i} = \sum_{j=1}^{q_i} [a_i^j + b_i^j f_i] \delta I_i^j - \omega - \eta_i = 0, \quad (4)$$

where ω and η_i , $i = \overline{1, n}$ are Lagrange multipliers. Thus, we have:

$$\hat{t}_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} [a_i^j + b_i^j f_i] \delta I_i^j = \omega + \eta_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

The complementary slackness condition requires that the equalities $\eta_i f_i = 0$ for all $i = \overline{1, n}$ be true. In this case, if $f_i > 0$, then $\eta_i = 0$ and, by (5) we have

$$t_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} [a_i^j + b_i^j f_i] \delta I_i^j = \omega \quad (6)$$

On the other hand, if $f_i = 0$, C,Ps $\eta_i \geq 0$ then, and, by (5),

$$t_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} [a_i^j + b_i^j f_i] \delta I_i^j \geq \omega. \quad (7)$$

These correlations can be rewritten as the constraint:

$$t_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j f_i \right] \delta I_i^j \begin{cases} = \omega & \text{if } f_i > 0, \\ \geq \omega & \text{if } f_i = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Express f_i in terms of ω , using (8):

$$f_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{q_i} \left[\frac{\omega - a_i^j}{b_i^j} \right] \delta I_i^j & \text{if } \sum_{j=1}^{q_i} a_i^j \delta I_i^j \leq \omega, \\ 0 & \text{if } \sum_{j=1}^{q_i} a_i^j \delta I_i^j > \omega, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

The functions $t_i(f_i)$ for all $i = \overline{1, n}$ are convex and so, the Khun-Tucker conditions are both sufficient and necessary. Therefore, we can say that the assignment f^* creates a user equilibrium in the network of parallel routes **if and only if** there is ω^* such that f^* and ω^* satisfy (8) and, therefore, (9).

Assume that f^* and ω^* are defined. Then each f_i^* , $i = \overline{1, n}$ corresponds to a fixed interval $I_i^{j_i^*}$ and the coefficients $a_i^{j_i^*}$ and $b_i^{j_i^*}$ correspondingly. Without loss of generality, let us reindex the edges so that:

$$a_1^{j_1^*} \leq \dots \leq a_n^{j_n^*}. \quad (10)$$

Let m be the index of the edge such that $a_m^{j_m^*} \leq \omega^* < a_{m+1}^{j_{m+1}^*}$. Then, inserting (9) into (2), we have

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\omega^* - a_i^{j_i^*}}{b_i^{j_i^*}} \right] = F \quad (11)$$

Therefore, ω^* can be expressed as:

$$\omega^* = \frac{F + \sum_{i=1}^m a_i^{j_i^*}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i^{j_i^*}}}. \quad (12)$$

Put (12) into (9), to obtain f^* explicitly:

$$f_i^* = \begin{cases} \frac{1}{b_i^{j_i^*}} \frac{F + \sum_{i=1}^m a_i^{j_i^*}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i^{j_i^*}}} - \frac{a_i^{j_i^*}}{b_i^{j_i^*}} & \text{if } i \leq m, \\ 0 & \text{if } i > m, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Find the value of m using (11) and the following equation $a_m^{j_m^*} \leq \omega^* < a_{m+1}^{j_{m+1}^*}$:

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{a_m^{j_m^*} - a_i^{j_i^*}}{b_i^{j_i^*}} \right] \leq F < \sum_{i=1}^{m+1} \left[\frac{a_{m+1}^{j_{m+1}^*} - a_i^{j_i^*}}{b_i^{j_i^*}} \right]. \quad (14)$$

Therefore, (13) under (10) and (14) is the user equilibrium in the network G with piecewise linear performance functions. However, it is a complex combinatorial problem. Nevertheless, the projection approach to cope with smooth recourse allocation problem was developed in [2]. Thus, we are able to approximate piecewise linear performance functions $t_i(f_i)$ by some smooth nondecreasing functions $\hat{t}_i(f_i)$ with precision ε :

$$t_i(f_i) \approx \hat{t}_i(f_i), \quad |t_i(f_i) - \hat{t}_i(f_i)| < \varepsilon, \quad f_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Eventually, the solution of smooth resource allocation problem help us to reduce the amount of possible combination in (13). Moreover, the more precise approximation, the less amount of possible combinations. Thus, developed approach is quite constructive tool to cope with non-smooth resource allocation problem.

References

- [1] Johansson B., Johansson M. Distributed Non-smooth Resource Allocation Over a Network // Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference Shanghai, P.R. China. 2009. P. 1678–1683.
- [2] Krylatov A. Yu. Network flow assignment as a fixed point problem // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2016. No 10 (2). P. 243-256.
- [3] Patriksson M. The Traffic Assignment Problem: Models and Methods. Utrecht, Netherlands: VSP, 1994. 223 p.
- [4] Sheffi Y. Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc, 1985. 416 p.
- [5] Wardrop J. G. Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Institution of Civil Engineers. 1952. Vol. 2. P. 325–378.

A Method to Determine the Local Optimal Path of Ship Navigation for Convex Obstacle

Li X., Wang H., Shen Z.

18584361182@163.com, 929047860@qq.com, 18817320544@163.com

State Key Laboratory on Integrated Optoelectronics, College of Electronic Science
School of JiLin University, Changchun ,Jilin Province, 130012,China

As a heuristic search algorithm, the A * algorithm is often used to solve the problem of ships routing optimization. For convex obstacles, the A * algorithm is improved in the local optimal path planning of ships, when the increased number of waypoints lead a lower efficiency. The improved algorithm uses the angle between the starting point, the ending point and north direction as the heuristic information to reduce the number of route points in the path planning process. After simulation and verification, the

number of the improved algorithms waypoint searched is reduced by about 30 percent compared with the classical A * algorithm, significantly less than the classical A * algorithm. At present, a lot of optimization methods are proposed to route planning. Such as Dijkstra algorithm[1], genetic algorithm[2], ant colony algorithm[3]. A * algorithm[4] is a heuristic search algorithm, which is faster and more flexible. However, when the number of waypoints get larger, the computational complexity and time consumption of the A * algorithm are greatly increased. In order to solve this problem, this paper improves the heuristic operator, uses the angle between the starting point, the ending point and north direction as the heuristic information for route planning. As the simulation below shows, the effectiveness of algorithms is proved. According to the real-time weather information and the existing map information. the digital map in the navigation area can be obtained, the starting point, the target point and the area of navigation are defined according to the task information, the latitude and longitude lines will be used to generate navigation maps of the navigation area. Its establishment process is as followings: Combined with the mission information, the starting point and target point of navigation are defined as SPEP. And based on the starting point and destination point SP, EP determined sailing area. Where S E are longitude, S E are latitude. Set the convex obstruction in the navigation area to the prohibited zone. The unit of latitude and longitude will be used to divide the navigation area to generate the grid map. We get t_c t_k (horizontal grid number and vertical grid number) grid, the center of each grid is the waypoint, the grid map is a directed network diagram A * algorithm is a heuristic search algorithm, which is defined by the cost function to evaluate the cost of further size. The cost function to determine the optimal is: $F(n) = G(n) + H(n)$, $F(n)$ representing the estimated value from the starting waypoint to the waypoint n, $G(n)$ represents the weight of the current waypoint n that is moved from the starting point along the generated path. $H(n)$ represents the weight that moves from the current waypoint n to the target point. The weights of $H(n)$ are generally calculated by the Manhattan distance method Manhattan distance is the sum of the horizontal and vertical distances between two waypoints. Firstly, establish two data structures: open table and closed table. The open table is used to hold the unsearched waypoints. The closed table is used to record the waypoints searched and the waypoints covered by the obstacle. Then calculate the weight matrix: In this paper, LIBERTY SHIP is chosen as the object ship so according to the empirical formula proposed by James (1957)[6]. The starting point and the target point are connected by a straight line to calculate the angle between the line and the north direction. Steps of route planning algorithm: (1) Add the starting point to the open table. (2)

Repeat the following steps: (a) Find the minimum F values of open tables waypoint, the current waypoint is set to the waypoint with the lowest F value. (b) Removes the current waypoint from the open table and places it in the closed table. (c) According to the heuristic information retained by the five search out direction to judge the 5 route points that are pointed in turn. If the waypoint is already in the closed table, the waypoint is not taken into account; If the waypoint is not in the open table, then add the waypoint to the open table, with the current waypoint as the father waypoint for that waypoint, and record the F, G and H values of the waypoint; If the waypoint is already in the open table when the G value of the current waypoint to reach the waypoint is less than the original waypoint does not go to the waypoint's G value, then the current waypoint is used as the parent waypoint for the waypoint and recalculate the F, G, and H values of this waypoint. Otherwise, the waypoint F, G, and H values remain unchanged. (d) If the target point is added to the closed table, the local optimal path is achieved; if the target point is not added to the closed table, and the open table is empty, the local optimal path does not exist. In this paper, by using the computer simulation, the efficiency of the proposed path planning algorithm is compared with that of the classical A * algorithm, and the simulation proves that the method is feasible and effective. Compared with the classical A * algorithm, the number of the waypoints searched in this paper are reduced by 13, 9, 11 and 14 respectively. The reduction percentage are 30.95

References

- [1] Dijkstra EW, "Note on two problems in connection with graphs" , *Numerical Mathematics*, 1(3):269-271(1959).
- [2] DENG Zhi-yan, CHEN Zhi-kun, "Mobile Robot Path Planning Based on Improved Genetic Algorithm"[J].*Machinery Design, Manufacture*, (7):147.(2010).
- [3] TANG Liang, FANG Ting-jian, "Path Planning Method Based on Improved Ant Colony Algorithm"[J].*Journal of University of Science and Technology of China* ,39(9):980.(2009) .
- [4] PAN Hai-bo. "A* Algorithms to Find the Path"[J]. *Technology BBS*, (18):21.(2009).
- [5] Montes, Anel A. *Network shortest path application for optimum track ship routing*, Monterey, California:Naval Postgraduate School, (2005).
- [6] James RW *Application of wave forecasts to Marine Navigation*, U.S. Navy Hydrographic office, (1957).

An Improved A* Algorithm for Fuel-efficient Ship Weather Routing

Liu H., Wang H., Shen Z.

869507309@qq.com, 929047860@163.com, 18817320544@163.com

School of Information Science Technology, East China Normal University,
Shanghai 200062, China; State Key Laboratory on Integrated Optoelectronics,
College of Electronic Science and Engineering, Jilin University, Changchun, Jilin
Province, 130012, China

Wind, waves and ocean currents have impacts on ship velocity in open ocean area. Therefore, choosing the optimal route can reduce fuel consumption and improve ship safety. Firstly, this paper establishes the fuel consumption prediction model. Then, in the case of little change in the times of engine firing, the optimization route problem of minimum fuel consumption can be converted to the optimization route problem of shortest time. Finally, an improved A* algorithm for convex obstacles is proposed. The objective function of fuel consumption in ship weather routing is calculated. Estimated fuel consumption per hour of ships can be calculated by the following formula: $FCPH = P * BSFC$. Where: FCPH is the fuel consumption per hour. P is engine power. BSFC is the fuel consumption rate. When the engine is started each time, another aspect of fuel consumption occurs. This is obvious when the engine needs to be turned on and off a number of times during navigation. Therefore, the total fuel consumption in the course of routing can be expressed as the following formula: $q = T * FCPH + m * FCPS$. Where: q represents the total fuel consumption in the course of routing. T is the total travel time in the course of routing. m is the times of engine firing. FCPS is the fuel consumption of engine firing every time. It is assumed that the number of engine firing does not change too much. Then, the optimization route problem of minimum fuel consumption can be transformed into the optimization route problem of shortest time. Weather ship routing based on wave conditions has been operated by navigators since a long time ago. R.W. James (1957) found that the most important parameter retarding a ship's progress was surface wave action. It is easy for navigators to select the optimum track to be navigated from departure to destination in a known wave climate. Therefore, this paper regards wave conditions as meteorological data. The wave conditions consist of mean wave direction and significant wave height. The meteorological data can be obtained from ECMWF. In this paper, the ocean to be navigated is divided by $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ degrees latitude-longitude lines. Each node has eight out-degrees and eight in-degrees. Weights can be calculated by the equation: $w = L/V$. Where: w is the weight. V denotes the actual speed in the sea. L represents arc distance between two nodes. V can

be required by empirical formula which is recommended by Soviet Central Maritime Research Institute. The formula is expressed as follows: $V=V_0 \cdot (0.745h - 0.257qh) \cdot (1.0 - 0.00000135DV_0)$. Where: V_0 represents the speed in calm water, h means the wave height, q is the angle between ship heading and wave direction, D is the actual displacement of the ship (tons). This formula is applied to ships with displacement ranging from 5000 to 25000 tons, speeds between 9 and 20 knots, and the wave height is between 0 and 5 meters. L can be calculated by the great circle distance equation.

With the continual rising of oil price and the intensification of greenhouse effect, how to reduce operational fuel consumption and decrease air pollution is very meaningful. This paper presents an improved A* algorithm for fuel-efficient ship weather routing and establishes the fuel consumption prediction model. The improved A* algorithm measures the angle between a segment from the starting node to the ending node and the true north line. Then, it takes the angle as heuristic information to determine which nodes need to be searched at each current node. Eventually, it selects the next optimal node from these searched nodes. This improved algorithm is applicable for convex obstacles. The simulation results of improved A* algorithm show that when the obstacles are convex obstacles, this new method can find the fuel-efficient route and reduce the numbers of total searched nodes effectively.

References

- [1] Ming-Cheng Tsou, "An Ant Colony Algorithm for efficient ship routing", *POLISH MARITIME RESEARCH*, 3(79), No. 20, 28- 38 (2013).
- [2] Anel A.Montes, "Network Shortest Path Application for Optimum Track Ship Routing", *MASTER OF SCIENCE IN OPERATIONS RESEARCH* (2005).
- [3] J.K. Panigrahi, "Optimum Tracking of Ship Routes in 3g-WAM Simulated Rough Weather Using IRS-P4(MSMR) Analysed Wind Fields", *J. Indian Soc. Remote Sens.*, No. 36, 149- 158 (2008).
- [4] Zihao Shen, "Improved Dijkstra Algorithm for Ship Weather Routing", *ESAT* (2016).
- [5] F. Benjamin Zhan, "Three Fastest Shortest Path Algorithms on Real Road Networks: Data Structures and Procedures.", *Journal of Geographic Information and Decision Analysis*, No. 1, 69- 82.
- [6] J.K. Panigrahi, "Application of Oceansat-1 MSMR analysed winds to marine navigation", *International Journal of Remote Sensing*, No. 10, 2623- 2627 (2010).
- [7] S.F. Zheng, "Sector Dijkstra Algorithm for Shortest Routes between Customers in Complex road networks", *J Tsinghua Univ*, No. 11 (2009).
- [8] G.J. Haltiner, "Minimal-Time Ship Routing", *Journal of Applied Meteorology*, 1, No. 1 (1962).

**Inverse Dynamical and Spectral Problem for the
One-Dimensional Dirac System on a Tree**

Michaylov A., Michaylov V., Murzabekova G.

mikhaylov@pdmi.ras.ru, ftvsm78@gmail.com, guldenmur07@gmail.com

St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the
Russian Academy of Sciences, 27 Fontanka, Saint Petersburg, 191023, Russia; S.
Seifullin Kazakh Agrotechnical University, 62 Pobeda Prospect, Astana, 010011,
Kazakhstan

We consider the inverse dynamical and spectral problems for the one dimensional Dirac system on a finite tree. Our aim will be to recover the topology of a tree (lengths of the edges and connectivity) as well as parameters of a system, i.e. the matrix potential on the edges. As inverse data we use the spectral characteristics of a system: spectral data or a Weyl function or dynamical characteristics: the response operator.

Let Ω be a finite connected compact graph without cycles (a tree). The graph consists of edges $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ connected at the vertices $V = \{v_1, \dots, v_{N+1}\}$. Every edge $e_j \in E$ is identified with an interval (a_{2j-1}, a_{2j}) of the real line. The edges are connected at the vertices v_j which can be considered as equivalence classes of the edge end points $\{a_j\}$. The boundary $\tilde{\Gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ of Ω is a set of vertices having multiplicity one (the exterior nodes). In what follows we assume that one boundary node (say v_m) is clamped, i.e. zero Dirichlet boundary condition is imposed at v_m , and everywhere below we will be dealing with the reduced boundary $\Gamma = \tilde{\Gamma} \setminus v_m$. Since the graph under consideration is a tree, for every $a, b \in \Omega$, $a \neq b$, there exists the unique path $\pi[a, b]$ connecting these points.

Let $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, at each edge e_i we are given with a real matrix-valued potential $V_i = \begin{pmatrix} p_i & q_i \\ q_i & -p_i \end{pmatrix}$, $p_i, q_i \in C^1(e_i)$. The space of real vector valued square integrable functions on the graph Ω is denoted by $L_2(\Omega) := \bigoplus_{i=1}^N L_2(e_i, \mathbb{R}^2)$. For the element $U \in L_2(\Omega)$ we write

$$U := \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^N, \quad u_i^1, u_i^2 \in L_2(e_i).$$

The continuity condition at the internal vertexes reads:

$$u_i^1(v) = u_j^1(v), \quad e_i \sim v, \quad e_j \sim v, \quad v \in V \setminus \Gamma. \quad (1)$$

Here $e_j \sim v$ means edge e_j is incident to vertex v , The second condition (balance of forces) at the internal vertex v is introduced as

$$\sum_{i|e_i \sim v} u_i^2(v) = 0, \quad v \in V \setminus \Gamma. \quad (2)$$

We put $\Psi := \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \in L_2(\Omega)$, $\psi_i^1, \psi_i^2 \in H^1(e_i)$ and introduce the operator

$$\mathcal{L}\Psi := \left\{ J \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_i^1 \\ \psi_i^2 \end{pmatrix} + V_i \begin{pmatrix} \psi_i^1 \\ \psi_i^2 \end{pmatrix} \right\}, \quad x \in e_i$$

with the domain

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ \Psi \in L_2(\Omega) \mid \psi_i^1, \psi_i^2 \in H^1(e_i), \Psi \text{ satisfies (1), (2)} \atop \text{at } v \in V \setminus \Gamma, \psi^1(v) = 0, v \in \Gamma \right\}$$

By \mathbf{S} we denote the spectral problem on the graph:

$$J\Psi_x + V\Psi = \lambda\Psi \quad x \in e_i, \quad (3)$$

$$\Psi \text{ satisfies (1), (2) at } v \in V \setminus \Gamma \quad (4)$$

$$\psi^1(v) = 0 \quad \text{for } v \in \Gamma, \quad (5)$$

It is known that the problem (3)–(5) has a solution $\{\lambda_k, \Psi_k\}_{k=1}^\infty$, where Ψ_k are chosen such that $\int_\Omega \Psi_k \Psi_l dx = \delta_{kl}$. We introduce the notation: $\gamma_k := \{\gamma_1^k, \dots, \gamma_{m-1}^k\} = \{\psi_k^2(v_1), \dots, \psi_k^2(v_{m-1})\}$. With (3)–(5) we associate the *spectral data*, the set of pairs:

$$\{\lambda_k, \gamma_k\}_{k=1}^\infty. \quad (6)$$

Sometimes it is more convenient to use the Titchmarsh-Weyl (TW) matrix function as a inverse spectral data. This function is introduced in the following way: for $\lambda \notin \mathbb{R}$ we consider the problem (3), (4) with the nonhomogeneous boundary condition:

$$\psi^1(v_i) = \xi_i, \quad v_i \in \Gamma, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (7)$$

The TW matrix function connects the values of the solution (3), (4), (7) $\Psi(\cdot, \lambda)$ in the first and second channels at the boundary :

$$\begin{aligned} \psi^2(\cdot, \lambda)|_\Gamma &= \mathbf{M}(\lambda)\psi^1(\cdot, \lambda)|_\Gamma, \\ (\psi^2(v_1, \lambda), \dots, \psi^2(v_{m-1}, \lambda))^T &= \mathbf{M}(\lambda)(\xi_1, \dots, \xi_{m-1})^T. \end{aligned} \quad (8)$$

Along with the spectral, we consider the dynamical inverse problem. We introduce the *outer space* $\mathcal{F}_\Gamma^T := L_2([0, T], \mathbb{R}^{m-1})$ the space of controls acting on the reduced boundary of the tree. Then the forward problem is described by the Dirac system on the each edge of the tree:

$$iU_t(x, t) + JU_x(x, t) + V(x)U(x, t) = 0 \quad x \in e_i, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

conditions at internal vertexes:

$$U(v, t) \text{ satisfies (1), (2) for all } t \geq 0, \quad v \in V \setminus \Gamma. \quad (10)$$

Dirichlet boundary conditions:

$$U^1|_\Gamma = F, \quad \text{on } \Gamma \times [0, T], \quad (11)$$

where the latter equality means that

$$(u^1(v_1, t), \dots, u^1(v_{m-1}, t))^T = (f^1(t), \dots, f^{m-1}(t))^T$$

and where $F = (f^1(t), \dots, f^{m-1}(t))^T \in \mathcal{F}_\Gamma^T$.

By **D** we denote the dynamical problem on the tree Ω , described by the Eqs. (9) which satisfies the compatibility conditions (10) at all internal vertices for all $t > 0$, Dirichlet boundary conditions (11) and zero initial conditions $U(\cdot, 0) = 0$. The solution to this problem we denote by U^F . We introduce the *response operator* for the problem **D** by

$$R^T\{F\}(t) := U^2(\cdot, t)|_\Gamma, \quad t \in [0, T]. \quad (12)$$

In other words, R^T connects the values of the solution U^F to the problem **D** in the first and second channels at the boundary:

$$\left(R^T (U^1(v_1, t), \dots, U^1(v_{m-1}, t))^T \right) (t) = (U^2(v_1, t), \dots, U^2(v_{m-1}, t))^T.$$

Our aim will be to recover the tree (connectivity of the edges and their lengths) and the matrix potentials by any of the following: spectral data (6), TW matrix function $\mathbf{M}(\lambda)$ (8), response operator R^T (12).

We will use the Boundary Control method [6, 1] first applied to the problems on trees in [7] and its modification, so called leaf-peeling method introduced in [3] and developed in [4, 2, 5]. The boundary controllability property for the Dirac system are different from one for the wave and two-velocity systems, the latter causes the consequences for the inverse problem. To overcome this difficulty, we will use some ideas from [8].

References

- [1] S. Avdonin, A. Mikhaylov, V. Mikhaylov “On some applications of the Boundary Control method to spectral estimation and inverse problems”, *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, No. 6 (1), (2015).

- [2] Avdonin S. A., Mikhaylov V. S., Nurtazina K. B., 2015, On inverse dynamical and spectral problems for the wave and Schrödinger equations on finite trees. The leaf peeling method. *Zapiski POMI*. Vol. **438**, pp. 7-21.
- [3] Avdonin S. A., Kurasov P. B., 2008, “Inverse problems for quantum trees”, *Inverse Probl. Imag.* Vol. **2** (1), pp. 1–21.
- [4] Avdonin S. A., Choque Rivero A., Leugering G., Mikhaylov V. S., “On the inverse problem of the two-velocity tree-like graph”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (Wiley)* Vol. **95** (12), pp. 1490-1500, 2015.
- [5] S. Avdonin, G. Murzabekova, K. Nurtazina “Source Identification for the Heat Equation with Memory”, *IIMA Preprint Series*, No. 2459, (2015).
- [6] M.I.BELISHEV. Recent progress in the boundary control method. *Inverse Problems*, 23 (2007), no 5, R1–R67.
- [7] M. I. Belishev, “Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method”, *Inverse Problems* **20**, 647–672 (2004).
- [8] M. Belishev, V. Mikhaylov “Inverse problem for one-dimensional dynamical Dirac system (BC-method)”, *Inverse Problems*, 26, no. 4, 045009, 19 pp. 2010.

Approximation of Convex Fuzzy Sets

Noghin V.

noghin@gmail.com

Saint-Petersburg State University, Universitetsky pr. 35, Petrodvorets,
Saint-Petersburg, 198504, Russia

Let R^m be a real finite-dimensional vector space. A Cartesian product $F^m = R^m \times [0, 1]$ is called a *fuzzy m-dimensional vector space*. An element (a fuzzy point) $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m, \lambda) \in F^m$ we will interpret as the point (vector) $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$ whose a degree of membership is $\lambda(y) \in [0, 1]$. A *fuzzy set* $Y \subset F^m$ is defined as

$$Y = \bigcup_{y \in R^m} \{(y, \lambda_Y(y)) | \lambda_Y(y) \in [0, 1]\}$$

where $\lambda_Y : R^m \rightarrow [0, 1]$ is a *membership function* of the given set. An ordinary set $\text{supp } Y = \{y \in R^m | \lambda_Y(y) > 0\}$ is called a *support* of Y . A *bounded* fuzzy set has a bounded support. We accept

$$Y \subset Z \Leftrightarrow \lambda_Y(y) \leq \lambda_Z(y) \quad \forall y \in R^m$$

and define

$$Y \cup Z = \bigcup_{y \in R^m} \{(y, \lambda(y)) | \lambda(y) = \max\{\lambda_Y(y); \lambda_Z(y)\}\},$$

$$Y \cap Z = \bigcap_{y \in R^m} \{(y, \lambda(y)) | \lambda(y) = \min\{\lambda_Y(y); \lambda_Z(y)\}\}.$$

A fuzzy set Y is called a *convex* set (see [1]) if

$$\lambda_Y(\theta x + (1 - \theta)y) \geq \max\{\lambda_Y(x); \lambda_Y(y)\} \quad \forall x, y \in R^m, \forall \theta \in [0, 1].$$

From this definition it follows that a convex fuzzy set has a quasiconcave [2] function of membership. A *distance between two points* \hat{y} and \hat{z} of fuzzy space we will measure by

$$\|\hat{y} - \hat{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - z_i)^2 + (\lambda(y) - \lambda(z))^2}.$$

Obviously, this distance possesses all standard properties of metric.

We will say that a fuzzy set Y is *closed* if the limit of any convergent sequence $\{(y^k, \lambda_Y(y^k))\} \in Y, k = 1, 2, \dots$, belongs to Y .

Let us introduce a closed fuzzy ε -neighborhood of \hat{y}

$$U_\varepsilon(\hat{y}) = \bigcup_{z \in R^m} \{(z, \lambda(z)) \mid \|\hat{z} - \hat{y}\| \leq \varepsilon\}$$

and a fuzzy parallel set

$$Y_\varepsilon = \bigcup_{z \in \text{supp } Y} U_\varepsilon(\hat{z})$$

for a given fuzzy set Y .

Define *distance* between two convex fuzzy sets Y and Z by

$$\text{dist}(Y, Z) = \inf\{r > 0 \mid Y_r \subset Z, Z_r \subset Y\}.$$

If sets are ordinary, closed and convex, then the distance is coincide with the Hausdorff distance (see [3]). The distance possesses the following metric properties.

- 1) $\text{dist}(Y, Z) \geq 0$, $\text{dist}(Z, Y) = 0 \Leftrightarrow Y = Z$
- 2) $\text{dist}(Y, Z) = \text{dist}(Z, Y)$;
- 3) $\text{dist}(X, Z) \geq \text{dist}(X, Y) + \text{dist}(Y, Z)$.

A fuzzy set Y we will call *polyhedral* if it can be represented as follows

$$Y = \bigcup_{i=1}^l Y_i,$$

where Y_i is a fuzzy set with a polyhedral support and a constant membership function

$$\lambda_i(y) = \begin{cases} \lambda_i^* \in (0, 1], & \text{if } y \in \text{supp } Y_i, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and also $\text{supp}Y_i \subset \text{supp}Y_{i+1}$, $\lambda_i^* > \lambda_{i+1}^*$ for all $i = 1, 2, \dots, l - 1$.

It can be verified that any polyhedral fuzzy set is convex and closed.

A bounded polyhedral fuzzy set is called a *fuzzy polytop*. Another definition of polytop was proposed in [4].

A *convex hull* of fuzzy set Y , i.e., $\text{conv}Y$, is defined as minimal (with respect to inclusion) fuzzy set including Y . On the other hand, a convex hull is the intersection of all convex fuzzy sets including Y .

Let $\hat{y} = (y, \lambda)$, $y \neq \mathbf{0}$, $\lambda > 0$, be an element of F^m . A *fuzzy direction* is a ray $\{\hat{y} \in F^m | (\vartheta \cdot y, \lambda) \exists \vartheta \geq 0\}$.

It can be proved the following results.

Theorem 1. Any nonempty polyhedral set is a convex hull of some finite number of fuzzy points and directions.

Theorem 2. Any convex closed and bounded fuzzy set Y whose membership function is continuous can be approximated by some fuzzy polytop; more precisely, for any $\varepsilon > 0$ there exists a fuzzy polytop $M \subset Y$ (as well as $M \supset Y$) such that $\text{dist}(Y, M) < \varepsilon$.

References

- [1] R. Lowen, “Convex fuzzy sets”, *Fuzzy Sets and Systems*, No. 3, 291-310 (1980).
- [2] O.L. Mangasarian. *Nonlinear programming*, SIAM, Philadelphia, (1994).
- [3] K. Leichtweiss. *Konvexe Mengen*, Springer, Berlin, (1980).
- [4] A. Budnitzki, “Linear optimization with fuzzy variable over fuzzy polytope”, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 29, 499-507, (2015)

Weak Solvability of Nonlinear Initial Boundary Value Problem with Distributed Parameters in a Netlike Region

Provorotov V.

wwprov@mail.ru

Voronezh State University, University square, 1, City Voronezh, 394006, Russian Federation

The question of the existence of a weak solution of n -dimensional nonlinear differential systems with distributed parameters in a netlike connected bounded region of a geometric graph in the one-dimensional case. We introduce the space of feasible solutions and, using a method Faedo-Galerkin, establish the existence of solutions of a class of integrable functions on the net-like region. Given the specificity of the Faedo-Galerkin method for constructing an approximate solution in the form “truncations”, it is shown that every such decision actually belongs to functions with integrable derivatives in the time variable; for the elements of such a space is an analogue of the energy balance equation. The results are the basis of the

analysis of optimal control problems for differential systems with distributed parameters in a net-like area with an interesting analogy with the multiphase fluid dynamics problems.

Let \mathfrak{S} — the open bounded domain of Euclidean space \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), having a netlike structure [1], $\mathfrak{S} = \bigcup_k \mathfrak{S}_k \bigcup_l S_l$ which is indicated through surface S_l separating adjacent areas \mathfrak{S}_k , $\partial\mathfrak{S}$ — border \mathfrak{S} . Place of coupling the adjacent areas \mathfrak{S}_k (nodal place below denoted by ξ) is a union of surfaces $S_l(\xi)$ which equal to the number of adjacent areas: $\xi = \bigcup_l S_l(\xi)$.

For vector-valued function $Y(x, t) = \{y_1(x, t), y_2(x, t), \dots, y_n(x, t)\}$ ($x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$), defined in $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$ ($T < \infty$), consider the system

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = f - \text{grad } p, \quad \text{div } p = 0 \quad (\sum_{i=1}^n \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0), \quad (1)$$

in this case in each node place ξ we have the relations

$$Y|_{S_l^-(\xi)} = Y|_{S_l^+(\xi)}, \quad \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^-}|_{S_l^-(\xi)} + \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^+}|_{S_l^+(\xi)} = 0, \quad (2)$$

called conjugation conditions in the literature (see [2–4].); $S_l^-(\xi)$ and $S_l^+(\xi)$ — are the one-sided surface $S_l(\xi)$, determined by the direction of the normals n_l^-, n_l^+ to the surfaces $S_l^-(\xi)$, $S_l^+(\xi)$. Adding to (1)–(3) the initial and boundary conditions

$$Y(x, 0) = Y_0(x), x \in \mathfrak{S}, \quad Y|_{\partial\mathfrak{S}} = 0, \quad (3)$$

obtain the initial boundary value problem (1)–(4) for finding functions $Y(x, t)$, $p(x, t)$ in a closed area $\overline{\mathfrak{S}}_T$ ($\overline{\mathfrak{S}}_T = (\mathfrak{S} \cup \partial\mathfrak{S}) \times [0, T]$).

We denote $L_2(\mathfrak{S})^n$ as the space of measurable, square-integrable functions (classes) $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ on the field \mathfrak{S} ; scalar product $\mu, \rho \in L_2(\mathfrak{S})^n$ is determined by ratio $(\mu, \rho) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathfrak{S}} \mu_i(x) \rho_i(x) dx$, $\|\mu\| = (\mu, \mu)^{1/2}$. Let $D(\mathfrak{S})^n$ — the space of functions that are infinitely differentiable in the region \mathfrak{S} and having in \mathfrak{S} compact vehicles. Let us $\mathfrak{D}(\mathfrak{S})^n = \{\varphi : \varphi \in D(\mathfrak{S})^n, \text{div } \varphi = 0\}$ and $\mathfrak{D}'(\mathfrak{S})^n$ — dual of the space $\mathfrak{D}(\mathfrak{S})^n$ (here and everywhere below the symbol “ $'$ ” used to denote the dual space). We define the space $\mathcal{H}(\mathfrak{S})$ as the closure of $\mathfrak{D}(\mathfrak{S})^n$ in the norm $L_2(\mathfrak{S})^n$; $\|\mu\|_{\mathcal{H}(\mathfrak{S})} = (\mu, \mu)^{1/2}$, $\mathcal{H}(\mathfrak{S}) = \mathcal{H}(\mathfrak{S})'$.

We introduce the space $\mathcal{H}^1(\mathfrak{S})$ whose elements $\mu \in L_2(\mathfrak{S})^n$ are having a generalized $\frac{\partial \mu}{\partial x} \in L_2(\mathfrak{S})^n$, ie $\frac{\partial \mu}{\partial x_i} \in L_2(\mathfrak{S})$ ($i = \overline{1, n}$); $\|\mu\|_{\mathcal{H}^1(\mathfrak{S})} = (\|\mu\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 + \|\frac{\partial \mu}{\partial x}\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2)^{1/2}$, $(\mu, \rho)_{\mathcal{H}^1(\mathfrak{S})} = (\mu, \rho) + (\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial x})$. Space $V_0^1(\mathfrak{S})$ — closure in the norm $\mathcal{H}^1(\mathfrak{S})$ of the set of elements $\mu \in \mathfrak{D}(\mathfrak{S})^n$ satisfying

$$\sum_l \frac{\partial \mu}{\partial n_l^-(\xi)}|_{S_l^-(\xi)} + \sum_l \frac{\partial \mu}{\partial n_l^+}|_{S_l^+(\xi)} = 0$$

(implementation of the first condition in (2) belonging μ to the class $\mathfrak{D}(\mathfrak{S})^n$ is guaranteed).

We introduce the space functions $u(x, t)$ variables $x, t \in \mathfrak{S}_T$ and will be regarded as a function of the values t in the space of functions from x . Namely, if V —Hilbert space, then the space $L_2(0, T; V)$ of functions (classes) $u : (0, T) \rightarrow V$, measurable with values V in and such that $\|u\|_{L_2(0, T; V)} = (\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt)^{1/2} < \infty$; obvious equality $L_2(\mathfrak{S}_T)^n = L_2(0, T; L_2(\mathfrak{S})^n)$.

Next $W^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ — the space of functions $u(x, t) \in L_2(\mathfrak{S}_T)^n$ having generalized derivatives of the 1st order in x belonging to $L_2(\mathfrak{S}_T)^n$, the norm determined by the ratio $\|u\|_{W^{1,0}(\mathfrak{S}_T)} = (\|u\|_{L_2(\mathfrak{S}_T)^n}^2 + \|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L_2(\mathfrak{S}_T)^n}^2)^{1/2}$; $W^1(\mathfrak{S}_T)$ —space of functions $L_2(\mathfrak{S}_T)^n$ having generalized derivatives of order as from $L_2(\mathfrak{S}_T)^n$, $\|u\|_{W^1(\mathfrak{S}_T)} = (\|u\|_{L_2(\mathfrak{S}_T)^n}^2 + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L_2(\mathfrak{S}_T)^n}^2 + \|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L_2(\mathfrak{S}_T)^n}^2)^{1/2}$. Based on the properties of the traces elements $W^1(\mathfrak{S}_T)$ on each section \mathfrak{S}_T of the plane $t = t_0$ ($t_0 \in [0, T]$) as the elements $L_2(\mathfrak{S})^n$ that are continuous by t in norma $L_2(\mathfrak{S})^n$ [4], define $\Omega_0(\mathfrak{S}_T)$ as a set of functions $u(x, t) \in W^1(\mathfrak{S}_T)$ that belong to the class $V_0^1(\mathfrak{S})$ for a fixed $t \in [0, T]$. The closure $\Omega_0(\mathfrak{S}_T)$ of normally $W^1(\mathfrak{S}_T)$ denoted by $W_0^1(\mathfrak{S}_T)$.

Let next $\widehat{\Omega}_0(\mathfrak{S}_T)$ — the set of all function $u(x, t) \in W^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$, which:

1) have a finite norm

$$\|u\|_{2, \mathfrak{S}_T} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(\mathfrak{S})^n} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\mathfrak{S}_T)^n}; \quad (4)$$

2) have the following defined on the sections of region \mathfrak{S}_T by the plane $t = t_0$ as a function of the class $V_0^1(\mathfrak{S})$;

3) for all $t \in [0, T]$ They belong to the space $V_0^1(\mathfrak{S})$ and continuous in $t \in [0, T]$ in norm space $H^1(\mathfrak{S})$.

The closure of $\widehat{\Omega}_0(\mathfrak{S}_T)$ in norm (4) is denoted by $V_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$; it's clear that $V_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T) \subset W^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$. The space $V_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ is used in the proof of the solvability of problem (1)–(3), $V_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ and $W^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ —are auxiliary.

Let the functions f and Y_0 satisfy the conditions $Y_0(x) \in H(\mathfrak{S})$, $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$ (space $L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$ consists of all elements $L_1(\mathfrak{S}_T)$ with finite norm

$$\|f\|_{L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)} = \left(\int_0^T \int_{\mathfrak{S}} f^2 dx dt \right)^{1/2}; \quad L_2(\mathfrak{S}_T) \subset L_{2,1}(\mathfrak{S}_T).$$

Definition. A weak solution of the boundary value problem (1)–(3) is a pair $\{Y, p\}$. The function $Y(x, t) \in V_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ that satisfies the integral

identity

$$\begin{aligned} (Y(x, t), \eta(x, t)) - \int_{\mathfrak{S}_t} Y(x, \tau) \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int_0^t \rho(Y, \eta) d\tau + \int_0^t \rho(Y, Y, \eta) d\tau = \\ = (Y_0(x), \eta(x, 0)) + \int_{\mathfrak{S}_t} f(x, \tau) \eta(x, \tau) dx d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

for any $t \in [0, T]$ and any $\eta(x, t) \in W_0^1(\mathfrak{S}_T)$, and the function $p(x, t)$ belongs to the class $\mathfrak{D}'(\mathfrak{S}_T)^n$. Here $\mathfrak{D}'(\mathfrak{S}_T)^n$ the dual space to the space $\mathfrak{D}(\mathfrak{S}_T)^n$, elements $\mathfrak{D}(\mathfrak{S}_T)^n$ are infinitely differentiable in \mathfrak{S}_T functions a compact support from \mathfrak{S}_T (refer to analogous spaces $\mathfrak{D}(\mathfrak{S})^n$ and $\mathfrak{D}'(\mathfrak{S})^n$).

Note 1. Despite the apparent precision, the definition of the solution of problem (1)–(3) (ie couples $\{Y, p\}$) contains a distinct feature of the (ambiguous) generated by the variational formulation (5) of this problem, which “excludes” function $p(x, t)$: there is no information about the function $p(x, t)$ only the relation (5), therefore the search for a function with sufficient accuracy to class, namely $p(x, t) \in \mathfrak{D}'(\mathfrak{S}_T)^n$. In applications this is an acceptable condition for guaranteeing the non-zero fluid dynamics in the region \mathfrak{S}_T (in many application situations $p(x, t)$ — a priori given function). In connection with the above, In the following discussion will be spoken about function $Y(x, t)$ as a “solving” of the problem (1)–(3) the existence of the function $p(x, t)$ and its membership in the class $\mathfrak{D}'(\mathfrak{S}_T)^n$ is a direct consequence of the existence of $Y(x, t)$ of the class $V_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.

Theorem. *There is at least one weak solution of the boundary value problem (1)–(3) for an arbitrary (finite) $T > 0$.*

To prove it is using the Faedo-Galerkin method with a special basis in $V_0^1(\mathfrak{S})$, which is the system of generalized eigenfunctions $\{U_i(x)\}_{i \geq 1} \subset V_0^1(\mathfrak{S})$ of the problem $-\nu \Delta U = \lambda U$, $U|_{\partial \mathfrak{S}} = 0$ in the region \mathfrak{S} , similar to that on the graph Γ [2, 3].

Namely, the problem of determining the set of numbers λ , each of which corresponds to at least one non-trivial solution $U(x) \in V_0^1(\mathfrak{S})$, satisfying the identity $\nu((U, \eta)) = \lambda(U, \eta)$ for any function $\eta(x) \in V_0^1(\mathfrak{S})$ where $((U, \eta)) = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial \eta}{\partial x_i})_{L_2(\mathfrak{S})^n}$. Approximations $Y_m(x, t)$ ($m = 1, 2, \dots$) of the solution are sought in the form of “truncations”

$$Y_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{i,m}(t) U_i(x)$$

(scalar functions $g_{i,m}(t)$ are absolutely continuous on $[0, T]$). Further arguments, using a priori estimates for the norms of functions $Y_m(x, t)$ in terms of the norm of the original data of the problem (1)–(3) in the appropriate spaces, leading to the construction of subsequence $\{Y_{m_k}\}_{k \geq 1}$ of

sequence $\{Y_m\}_{m \geq 1}$ that is weakly convergent to the solution $Y(x, t)$ of the problem (1)–(3).

Note 2. The proof contains more profound statement concerning the weak solutions $Y(x, t)$: the function $Y(x, t)$ has a derivative $\frac{\partial Y(x, t)}{\partial t}$ of class $L_2(0, T; V_0^1(\mathfrak{I}))$ in variable t , due to representation of elements $Y_{m_k}(x, t)$ of the subsequence $\{Y_{m_k}\}_{k \geq 1}$.

Note 3. Note that remain when $n = 1$ all the results are valid (see [5–7]). The net-like region \mathfrak{I} is geometric graph Γ in each internal node ξ of which the ratio (2) transforms into Kirchhoff type matching conditions

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial Y(1, t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial Y(0, t)_\gamma}{\partial x},$$

$Y : \Gamma_T = \Gamma \times (0, T) \rightarrow V_0^1(\Gamma_T)$ ($V_0^1(\Gamma_T)$ — analogue of space $V_0^1(\mathfrak{I}_T)$ for the graph Γ), Y_γ — restriction of the function Y on edge γ , $a(x)$ — fixed measurable bounded function on the Γ for which it makes sense the harmonize conditions, $R(\xi)$ and $r(\xi)$ a plurality of ribs — oriented “to the node ξ ” and “from the node ξ ”, respectively (all edges of the graph are parameterized by segment $[0, 1]$).

References

- [1] Volkova A.S., Gnilitskaya Yu.A., Provotorov V.V., “On the solvability of boundary-value problems for parabolic and hyperbolic equations on geometrical graphs”, *Automation and Remote Control*, 75, No. 2, 405-412 (2014).
- [2] Provotorov V.V. “Eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on a star graph”, *Sbornik: Mathematics*, 199, No. 10, 1523-1545 (2008).
- [3] Provotorov V.V. “Boundary control of a parabolic system with distributed parameters on a graph in the class of summable functions”, *Automation and Remote Control*, 76, No. 2, 318-322 (2015).
- [4] Podvalny S.L., Provotorov V.V. “The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, 75, No. 2, 117-119 (2015).
- [5] Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A. “Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time delay”, *WSEAS Transactions on Systems and Control*, No. 9, 388-397 (2014).
- [6] Provotorov V.V. “Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph”, *International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, 126-128 (2015).
- [7] Kamachkin A.M., Yevstafyeva V.V. “Oscillations in a relay control system at an external disturbance” *Control Applications of Optimization Proceedings of the 11th IFAC Workshop*, No. 2, 459-462 (2000).

Projection-Approximation-based Quasi-Newton method for Nonsmooth Convex Optimization

Senov A.

alexander.senov@gmail.com

Saint Petersburg State University, Universitetskiy pr., 35, Saint Petersburg,
198504, Russia

Introduction. In recent years, many authors have considered various forms of quasi-Newton methods for nonsmooth optimization problem [1, 2, 3]. Many quasi-Newton optimization methods require to construct and store an approximation of Hessian matrix or its inverse to take function curvature into account, thus imposing high computational and memory requirements. We propose a new quasi-Newton method based on consecutive projection-approximation-reconstruction. The idea of the method is to approximate function Hessian matrix in low-dimensional space using appropriate projection and then reconstruct it back to original space to multiply its inverse on gradient vector for the next estimate calculation. Exploiting Hessian rank deficiency in a special way it does not require to store Hessian matrix or its inverse thus reducing memory requirements. This method keeping track of last m points and appropriate function and subgradients values at each iteration, projecting these points into low-dimensional space spanned on right singular vectors of subgradients, constructing second-order function approximation in this low-dimensional space and estimating Hessian matrix in original high-dimensional space based on low-dimensional approximation curvature.

Related work. Quadratic approximation of objective function implicitly used in any quasi-Newton method. It might also be considered as type of quadratic response surface methodology [4] or, in general, surrogate optimization [5].

Regarding projection idea, there is a number of works which use it, but in slightly different way. E.g., in [6] authors proposed SFO method which stores gradient and estimates steps vectors projected into low-dimensional space spanned on last m gradient and estimate vectors. In [7] authors propose a RadaGrad optimization method which approximates AdaGrad method by constructing a special projection for reducing dimensionality of gradient vector, thus simplifying computation of its outer product matrix and its inverse. In fact, both BFGS and L-BFGS use low-rank Hessian matrix updates thus might be interpreted as implicit projection.

Algorithm description. Quasi-Newton methods for nonsmooth functions optimization estimate direction of next points search at step t as:

$$\Delta \mathbf{x}_{t+1} = -\hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \mathbf{g}_t,$$

where $\hat{\mathbf{H}}_t$ is a Hessian estimate and at step t and \mathbf{g}_t is a subgradient of f at point \mathbf{x}_t . Having $\hat{\mathbf{H}}_t$ a line search is performed along this direction to obtain step length, by solving a one-dimensional optimization problem. The only difference between different quasi-Newton is in how the matrix $\hat{\mathbf{H}}_t$ estimated. The proposed method use the following steps for Hessian estimation:

0. Fix $m \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, q < d$. Assume that at step $t > m$ we have:
 - $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ — matrix, whose columns are last points: $\mathbf{X}_{m,:} = \mathbf{x}_t, \mathbf{X}_{m-1,:} = \mathbf{x}_{t-1}, \dots$
 - $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ — matrix, whose columns are last subgradients: $\mathbf{G}_{m,:} = \mathbf{g}_t, \mathbf{G}_{m-1,:} = \mathbf{g}_{t-1}, \dots$
 - $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ — vector of last function values: $\mathbf{y}_m = f(\mathbf{x}_t), \mathbf{y}_{m-1} = f(\mathbf{x}_{t-1}), \dots$
1. We calculate orthogonal projection matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{d \times q}$ as first q right singular vectors of matrix \mathbf{G} :

$$\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{P} = \text{svd}(\mathbf{G}, q)$$

2. Using projection matrix \mathbf{P} we calculate \mathbf{Z} — projection of \mathbf{X} onto singular vectors subspace:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{P}^\top$$

3. We estimate Hessian matrix $\hat{\mathbf{A}}$ in low-dimensional space \mathbb{R}^q by approximating points $\{\mathbf{Z}_{i,:}, \mathbf{y}_i\}_{i=1}^m$ in low-dimensional space via quadratic least squares method:

$$\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{c} = \arg \min_{\mathbf{A}, \mathbf{b}, c} \sum_{i=1}^m (\mathbf{Z}_{i,:} \mathbf{A} \mathbf{Z}_{i,:}^\top + \mathbf{Z}_{i,:} \mathbf{b} + c - \mathbf{y}_i)^2$$

4. Finally, we calculate new step direction by multiplying Moore-Penrose pseudoinverse of $\hat{\mathbf{A}}$ “backward projection” into original space \mathbb{R}^d on gradient vector and taking negative sign:

$$\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{P}^\top \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{P}^\top \mathbf{P} \mathbf{g}_t$$

One can note that this procedure is applicable *after* m iterations. Thus, at first m iterations subgradient method used to for step direction calculation. Theoretical motivation behind this algorithm is presented in next section

Theoretical motivation. Consider function $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + c$, where $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{A} \succ 0$, orthogonal projection matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{q \times d}$, $q < d$. Define $\mathbf{z} = \mathbf{Px}$, $\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}^\top \mathbf{P})\mathbf{x}$ and $g(\mathbf{z} \mid \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{P}^\top \mathbf{x} + \mathbf{v})$. Consider specific “backward projection”: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{P}^\top \mathbf{z}$. Assume that $\hat{\mathbf{z}} = \arg \min g = -\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ is known.

Then,

1. $\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{P}^\top \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} == -\mathbf{P}^\top \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}^\top \mathbf{P}\mathbf{b}$.
2. $\|\arg \min f - \hat{\mathbf{x}}\|_2 = \|(\mathbf{I} - \mathbf{P}^\top \mathbf{P})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|_2$.

This proposition implies that difference between the optimum point and obtained estimate lies in kernel of orthogonal projection \mathbf{P} . Hence, estimate $\hat{\mathbf{x}}$ is a best estimate in terms of this projection.

References

- [1] Yu, J., Vishwanathan, S.V.N., Gunter, S., Schraudolph, N. N., “A Quasi-Newton Approach to Nonsmooth Convex Optimization Problems in Machine Learning”, *Journal of Machine Learning Research*, 11, 1145–1200 (2010).
- [2] Lewis, A.S., Overton, M.L., “Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods”, *Mathematical Programming*, Ser. A, 135–146 (2013).
- [3] Sun, D., Han, J., “Newton and Quasi-Newton Methods for a Class of Nonsmooth Equations and Related Problems”, *SIAM Journal on Optimization*, 7, No. 2, 463–480 (2006).
- [4] Box, G.E., Draper, N.R., et al, *Empirical model-building and response surfaces*, John Wiley & Sons, New York (1987).
- [5] Forrester, A., Keane, A., “Recent advances in surrogate-based optimization”, *Progress in Aerospace Sciences*, 45, No. 1, 50–79 (2009).
- [6] Sohl-dickstein, J., Poole, B. and Ganguli, S., “Fast large-scale optimization by unifying stochastic gradient and quasi-Newton methods”, *In Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning*, 604–612 (2014).
- [7] Krummenacher, G., McWilliams, B., “RADAGRAD: Random Projections for Adaptive Stochastic Optimization”, *7th NIPS Workshop on Optimization for Machine Learning* (2014).

Optimizing Time and Fuel Consumption for the Transoceanic Routes of Ships

Sotnikova M., Veremey E., Korovkin M.

m.sotnikova@spbu.ru, e.veremey@spbu.ru, m.korovkin@spbu.ru

Saint-Petersburg State University, Universitetskii prospekt 35, Peterhof,
Saint-Petersburg, 198504, Russia

This paper is devoted to problem of optimal weather routing for a long-term ship voyages. The goal of optimization is to reduce travelling time

and fuel consumptions. Especially it plays very important role for long-term voyages, where travelling time reaches several days and fuel consumptions reaches several tons. Often route selection is performed by navigator using available maps, weather forecast data and practical experience. Of course, such approach can not provide optimal solution which takes into account a lot of factors influencing ship motion. Another way for route finding is the mathematical formalization and solution of a proper optimization problem.

The optimal route must belong to the admissible set, which comprises static and dynamic constraints. The static constraints are represented mostly by coastal lines and shallow waters. The dynamic constraints are time-varying alarm zones, restricted for ship motion due to dangerous weather conditions. The route optimization procedure can use long-term weather forecast and a mathematical model of a longitudinal ship motion as an initial data. In addition, weather routing algorithm should provide quasi-optimal solution with a limited computational time. This is because the weather forecast is changes periodically and more accurate data are usually available within a few hours.

Currently, a number of methods for optimal weather routing are known. In particular, the isochrones method [1], [2]. The recent publications concerning this approach are represented, for instance, by papers [3], [4]. The significant drawback of this approach is its high computational complexity in a case when a lot of constraints are taken into account. This demands simplifications for possibility of practical implementation. Another approach is related with a classical calculus of variations [5]. But in practice, it can be used only for a case of quite simple mathematical model of ship dynamics and without constraints.

Let consider shortly the optimization problem statement. The pair of the vectors (\mathbf{r}, \mathbf{v}) uniquely define ship route, where $\mathbf{r} = \{(\varphi_1, S_1), (\varphi_2, S_2), \dots, (\varphi_p, S_p)\}$, $\mathbf{v} = (V_1, V_2, \dots, V_p)$. Here φ_i , S_i , V_i , $i = \overline{1, P}$ represent heading angle, length and given velocity on the leg i correspondently, p is a number of legs. The mathematical model of a straightforward ship motion is represented by differential equation

$$\dot{w} = f(t, w, n(V), P_{curr}, P_{wave}, P_{wind}). \quad (1)$$

Here w is an actual speed, n is the rpm number of screw, V is a given speed, $P_{curr} = P_{curr}(t, \psi, \lambda)$, $P_{wave} = P_{wave}(t, \psi, \lambda)$, $P_{wind} = P_{wind}(t, \psi, \lambda)$ represent external forces, which are available from weather forecast, ψ and λ are latitude and longitude. So, equation (1) allows us to predict how external forces influence ship's velocity.

To characterize the quality of a specific route two different cost functions are considered. The first one is a voyage time $J_T = J_T(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ and the

second — presents fuel consumptions $J_F = J_F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. The algorithms for computation of voyage time and fuel consumption for a specified route (\mathbf{r}, \mathbf{v}) are proposed. Taking together all of the mentioned early constraints, let us consider admissible set of ship routes Ω . As a result, we can formalize the problem of optimal weather routing as the following optimization problem:

$$J_T(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \rightarrow \min_{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \Omega \subset \mathbb{E}^{3P}} \quad (2)$$

in the case of voyage time minimization, or

$$J_F(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \rightarrow \min_{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \Omega \subset \mathbb{E}^{3P}} \quad (3)$$

in the case of fuel consumption minimization. The solution of optimization problems (2) and (3) can be obtained using different nonlinear programming numerical methods, for instance SQP-method or simplex method. Nevertheless, the direct using of optimization approaches is practically impossible for considered problems. In general case, this is due to essentially nonlinear, discontinuous, and high-dimensional objective function and constraints. Hence, the local minima and a huge computational time makes impossible to use such direct approach.

In this paper the algorithm for optimal weather routing is proposed. The key feature of this algorithm is the three-dimensional representation of the route and all of the constraints imposed. Such representation allows transforming initial task to the problem of searching a path, connecting given point and a point, which belong to a given line. The proposed approach consists of two following steps. Firstly, the special graph is constructed and the problem of optimal path finding on this graph is considered. After this step, we obtain the approximate solution of the initial optimization problems (11), (12). At the second step, this solution is improved locally, in the vicinity of the initial variant.

Let consider the main aspects of the proposed algorithm. In order to represent route (\mathbf{r}, \mathbf{v}) in three-dimensional space we introduce frame $O\psi\lambda t$, where $O\psi\lambda$ is the plane of ship motion and Ot is a time axis. Then each of the static constraint is represented in 3D space by a cylindrical surface with the forming line parallel to the time axis. Each alarm zone can be represented in 3D space by a set of points limited by cylindrical surface with the forming line parallel to the time axis and couple of planes, which are parallel to the plane of ship motion. So, each of the static and dynamic constraint can be represented in 3D space by corresponding set of points, which can be interpreted further as an obstacle in the range of path finding problem.

After that, we create a grid in 3D space with the nodes, which coordinates are varied on the following segments:

$$\psi \in [\psi_0, \psi_1], \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1], t \in [t_0, T_1].$$

Here $A(\psi_0, \lambda_0)$ and $B(\psi_1, \lambda_1)$ are initial and final points of trajectory correspondently, t_0 is the departure time and T_1 is the upper limit for arrival time. For each variable we choose a step of the grid: $\Delta\psi_s$, $\Delta\lambda_s$ and Δt_s . Now, let us consider a line in three-dimensional space

$$\psi = \psi_1, \lambda = \lambda_1. \quad (4)$$

Notice that the final point of the route is not fixed, but it must belong to this line. In addition, in a case of time minimization, this point must have minimal possible value on time axis.

We will represent a route in 3D space as a broken line (polyline), which nodes are coincide with the vertexes of the created grid. As a result, the problem of time minimization can be treated as a task of path finding in three-dimensional space. This path must connect origin O of the frame (this one corresponds to departure point A) with the point B' (corresponding to arrival point B) lying on the line (4) and having a minimum achieved value on the time axis. The path must avoid all of the three-dimensional sets representing static and dynamic constraints. Besides that, the velocity at each leg must satisfy the imposed limits.

In order to find a solution to this problem, let create a special graph. The nodes of this graph coincide with the vertexes of the constructed grid. However, we delete all nodes, which belong to a three-dimensional sets corresponding to the static and dynamic constraints, and all unachievable nodes due to velocities constraints.

Then, we connect by edges only those nodes, which are placed in the neighboring planes and taking into account speed constraints. Moreover, let connect only those nodes, which satisfy condition: the segment with the ends at the considered points do not intersect and do not lying inside any of the three-dimensional sets, representing static or dynamic constraints.

In the case of problem (2), each edge is assigned a weight equal to the travel time between nodes. Also, this weight can be equal to the fuel consumption for a given leg. The resulting graph is oriented, because the motion along each edge is possible only in the direction of time increasing.

In order to find time optimal route, we take the origin O as an initial point and point B' , lying on the line (4), as a final point. At the first iteration, the point B' is selected with a minimal possible coordinate on the time axis Ot . Then, the problem of shortest path finding is solved for pair of points O and

B' . If there is no admissible path connecting given points then the new point B' is considered with the increased last coordinate value.

As a result, after several described iterations, we obtain a quasi-optimal route (\mathbf{r}, \mathbf{v}) , which minimize the voyage time. This initial approximation can be improved by two different ways:

- a) optimization of given velocities distribution along the route (\mathbf{r}, \mathbf{v}) ;
- b) design a finite bunch of admissible trajectories around the quasi-optimal route and perform local optimization.

Both variants of route improvement do not demand a lot of computational time consumptions and can be easily implemented in real-time.

Now let consider a problem (3) of fuel optimal route computation. Next, depending on the initial optimization problem formulation, two possible variants of its solution are proposed.

1) It is necessary to minimize the fuel consumptions with the additional constraint on the voyage time $t \leq t_{max}$. In this case, we move a final point B' on the line (4) starting from the value t_{min} and upto the value t_{max} . At each iteration of algorithm the shortest path on this graph is computed. If such path exists, then the algorithm is terminated. In other case, the point B' is moved and the whole procedure is repeated again.

2) It is necessary to build a minimal time route with a limited fuel consumptions. In this case, we also move a final point B' on the line (4). The algorithm is terminated if for the particular pair of departure and arrival points the fuel consumption is less than the specified value. If there is no route satisfying fuel constraint, then the route with a minimal fuel consumptions is accepted as a result.

In both cases, obtained quasi-optimal route can be improved using procedure described above. The performance of a proposed algorithm is illustrated by practical examples for container ship.

References

- [1] R.W. James, *Application of wave forecast to marine navigation*, Washington, D. C.: US Navy Hydrographic Office, 78 p., (1957).
- [2] H. Hagiwara, *Weather routing of (sail-assisted) motor vessels*: PhD Thesis. Delft: Technical University of Delft, 337 p., (1989).
- [3] J. Zhang, L. Huang, "Optimal Ship Weather Routing Using Isochrone Method on the Basis of Weather Changes", *International Conference on Transportation Engineering*, pp. 2650-2655, (2007).
- [4] Y. Lin, M. Fang, "The ship-routing optimization based on the three-dimensional modified isochrone method". *Proc. of the ASME 2013 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, OMAE2013-10959, (2013).

- [5] S. J. Bijlsma, "A Computational Method for the Solution of Optimal Control Problems in Ship Routing", *Navigation. Journal of The Institute of Navigation*, Vol. 48, pp. 145-154, (2001).

Ship Weather Routing That Accounts for Ship Stability and Efficient Ship Routing Based on Modified Genetic Algorithm

Wang Ya., Wang H., Zhu X.

442343943@qq.com, 929047860@qq.com, 845462672@qq.com

State Key Laboratory on Integrated Optoelectronics, College of Electronic Science
School of JiLin University, Changchun, Jilin Province, 130012, China

The operation schedule of an oceangoing ship is influenced by wave and wind disturbances, and is therefore weather routing. The mathematical model of this method is based on the grid system, combined with modified genetic algorithms to determine a safe and time-saving route for ships. Nowdays most of the worlds trade is carried by ship, so the safety and economy of the ships route are of considerable concern to the ocean transport companies. Through the loaded meteorological information, to find a safe and economic route is vital for ship sailing. Because in the voyage of the ship waves have the maximum impact on ships velocity, only considering the wave direction and significant height of combined waves and swell in this paper. Meteorological data are loaded from ECMWF which is an international organization that includes 24 EU member states. Because it is vital to calculate the ships speed in ocean, to load the significant height of combined waves and swell and the wave direction. Because the ships safety should be consider seriously in ocean, when the wave height is higher than 4 meters the areas are set up not navigable. The sea areas studied are divided into 1*1 degrees latitude-longitude line and 2806 points. The point-to-point connection forms the route of the ship's voyage. The ship has eight sailing directions at each point, which are the north angle of 0 degrees, 45 degrees, 90 degrees, 135 degrees, 180 degrees, 225 degrees, 270 degrees, 315 degrees. The weights which should be calculated are the time of the point-to-point voyage. The weights are expressed as: $T=L/V$. L is the distance between the point and the point of navigation. When the ship is sailing through the nodes, the wave height and the wave direction hindering the ships speed. The ships actual speed V of navigation is calculated by the empirical formula proposed by R.W. James. The formula is expressed as follow: $V=V_0C[1+2*\cos(-)]^*H$. Where the angle gives the ships course and is the wave direction. The V_0 is the ship sailing speed in the still water and the H is the wave height. In this study, 300 chromosomes are used for genetic manipulation to find the optimal path

and using the real number coding to initialize the chromosomes. Firstly 2806 points are numbered in the study area from bottom to top from left to right . Creating a Cartesian coordinate system with (0 N, 120 E) as the origin of the coordinate. Then numbering each point by the formula as follow: $N=y+46*x$. The x is the value of the abscissa , y is the ordinate and N is the real number that will be used. In this study setting (20N, 125E) as the starting point, and (45N,148E) as the end point. From the starting point the ship has 8 sailing directions heading for the next point until it reaches the specified end of the voyage. By this means initializing the chromosomes with a string of real strings. The selection of individual fitness function directly affects the convergence speed of genetic algorithm. The fitness function is calculated as follow:Fitness=1/sum. Sum is the sum of the weights of adjacent real numbers in each chromosome. In the traditional genetic algorithm, most of the selection operators are roulette selection method. Although the use of roulette selection is simple and practical it has some problems that should be solved. First of all, in the beginning of the genetic algorithm, there may be a high degree of fitness of the individual, and then the probability of this individual is selected will be very large. This method will choose to copy a considerable number of individuals which will result in the loss of diversity and hardly searching global optimal solution. At the almost end of the genetic algorithm phase, the fitness of each individual is very similar causing that roulette selection is useless. In this paper, the author proposes a modified selection as follow: First, all the individuals are sorted by the bubble sorting method and then eliminate the individuals whose fitness ranked 1/6 after. After that making two copies of the individuals whose fitness ranked before 1/6 and selecting these individuals to enter the next generation. The remaining 2/3 individuals all are inherited to the next generation. When using this modified selection operator for genetic manipulation, there are several advantages as follow:(1) The individuals with very low fitness are directly eliminated, so that these individuals do not have the opportunity to enter the next generation and to improve convergence speed.(2) The individuals with better adaptability in the population can be increased rapidly, which makes the algorithm more efficient and practical.(3) Overcoming the shortcoming of the local convergence of the algorithm, and achieving global search to find the optimal solution. Selecting two parent individuals randomly and when the crossover probability satisfies the condition checking whether there are intersecting points between the two parental individuals. If there are intersecting points between the two parental individuals, the path exchanges after the intersection of two parent individual intersections. The mutation operator is considered to be the most effective method to get rid of the local convergence of genetic algorithm. When a chromosome mutation probability

satisfies the condition, one of the genes in the chromosome is mutated. Nowdays ship as the main shipping tool at sea, with the scientific progress, ship's weather routing becomes more and more important. Because the genetic algorithm has the advantages of strong robustness and good flexibility, using genetic algorithm to achieve the goal of weather routing is available. In this study, using a modified selection proposed by author to achieve the goal of weather routing based on modified genetic algorithm and finding a optimal path. By using the modify genetic algorithm, finding the optimal route more quickly and precisely.

References

- [1] Holland J H, "Genetic Algorithms and the Optimal Allocations of Trials", SIAM Journal of Computing, 2(2):88-105(1975).
- [2] Panigrahi J.K , Misra S.K, "Application of Oceansat-1 MSMR analysed winds to marine navigation", International Journal of Remote Sensing, Vol. 31, No. 10, p. 2623-2627(2010).
- [3] Michalewicz Z.A, "Modified Genetic Algorithm for Optimal Control Problems", Computation Math Application, 23(12):83-94(1992).
- [4] Hanssen G L ,James R W, "Optimum Ship Routing[J]. Journal of Navigation", 13(3):253-272(1960).
- [5] Haltiner G J , Hamilton H D, 'Arnason, G, "Minimal-Time Ship Routing", Journal of Applied Meteorology, 1(1):1-7(1962).
- [6] Panigrahi J K, Padhy C P, Sen D, et al. "Optimal ship tracking on a navigation route between two ports: a hydrodynamics approach[J]". Journal of Marine Science and Technology, 17(1):59-67 (2012).
- [7] Zhang Y S, Lu D Q, Cai F. "Comparison of Several Stall Calculation Methods", in Chinese [J]. Navigation Technology, (1): 7-9 (2005).
- [8] Maki A, Akimoto Y, Nagata Y. "A new weather-routing system that accounts for ship stability based on a real-coded genetic algorithm[J]". Journal of Marine Science and Technology, 16(3):311-322 (2011).
- [9] Fang M C, Lin Y H. "The optimization of ship weather-routing algorithm based on the composite influence of multi-dynamic elements "(II): Optimized routings[J]. Applied Ocean Research, 50:130-140 (2015).
- [10] Eshelman LJ, "Real-coded genetic algorithms and intervalschemata", In: Whitley LD (ed) Proceedings of the Second Workshop on Foundations of Genetic Algorithms, Vail, Colorado, USA, July 26-29 ,Morgan Kaufmann, Burlington, pp 187-200((1993)).
- [11] France WN, Levadou M,Treakle TW, Paulling JR,Michel RK, Moore C , "An investigation of head-sea parametric rolling and its influence on container lashing systems", Mar Technol 40:1-19(2003).

- [12] Hashimoto H ,Umeda N ,Ogawa Y, “Prediction methods for parametric rolling with forward velocity and their validation” Final Report of the SCAPE Committee (Part 2)”, In: Proc 6th Osaka Colloquium on Seakeeping and Stability of Ships, Osaka, Japan, 26-28 March, pp 265-275(2008).
- [13] Takashima K, Hagiwara H, Shoji R, “Fuel saving by weather routing simulation using actual voyage data of the container ship”, Jpn Inst Navig 111:259-266(2004).
- [14] Tsou M C , Cheng H C, “An Ant Colony Algorithm for efficient ship routing[J]”, Polish Maritime Research, 20(3):28-38(2013).

Characteristics Optimization for Accelerator Driven Cascade Subcritical Reactor

Головкина А.Г., Кудинович И.В.

a.golovkina@spbu.ru, i.kudinovich@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб.
7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия; ФГУП «Крыловский государственный
научный центр», Московское шоссе, 44, Санкт-Петербург, 199034, Россия

Оптимизация характеристик каскадного подкритического реактора, управляемого ускорителем

В работе рассматривается задача оптимизации характеристик бланкета электроядерной установки с каскадной активной зоной с целью получения максимальной мощности реактора при заданном эффективном коэффициенте размножения $k_{\text{эфф}}$, допустимом удельном энерговыделении и интенсивности внешнего источника.

Электроядерная установка (ЭЛЯУ) состоит из ускорителя заряженных частиц, подкритического ядерного реактора и генерирующей нейтроны мишени. В основе работы данной установки лежит электроядерный метод генерации нейтронов [1, 2], который заключается в производстве нейтронов при взаимодействии пучка высоконергетических заряженных частиц с ядрами мишени из тяжелых элементов

Реакторную систему можно назвать секционной, если ее активная зона состоит из частей, либо отличающихся друг от друга по материальному составу, либо разделенных пространственно. Секционные системы с односторонней или преимущественно односторонней связью секций (нейтроны одной секции влияют на процессы в другой, а нейтроны другой секции на процессы в первой не влияют) называют каскадными [3].

Преимущество использования каскадной схемы активной зоны в электроядерных установках связано прежде всего с тем, что данный подход позволяет снизить требования к интенсивности внешнего источника нейтронов за счет усиления мощности энерговыделений в активной зоне ре-

актора. Кроме того каскадная схема может быть эффективно использована в трансмутационных установках [4], основной особенностью которых является наличие в активной зоне и топливных, и трансмутируемых элементов.

Максимального усиления мощности энерговыделений в активной зоне можно достичь при оптимальном соотношении основных параметров каскадного бланкета, таких как размножающие свойства и геометрия каждой из секций [5, 6]. Таким образом, можно сформулировать задачу оптимизации функционала

$$Q = \sum_{i=0}^N Q_i = \sum_{i=0}^N \left\langle \mathbf{M}_{\text{ff}} \tilde{F} \right\rangle, \quad (1)$$

где \mathbf{M}_{ff} — линейный оператор делений в i -ой секции, вид которого определяется используемой в задаче моделью переноса нейтронов, $\tilde{F}(\mathbf{r}, E, \Omega)$ — поток нейтронов, получающийся при решении стационарной задачи переноса нейтронов. При следующих ограничениях: максимальное удельное энерговыделение $q_v(\mathbf{r}) \sim \int \int_{\Omega E} \mathbf{M}_{\text{ff}} \tilde{F}(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega dE$ меньше допустимого значения, а коэффициент размножения и интенсивность внешнего источника нейтронов принимают заданные значения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Барашенков В.С., “Ядерно-физические аспекты электроядерного метода”, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 9, No. 5, 875–906 (1978).
- [2] Кудинович И.В., Овсянников Д.А., Свищунов Ю.В., Головкина А.Г. “Электроядерные технологии и ядерная энергетика”, ВВМ, (2014).
- [3] Колесов В.Ф. *Электроядерные установки и проблемы ядерной энергетики*, ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (2013).
- [4] Kolesov V.F., Guzhovskii B.Y. “Increase of the efficiency of an electronuclear transmutation system due to a multisectioinal blanket structure”, *Atomic Energy*, 76, No. 2, 71–77 (1994).
- [5] Golovkina A.G., Kudinovich I.V., Ovsyannikov D.A., Bogdanov A.A. “Power plant based on subcritical reactor and proton linac”, *Proc. 5th International Particle Accelerator Conference*, Dresden, Germany, 2224–2226 (2014).
- [6] Golovkina A., Kudinovich I., Svistunov Y. “The problem of ADS power-level maintenance”, *Cybernetics and Physics*, 5, No. 2, 52–58 (2016).

**Complementarity Problem for Decision-Making Modeling
in Transport Problems**

Зыкина А.В., Канева О.Н.

avzykina@mail.ru

Омский государственный технический университет, Мира, 11, Омск, 644050,
Россия

**Задача дополнительности для моделирования
принятия решений в транспортных задачах**

В работе предлагается новая конструкция двухэтапной задачи стохастического программирования для транспортной задачи. Трудности, с которыми связано решение двухэтапных задач, в значительной степени определяются необходимостью выбора такого оптимального предварительного плана исходной задачи, который гарантировал бы существование компенсации невязок при всех реализациях параметров неопределенности [1]. Задача дополнительности, используемая для конструирования задачи второго этапа, обеспечивает разрешимость задачи при всех реализациях параметров неопределенности.

Для классической транспортной задачи: минимизировать суммарные затраты

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

на заданные объемы перевозок однородного продукта

$$X = \{x_{ij}\}, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

при ограничениях на запасы $a_i, i = 1, \dots, m$:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (3)$$

и при ограничениях на выполнение спроса $b_j, j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (4)$$

рассмотрим следующую стохастическую постановку. Пусть спрос $b = b(\omega)$ и стоимость транспортировки продукта $C = C(\omega)$ – случайные величины. Обозначим через $\tilde{b}_j, j = 1, \dots, n$, некоторую реализацию случайной величины b_j , через $\tilde{x} = \tilde{x}_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, – удовлетворяющий детерминированным условиям (3) план перевозок (2). Тогда возможны

два случая выбора плана компенсации из условий, определяемых линейной задачей дополнительности.

Случай 1. Для некоторых $j \in J^+, J^+ \subseteq \{1, \dots, n\}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^m \tilde{x}_{ij} < \tilde{b}_j. \quad (5)$$

Условие (5) означает, что в пункте $j \in J^+$ спрос не будет удовлетворен.

Случай 2. Для некоторых $j \in J^-, J^- \subseteq \{1, \dots, n\}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^m \tilde{x}_{ij} > \tilde{b}_j. \quad (6)$$

Условие (6) означает, что в пункте $j \in J^-$ возникает необходимость хранения избыточного продукта.

Невязки $g_j(\omega, \tilde{x}) = \tilde{b}_j - \sum_{i=1}^m \tilde{x}_{ij}$, $j \in J^+$, и $g_j(\omega, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^m \tilde{x}_{ij} - \tilde{b}_j$, $j \in J^-$, которые могут возникнуть в случаях (5) и (6), соответственно, будем компенсировать с помощью вектора коррекции (плана-компенсации) $y = y(\omega, \tilde{x})$, который вычисляется из следующих соотношений:

$$B(\omega)y \geq g(\omega, \tilde{x}), \quad y \geq 0, \quad (7)$$

$$yB(\omega)y = y(g(\omega, \tilde{x})). \quad (8)$$

При фиксированных \tilde{x} и ω задача (7), (8) является линейной задачей дополнительности относительно переменных y с квадратной матрицей $B = B(\omega)$ и правой частью $q = g(\omega, \tilde{x})$. Штраф за реализацию плана-компенсации y зададим в виде функции $\psi(\omega, x, y)$. В этом случае получаем следующую постановку двухэтапной задачи стохастического программирования для транспортной задачи:

$$\min_x M_\omega \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \min_y \psi(\omega, x, y) \right\} \quad (9)$$

при условиях (2), (3), (7), (8). Задача второго этапа при принятом плане \tilde{x} и известном значении ω состоит в минимизации затрат $\psi(\omega, \tilde{x}, y)$ при условиях (7), (8).

Если штрафная функция за реализацию плана-компенсации y задается в виде $\psi(\omega, x, y) = y(g(\omega, x))$, то условия (8) в двухэтапной задаче опускаются и задача второго этапа при принятом плане \tilde{x} и известном значении ω состоит в минимизации затрат $y(g(\omega, \tilde{x}))$ при условиях (7).

Конструкция дополнительности (7), (8) для задачи второго этапа обеспечивает разрешимость задачи при положительной полуопределенности матрицы $B = B(\omega)$, при положительной определенности матрицы

$B = B(\omega)$ существует единственное решение $y = y(\omega, \tilde{x})$ при всех реализациях \tilde{x} и ω .

Если неравенства в (7) понимать покоординатно как сопряженные неравенства, то условие (8) является аналогом классических условий дополняющей нежесткости: в каждой паре сопряженных неравенств имеется хотя бы одно равенство. Такой подход можно интерпретировать как расширение классического понятия двойственности на транспортную задачу стохастического программирования. Для задачи математического программирования в детерминированной постановке эти вопросы обсуждались в работе [2], где в качестве примера построена модель планирования производства, в которой внешняя рыночная стоимость ресурсов совпадает с внутренними объективно обусловленными оценками ресурсов.

В терминах транспортной задачи получаем следующую содержательную интерпретацию задачи:

- компоненты вектора $g(\omega, \tilde{x})$ с координатами $g_j(\omega, \tilde{x}) = \tilde{b}_j - \sum_{i=1}^m \tilde{x}_{ij}$, $j \in J^+$, и $g_j(\omega, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^m \tilde{x}_{ij} - \tilde{b}_j$, $j \in J^-$, задают в пункте потребления объем дефицита ресурса либо объем излишков ресурса, которые могут возникнуть при известном плане \tilde{x} и при реализации состояния природы ω ;
- компоненты вектора $y(\omega, \tilde{x})$ определяют план-компенсацию дефицита по каждому пункту потребления ресурса;
- элемент B_{ij} матрицы $B = B(\omega)$ задает объем закупки ресурса для i -го потребителя при плане-компенсации $y = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, где единица стоит на j -м месте.

Новая постановка двухэтапной задачи стохастического программирования для транспортной задачи является эффективным инструментом для решения задач транспортного типа. Задача дополнительности придает компонентам вектора переменных задачи второго этапа свойства двойственных переменных, что позволяет проводить компенсацию невязок на пределе совместности. В результате компенсация недостающих ресурсов для обеспечения потребностей будет проводиться без излишков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-41-04436-р-сибирь-а) и при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 2.9314.2017/БЧ).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдин Д.Б., *Математические методы управления в условиях неполной информации. Задачи и методы стохастического программирования*, Краснодар, (2010).

- [2] Зыкина А.В., “Обратная дополнительность в модели управления ресурсами”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 48, No. 11, 1968–1978 (2008).

Integrability of Nonsmooth One-Variable Functions

Иванов Г.Г., Алферов Г.В., Ефимова П.А.

guennadi.ivanov@gmail.com, alferovgv@gmail.com,
yefimovapa@gmail.com

Санкт-Петербургский Государственный университет, Университетская наб.
д.7-9., Санкт-Петербург, 199178, Россия

Интегрируемость негладких функций одной переменной

Введение. Задача восстановления первообразной функции по её конечной производной была предложена Арио Данжуа в 1912г. Данжуа определил интеграл, позволивший интегрировать производную функции $f(x)$. Производная функции определена и конечна во всех точках, но не интегрируема по Лебегу в окрестности нуля.

В 1914г. Оскаром Перроном дано другое определение интеграла, которое позволяет решить задачу о восстановлении функции по её производной. В последствии была установлена тождественность интегралов А.Данжуа и О.Перрона.

В 1916г. А.Я.Хинчин одновременно с А.Данжуа создал теорию аппроксимативных производных и обобщил понятие интеграла А.Данжуа (в узком смысле), создав более общую конструкцию интеграла Данжуа-Хинчина, которая позволяет восстановить первообразную функцию по её аппроксимативной производной [1].

Но, когда функция на множестве мощности континуум принимает бесконечные значения, например, сингулярная функция, или, когда исследуемая функция вообще является многозначной, то на вопрос об интегрируемости такого рода функций данная теория ответа не даёт. Таким образом, чтобы выяснить, имеют ли такого рода существенно негладкие функции первообразную, надо установить, какими свойствами должна обладать функция, чтобы у неё в принципе существовала первообразная. Для этого в предложенных утверждениях нашего доклада сформулированы необходимые и достаточные условия существования первообразной функции одной переменной и способы их нахождения. Полученные результаты частично использовались в следующих работах [3–16].

Анализ интегрируемости функций одной переменной.

Рассмотрим индексное множество A , имеющее точку ноль в качестве своей точки сгущения, и $\{\varphi_\alpha\}, \alpha \in A$, — последовательность непрерывных на $[p, q]$ функций.

Определим последовательность непрерывно дифференцируемых на $[p, q]$ функций $\{f_\alpha\}$, положив

$$f_\alpha(x) = \int_p^x \varphi_\alpha(t) dt, \quad \alpha \in A. \quad (1)$$

Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_\alpha\}$ сходится на $[p, q]$ к функции φ при $\alpha \rightarrow 0$, если множество значений функции φ в каждой точке совпадает с множеством предельных точек последовательности $\{\varphi_\alpha(x)\}$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Последовательность непрерывных функций $\{f_\alpha\}$ будем называть равномерно сходящейся на интервале $[p, q]$ при $\alpha \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любых $\alpha \in A, \beta \in A, |\alpha| < \delta, |\beta| < \delta$, и сразу для всех $x \in [p, q]$ будет выполняться неравенство

$$|f_\alpha(x) - f_\beta(x)| < \varepsilon.$$

Число λ будем называть производным числом функции f в точке $x \in [p, q]$, если существует последовательность $\{h_k\}$ такая, что $(x + h_k) \in [p, q]$ при всех $k, h_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k^{-1}(f(x + h_k) - f(x)) = \lambda.$$

То обстоятельство, что λ есть производное число функции f в точке x , будем записывать так:

$$\lambda = \lambda[f](x)$$

Множество всех производных чисел функции f в точке x будем обозначать через $\Lambda[f](x)$.

Непрерывную на интервале $[p, q]$ функцию f будем называть первообразной функции φ , если для любого $x \in [p, q]$ множество значений функции φ в точке x совпадает с множеством производных чисел функции f в этой точке.

Утверждение 1. Для того чтобы функция φ имела на $[p, q]$ первообразную, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность непрерывных функций $\{\varphi_\alpha\}$, сходящаяся на $[p, q]$ к функции φ при $\alpha \rightarrow 0$, и чтобы последовательность $\{f_\alpha\}$, определяемая соотношениями (1), обладала следующими свойствами:

1. $\{f_\alpha\}$ равномерно сходится на $[p, q]$ при $\alpha \rightarrow 0$;
2. Для любых $\varepsilon > 0, \sigma > 0$ и каждого $x \in [p, q]$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $h, |h| > \delta$, и сколь угодно малого $\nu > 0$ найдутся $\alpha, |\alpha| < \sigma$, и $\beta, |\beta| < \nu$, для которых будут иметь место неравенства

$$|h^{-1}[f_\alpha(x + h) - f_\alpha(x)] - \varphi_\alpha(x)| < \varepsilon \quad (2)$$

и

$$|h^{-1}[f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x) - f_\beta(x+h) + f_\beta(x)]| < \varepsilon; \quad (3)$$

3. Для любых $\varepsilon, \delta > 0$ и каждого $x \in [p, q]$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $\alpha, |\alpha| < \delta$, и сколь угодно малого $\nu > 0$ найдутся $h, |h| > \delta$, и $\beta, |\beta| < \nu$, для которых будут иметь место неравенства (2) и (3).

Следствие. Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{f_\alpha\}$ равномерно сходится на $[p, q]$ при $\alpha \rightarrow 0$. Тогда, для того чтобы имело место равенство

$$\frac{d}{dt} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{df_\alpha}{dx},$$

т.е., чтобы было допустимо почленное дифференцирование при переходе к пределу, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_\alpha\}$ удовлетворяла условиям 2 и 3 утверждения 1.

Если рассматривается вопрос о существовании первообразной однозначной функции φ , заданной на интервале $[p, q]$, то условие 3 утверждения 1 оказывается излишним, т.е. имеет место

Утверждение 2. Для того, чтобы однозначная функция φ имела на $[p, q]$ первообразную, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность непрерывных функций $\{\varphi_\alpha\}$, сходящаяся на интервале $[p, q]$ к функции φ при $\alpha \rightarrow 0$ и такая, что последовательность $\{f_\alpha\}$, определяемая соотношениями (1), удовлетворяла бы условиям 1 и 2 утверждения 1.

Следствие. Множество однозначных функций, имеющих первообразную, является собственным подмножеством множества $H_0 \cap H_1$, где H_0 и H_1 — 0-ой и 1-ый классы функций по классификации Бэра [2].

Последовательность $\{\psi_\beta\}$ непрерывных на $[p, q]$ функций будем называть последовательностью Лузина для функции φ , если для сколь угодно малого $\beta > 0$ выполняется неравенство

$$mE(\varphi \neq \psi_\beta) < \varepsilon(\beta),$$

где $\varepsilon(\beta) > 0$, $\varepsilon(\beta) \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$.

Утверждение 3. Если функция φ измерима и интегрируема на $[p, q]$, то для неё существует последовательность Лузина, удовлетворяющая всем требованиям утверждения 1.

Заключение Таким образом, в предлагаемой работе приведены необходимые и достаточные условия существования первообразной, которым должна удовлетворять даже негладкая функция одной переменной, например, такой функцией может быть сингулярная или многозначная функция. Предложено четырехпараметрическое семейство аппроксимирующих функций. Для любой интегрируемой на конечном интервале

функции из этого семейства можно извлечь последовательность, которая поточечно сходится к исследуемой функции. При этом последовательность интегралов выбранной последовательности будет равномерно сходиться к первообразной рассматриваемой функции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Натансон И.П., *Теория функций вещественной переменной*, М., Наука, (1974).
- [2] Хаусдорф Ф., *Теория множеств*, М.-Л. , (1937).
- [3] Иванов Г.Г., Алферов Г.В., Ефимова П.А., “Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями”, *Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2016. № 3 (34). С. 37–48.
- [4] Иванов Г.Г., Алферов Г.В., Ефимова П.А., “Исследование структуры предельного инвариантного множества одного класса стационарных систем с векторным управлением”, *Проблемы механики и управления. Нелинейные механические системы*, 2016. № 48. С. 48–54.
- [5] Иванов Г.Г., “К вопросу устойчивости линейно однородных систем с переключениями”, *Устойчивость и процессы управления Материалы III международной конференции*, 2015. С. 33–34.
- [6] Ivanov G.G., Sharlay A.S., “On stability of linear homogeneous switched systems”, *2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, 2015. С. 13–15.
- [7] Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.S., “Study on the Structure of Limit Invariant Sets of Stationary Control Systems with Nonlinearity of Hysteresis Type”, *ICNAAM-16, AIP Conference Proceedings 2017*, 2017. (В печати)
- [8] Ivanov G., Alferov G., Sharlay A.S., Efimova P., “Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched Systems”, *ICNAAM-16, AIP Conference Proceedings 2017*, 2017. (В печати)
- [9] Иванов Г.Г., Кулаков Ф.М., Алферов Г.В., “Исследование структуры предельных инвариантных множеств стационарных управляемых систем с нелинейностями гистерезисного типа”, *Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIII Международной конференции (1–3 июня 2016 г., Москва)*, 2016. С. 163–165.
- [10] Kulakov F., Sokolov B., Shalyto A., Alferov G., “Robot master slave and supervisory control with large time delays of control signals and feedback”, *Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 33-36. С. 1783-1796.*
- [11] Pichugin Y., Alferov G., Malafeyev O., “Parameters estimation in mechanism design”, *Contemporary Engineering Sciences. 2016. Т. 9. № 1-4. С. 175-185.*
- [12] Ефимова П.А., Кулаков Ф.М., Алферов Г.В., Шиманчук Д.В., Шарлай А.С., “Управление многозвездными манипуляционными роботами при на-

- личии связей у перемещаемых ими объектов”, *Устойчивость и процессы управления* Материалы III международной конференции. 2015. С. 121-122.
- [13] Alferov G.V., Malafeyev O.A., Maltseva A.S., “Game-theoretic model of inspection by anti-corruption group”, *AIP Conference Proceedings* 2015. С. 450009.
- [14] Malafeyev O., Alferov G., Andreyeva M., “Group strategy of robots in game-theoretic model of interception with incomplete information”, *2015 International Conference on Mechanics - Seventh Polyakov's Reading 2015*. С. 7106751.
- [15] Кулаков Ф.М., Алферов Г.В., Малафеев О.А., “Кинематический анализ исполнительной системы манипуляционных роботов”, *Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2014. № 46*. С. 31-38.
- [16] Кулаков Ф.М., Алферов Г.В., Малафеев О.А., “Динамический анализ исполнительной системы манипуляционных роботов”, *Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2014. № 46*. С. 39-46.

Online Optimization Algorithms for Multi-Armed Bandit Problem

Камалов М.В., Добрынин В.Ю., Балыкина Ю.Е.

mkamalovv@gmail.com, v.dobrynin@bk.ru, julia.balykina@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
199034, Университетская наб. д.7-9

Сравнение алгоритмов онлайн оптимизации для решения задачи о многоруком бандите

Введение.

Сегодня в машинном обучении активно развивается область онлайн обучения. В связи с этим возникает проблема выбора алгоритма, решающего задачи оптимизации с учётом онлайн обработки данных. Одним из подходов в онлайн обучении, решаютших задачи рекомендаций и ранжирования, является алгоритм многорукого бандита (МБ) [1]. Идея данного алгоритма заключается в выборе оптимального ранжирования рекомендаций на основе истории предыдущих и поступающих в онлайн режиме данных от пользователя.

На практике алгоритм многорукого бандита активно применяется с различными модификациями. Так, в работе [2] по выявлению dark pools алгоритм МБ комбинируется с оценкой выживаемости Каплана-Майера; в исследовании, посвященном portfolio management [3], применяется offline предобучение МБ; при решении задачи online learning to rank [4] МБ учитывает контекст истории пользовательских запросов. В

работе Cem Tekin и Mingyan Liu [5] МБ дополнительно применяет марковскую цепь, уточняя выбор оптимального подхода к ранжированию рекомендаций.

Цель данной работы заключается в проведении сравнительного анализа алгоритмов онлайн оптимизации, применяемых в обучении МБ для решения задачи ранжирования результатов поисковой выдачи. Выбранные в результате анализа алгоритмы могут комбинироваться в ансамблевых, стекинговых техниках для повышения качества ранжирования или быть учтены при разработке новых алгоритмов онлайн оптимизации.

Описание алгоритмов онлайн оптимизации.

Поскольку на данный момент одним из активных направлений онлайн обучения является ранжирование, в данной работе будет приведено сравнение следующих алгоритмов онлайн оптимизации, решающих задачу многорукого бандита на примере онлайн ранжирования: Dual-Point Dueling Bandit Gradient Descent (DPDBGD) [6], Multi-Point Deterministic Gradient Descent (MPGD) [6], Probabilistic Multileave Gradient Descent (PMGD) [7], Multileave Gradient Descent (MGD) [8].

Перечисленные алгоритмы онлайн оптимизации являются модификациями алгоритма Dual Bandit Gradient Descent DBGD[9]. Данный алгоритм основан на линейной модели ранжирования $a(d, w_t) = \langle d, w_t \rangle$; $d, w_t \in R^n$ где d - вектор признаков документа из множества документов D ; w_t - вектор весов в момент времени t , n - число признаков, $t \in \{0, \infty\}$. Данный алгоритм максимизирует функцию, $F(q_t, D, w_t)$, значение которой равно числу кликов пользователя по документам из множества D , представленных пользователю в момент времени t в виде списка, ранжированного с учетом запроса q_t и вектора весов w_t . Максимизация выполняется по параметру w_t . Поскольку данный функционал зависит от числа кликов, то запрос рассматривается лишь как вызов метода, обновляющего вектор весов. Ниже приведено более детальное описание алгоритма:

1. Случайным образом инициализируется вектор весов w_t при появлении запроса q_t в момент времени $t = 0$;
2. Выполняется ранжирование документов множества D :
 - (а) Для запроса q_t вычисляется функция ранжирования $Rank(D, w_t)$, возвращающая ранжированный список документов с учётом запроса q_t и вектора весов w_t ;
 - (б) Случайным образом выбирается вектор $u_t, u_t \in R^n, \|u_t\|_2 = 1$ из единичной сферы. Получим новый вектор весов $w'_t = w_t + \delta * u_t$, где δ - аналогичен шагу в алгоритме градиентного спуска. В ре-

зультате получаем $\text{Rank}(D, w'_t)$ новый список ранжированных документов.

- (в) Формируем итоговый список ранжирования следующим образом: заполняем итоговый список сверху вниз, случайно выбирая один из списков, полученных на шагах 2(a), 2(b), и добавляем элемент из выбранного списка в итоговый. Сохраняем индекс списка, который был использован для заполнения текущей позиции. Данное действие повторяется пока итоговый список не будет сформирован.

Далее множество документов D ранжируется с учётом запроса q_t и итогового вектора весов, полученный список предъявляется пользователю как результат поиска и сохраняются позиции документов списка, которые были просмотрены пользователем (клики).

3. При получении нового запроса $q_{(t+1)}$ в момент времени $t + 1$ анализируются клики, полученные в момент времени t . Если клик был выполнен по позиции, выбранной из списка $\text{Rank}(D, w_t)$, то значимость вектора w_t увеличивается на 1. В противном случае на 1 увеличивается значимость вектора w'_t . Далее возвращаемся к пункту 1, где вместо случайной инициализации в качестве значения вектора $w_{(t+1)}$ выбирается наиболее значимый из векторов w_t и $w'_{(t+1)}$.

Рассматриваемые в данной работе модификации DBGD выполняют следующие изменения в шагах алгоритма:

В DPDBGD подходе на 2 шаге формируются два списка ранжированных документов $\text{Rank}(D, w_t + \delta * u_t)$, $\text{Rank}(D, q_t, w_t - \delta * u_t)$, остальные шаги выполняются без изменений.

В MPGD изменяется только 2 шаг, в нем число списков ранжирования увеличивается до n путем сложения w_t , полученного на 1 шаге, с $e_i (i = 1, \dots, n)$ базисными векторами $\text{Rank}(D, w_t - \delta * e_i)$. Таким образом новое число списков зависит от длины вектора весов.

В модификации MGD на 2 шаге применяется семплирование n векторов u_t из единичной сферы вокруг текущего вектора весов w_t и формируется список ранжированных документов $\text{Rank}(D, w_t + \delta * u_t)$. На 2(c) шаге применяется алгоритм Multileaving [10] для формирования итогового списка.

Модификация PMGD заключается в использовании векторов весов, построенных в предыдущие моменты времени при формировании дополнительных списков ранжирования на 2 шаге. Далее как и в MGD на 2(c) шаге выполняется алгоритм Multileaving [10], формируя итоговый список.

Результаты вычислительных экспериментов.

Эксперименты по сравнению алгоритмов онлайн оптимизации выполнялись на открытых коллекциях данных из LETOR 3.0 (LEarning TO Rank) [11]. Все коллекции данных содержали векторы признаков представляющих связь между запросом и документом. Дополнительно, коллекции для каждой пары запрос-документ предоставляли оценку релевантности. В них рассматривались следующие поисковые задачи:

Задача навигации – HP2003 (home page finding), NP2003 (name page finding).

Информационная задача – TD2003 (topic distillation), MQ2007, MQ2008.

Коллекции HP2003, NP2003, TD2003 – содержали от 50 до 150 запросов и порядка 1000 оцененных документов для каждого запроса; MQ2007, MQ2008 – 1700 и 800 запросов соответственно и около 500 оцененных документов для каждого запроса.

Для измерения точности ранжирования подсчитывалась метрика Normalized Discount Cumulative Gain (NDCG) на первых 10 результатах ранжирования.

$$NDCG = \sum_i^{k=10} \frac{(2^{rel(i)} - 1)}{\log_2(i + 1)}$$

где $rel(i)$ - релевантность документа на i -й позиции. Для моделирования поведения пользователя применялась navigational click model [11]. Результаты экспериментальной части приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Результаты сравнения алгоритмов при модели navigational click model

алгоритм / корпус	DPDBGD	MPGD	PMGD	MGD
TD2003	15.23	17.07	32.30	30.04
HP2003	28.30	40.73	82.25	80.01
NP2003	18.08	18.54	78.23	76.53
MQ2007	69.23	74.35	55.71	53.36
MQ2008	82.05	81.78	73.13	65.26

По результатам проведенных экспериментов можно заметить, что в большинстве случаев алгоритмы PMGD и MGD в два раза точнее DPDBGD, MPGD модификаций. Основываясь на полученных результатах, можно сделать вывод о влиянии алгоритма Multileaving на нахождение оптимального вектора весов для функции ранжирования.

Заключение.

В результате проведения сравнительного анализа алгоритмов на основе navigational click модели поведения пользователя (табл. 1) можно заметить высокую точность ранжирования алгоритмов PMGD и MGD для задач home page finding, name page finding и topic distillation. Основываясь на полученных результатах, в дальнейшем планируется провести следующие эксперименты:

1. Сравнить качество ранжирования, добавив новые кликовые модели поведения пользователя.
2. Применить стекинговую технику для комбинации алгоритмов PMBGD и MBGD.
3. Добавить в выбранные алгоритмы данные о пользователе при объединении ранжированных списков.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Herbert R., "Some aspects of the sequential design of experiments."In Herbert Robbins Selected Papers, 169-177. (1985).
- [2] Agarwal A, et al., "Optimal Allocation Strategies for the Dark Pool Problem."In AISTATS, vol. 9, 9-16. (2010).
- [3] Elad H. and Arora S., Efficient algorithms for online convex optimization and their applications. Princeton University, (2006).
- [4] Lu T., Pa, and Pal M. et al., "Contextual Multi-Armed Bandits."In AISTATS, 485-492. (2010).
- [5] Cem T., et al. "Online algorithms for the multi-armed bandit problem with markovian rewards."Communication, Control, and Computing (Allerton), 2010 48th Annual Allerton Conference on. IEEE, 2010.
- [6] Tong Z., and King I., "Constructing Reliable Gradient Exploration for Online Learning to Rank."In Proceedings of the 25th ACM International Conference on Information and Knowledge Management, 1643-1652. ACM, (2016).
- [7] Schuth A., et al. "Multileave gradient descent for fast online learning to rank."In Proceedings of the Ninth ACM International Conference on Web Search and Data Mining, 457-466.(2016).
- [8] Harrie O, et al. "Probabilistic multileave gradient descent."In European Conference on Information Retrieval, 661-668. Springer International Publishing, (2016).
- [9] Yue Y., and Joachims T., "Interactively optimizing information retrieval systems as a dueling bandits problem."In ICML '09, 1201-1208. (2009)
- [10] Liu T.-Y., Xu J., et al. "LETOR: Benchmark dataset for research on learning to rank for information retrieval."In LR4IR '07, 3-10. (2007).
- [11] Schuth A., Sietsma F., et al., Multileaved comparisons for fast online evaluation. CIKM, pages 71–80. (2014).

Comparative Analysis of Methods for Solving Linear Stochastic Problems

Канева О.Н., Атинк Д.К., Зыкина А.В.

okaneva@yandex.ru, dmitryatink@gmail.com, avzykina@mail.ru

Омский государственный технический университет, Мира, 11, Омск, 644050,
Россия

Сравнительный анализ методов решения линейных стохастических задач

При решении стохастических задач традиционно считается, что самым простым подходом является нахождение средних величин случайных параметров и, таким образом, сведение стохастической задачи к детерминированному аналогу, для решения которого используются классические методы решения оптимизационных задач [1]. Однако данный подход не всегда эффективен: значительно теряется точность вычислений, при некоторых реализациях случайных параметров задача может не иметь решения.

В работе анализируются методы решения линейных стохастических задач. Рассматривается реализация двух методов [2]:

- метод Топкиса-Вейнотта из группы непрямых методов;
- метод сокращения невязок из группы прямых методов.

Решение задачи непрямым методом производится через построение детерминированного эквивалента и решения его методом Топкиса-Вейнотта. Для проверки возможности корректного преобразования исходной стохастической задачи к детерминированному аналогу разработан специальный алгоритм [3]. Программа реализована связкой языка высокого уровня *C#* (.Net 4.5) и готового математического пакета *Scilab*. Такой выбор обусловлен тем, что интеграция с готовыми математическими пакетами позволяет использовать их мощные инструменты и уже реализованные алгоритмы, а используя язык высокого уровня и объектно-ориентированный подход, можно реализовать простой и понятный пользовательский интерфейс и уменьшить время решения за счет сокращения пересылок данных между *C#*-программой и средой *SciLab*. К достоинствам платформы .Net можно отнести возможность создания API-сервера для работы с программой, что позволяет использовать разработанную программу на любой платформе.

Метод сокращения невязок из группы прямых методов, представляющий стохастический вариант градиентного метода Эрроу-Гурвица [3], реализован на языке *C#*; пакет *SciLab* в данном методе используется только для решения задачи квадратичного программирования при вычислении очередных итерационных значений.

Интерфейс программы состоит из одного диалогового окна с двумя вкладками. На первой вкладке производится ввод параметров и данных задачи. Вторая вкладка предназначена для проведения проверки, которая показывает возможность построения корректного детерминированного эквивалента исходной задачи [2].

Для проведения исследования выбрана задача линейного стохастического программирования, где детерминированная допустимая область задается линейными ограничениями

$$\sum_{i=1}^n d_{il}x_i \leq f_l, \quad l = 1, \dots, k, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

а случайные параметры a_{ij} , b_j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, имеют равномерное распределение и представлены границами интервалов значений

$$a_{ij} \sim R[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]; \quad b_j \sim R[\underline{b}_j, \overline{b}_j], \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Общий вид задачи линейного стохастического программирования представим в следующей форме записи:

$$\begin{aligned} M\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right) &\rightarrow \max, \\ P\left\{\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j\right\} &\geq \alpha_j, \quad j = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^n d_{il} x_i &\leq f_l, \quad l = 1, \dots, k, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Перед решением задачи прямым методом был проведен эксперимент на соответствие функций ограничений нормальному закону распределения, по результатам которого можно сделать вывод, что чем больше размерность задачи, тем закон распределения функций ограничений ближе к нормальному.

Результаты решения задач прямым и непрямым методами несколько отличаются. К примеру, для задачи

$$-2x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \max,$$

$$P\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1\} \geq 0.8,$$

$$P\{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2\} \geq 0.7,$$

$$x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

где $a_{11} \sim R[0; 2]$; $a_{12} \sim R[-1; 3]$; $a_{13} \sim R[0; 2]$; $b_1 \sim R[14; 18]$; $a_{21} \sim R[0; 2]$; $a_{22} \sim R[-2; 0]$; $a_{23} \sim R[0; 6]$; $b_2 \sim R[11; 13]$. При решении прямым методом был получен следующий оптимальный вектор $x = (0, 4, 0)$ со значением целевой функции $f = -12$. При решении задачи непрямым методом был получен следующий результат $f = -11.828$; $x = (0.0345; 3.931; 0.0345)$. Это можно объяснить тем, что непрямой метод решения теряет в точности, так как при построении детерминированного эквивалента используются усредненные значения случайных параметров, в то время как в прямом методе, за счет генерации больших выборок реализаций случайных величин, решение более устойчивое.

Для оценки скорости работы алгоритмов были проведены следующие исследования:

- зависимость времени решения (в мс.) от размерности задачи n , при фиксированном числе ограничений m .

- зависимость времени решения (в мс.) от количества ограничений m , при фиксированной размерности задачи n .

В первом случае зависимость экспоненциальная, так как чем больше размерность, тем больше необходимо выполнить операций при вычислении каждого ограничения.

Во втором случае зависимость линейная, так как каждое ограничение обрабатывается независимо.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-41-04436-р-сибирь-а) и при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 2.9314.2017/БЧ).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдин Д.Б., *Математические методы управления в условиях неполной информации. Задачи и методы стохастического программирования*, Краснодар, (2010).
- [2] Атинк Д.К., Канева О.Н., *Решатель линейных стохастических задач (программа)*, ОФЭРНиО ФГПУ ИНИПИ РАО, (2015).
- [3] Атинк Д.К., Канева О.Н., “Методы решения задач линейного стохастического программирования”, *Прикладная математика и фундаментальная информатика*, №. 2, 163-166 (2015).

Two-component Immunization Control

Колесин И.Д.

kolesin_id@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики – процессов управления, Петергоф, Университетский проспект, 35, Санкт-Петербург, 198504, Россия

Управление двухкомпонентной иммунизацией

Вакцинация населения в условиях естественно протекающей иммунизации приводит к случаям излишней вакцинации. Исключить их при отсутствии доступных средств измерения иммунитета не представляется возможным, но существенно уменьшить можно, управляя моментом начала вакцинации. Эта возможность проистекает из особенностей поведения возбудителя инфекции. Начало его активизации, а с этим и начало роста числа естественно иммунизируемых лиц, приходится на начало активной жизни горожан после летних отпусков и каникул. Моделируя развитие естественной компоненты иммунизации и дополняя ее искусственной (вакцинацией), можно искать такой момент начала вакцинации, который приводит к оптимальному соотношению между количествами приобретших иммунитет естественно и искусственно. Критерием оптимальности является минимум общего числа случаев избыточной и недостаточной иммунизации при заданном числе нормальной. Применяя принцип максимума, найдем момент переключения и конечные значения всех компонент иммунизации. Такой подход исследовался в [1] и, в отличие от экономического [2, 3], преследует более гуманную цель, определенную работой [4].

Пусть S – число восприимчивых, I_e – число инфицированных бессимптомно, а I_v – вакцинно, R – число получивших нормальный иммунитет, R^- – недостаточный, R^+ – избыточный, k, k^-, k^+ – коэффициенты распределения эффекта вакцинации, а μ, μ^-, μ^+ – эффекта естественной иммунизации, β – коэффициент, обратный характерной длительности инфекционного процесса, $t_0 = 0$ – момент начала сезонной активности возбудителя, a – коэффициент его активности, t_v и T – моменты начала и окончания вакцинации, u – ее интенсивность, λ – скорость инфицирования. Тогда процесс иммунизации описывает модель:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -u - \lambda, & \dot{I}_v &= u - \beta I_v, & \dot{R}^+ &= k^+ \beta I_v + \mu^+ \beta I_e, \\ & & \dot{I}_e &= \lambda - \beta I_e & \dot{R}^- &= k^- \beta I_v + \mu^- \beta I_e, \\ & & & & \dot{R} &= k \beta I_v + \mu \beta I_e, & \lambda &= a S I_e, \end{aligned} \quad (1)$$

$$S(0) > I_e(0) > 0, \quad I_v(0) = 0, \quad R^+(0) = R(0) = R^-(0) = 0, \quad \lambda(0) - \beta I_v(0) > 0,$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [0, t_v), \\ u_p & \text{при } t \in [t_v, T), \end{cases} \quad 0 < u_p < S(0)/T, \quad U = \{0, u_p\}. \quad (2)$$

Требуется найти момент t_v , обеспечивающий заданный прирост R при минимуме $(R^- + R^+)$:

$$R^-(u, T) + R^+(u, T) = \min_{u \in U}, R(T) = R^* \leq u_p T. \quad (3)$$

Введем целевую функцию

$$J(u) = R^+(u, T) + R^-(u, T) = \int_0^T ((k^+ + k^-)\beta I_v + (\mu^+ + \mu^-)\beta I_e) d\tau$$

и построим гамильтониан

$$\begin{aligned} H(u) = & -((k^+ + k^-)\beta I_v + (\mu^+ + \mu^-)\beta I_e) + p_1(u - \beta I_v) + \\ & +(p_2 - p_3)aS I_e - p_2\beta I_e - p_3u. \end{aligned}$$

Присоединенная система

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= (k^+ + k^-)\beta + p_1\beta, \\ \dot{p}_2 &= (\mu^+ + \mu^-)\beta - (p_2 - p_3)aS + p_2\beta, \\ \dot{p}_3 &= -(p_2 - p_3)aI_e \end{aligned}$$

имеет при $I_e > 0$ неустойчивую точку равновесия

$$\bar{p}_1 = -(k^+ + k^-) < 0, \bar{p}_2 = -(\mu^+ + \mu^-) < 0, \bar{p}_3 = \bar{p}_2.$$

При задании

$$\bar{p}_1 < p_1(0) < 0, \bar{p}_2 < p_2(0) < 0, p_3(0) > 0 \quad (4)$$

выполняется $\partial H / \partial u = p_1(0) - p_3(0) < 0$, а компоненты $p_1(t), p_2(t)$ рас- тут, меняя знак на обратный. Так как правая часть \dot{p}_3 составляет лишь часть \dot{p}_2

$$(\mu^+ + \mu^-)\beta + |p_2 - p_3|aI_e + p_2\beta > |p_2 - p_3|,$$

то более быстрый рост p_2 обращает рост p_3 в спад, меняя знак p_3 на обратный. Этим обеспечивается выполнение условий трансверсальности $p_i(0)p_i(T) < 0$, $i = 1, 2, 3$ и переход $\partial H / \partial u$ через 0.

Утверждается: если выполняются условия 4, то задача 1-2-3 имеет решение.

Пример. При задании $S(0) = 500$, $I_e(0) = 10$, $I_v(0) = 0$, $R(0) = R^-(0) = R^+(0) = 0$, $(k, k^-, k^+) = (0.6, 0.3, 0.1)$, $(\mu, \mu^-, \mu^+) = (0.6, 0.4, 0)$, $a = 0.000193$, $\beta = 0.06$, $u_p = 5$, $R^* = 250$, $B_0 = 416$, $p_1(0) = p_2(0) = -0.3$, $p_3(0) = 0.05$ получим $t_v = 29.4$, т.е. система

управления иммунизацией предлагает начать вакцинацию с 25-го дня (отсчитываемого от начала сезонного подъема заболеваемости: $t_0 = 0$). При этом прирост коллективного иммунитета составит $R(T) = 250.1$ при негативном эффекте $R^+(T) + R^-(T) = 112.6 + 29.3 = 141.9$, объем требуемой вакцинации $B_v = (T - t_v)u_p = 375$, а ее эффективность $f = R(T)/B_v = 250/375 = 0.67$ вместо $\mu B_0/B_0 = 0.6$ при отсутствии учета бессимптомной компоненты.

Построена динамическая система, сочетающая вакцинацию с бессимптомной иммунизацией и разработан алгоритм отыскания оптимального режима вакцинации по критерию минимума негативного эффекта при заданном позитивном. Показана эффективность такого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Колесин И.Д., Воробьева А.А., Циберная А.Ю., “Модельный анализ эффективности ранней иммунизации населения”, *Эпидемиология и вакцинопрофилактика*, 5, 21-26 (2015).
- [2] Hansen, E., Day, T., “Optimal control of epidemics with limited resources”, *J. Math. Biol.*, 62, 423–451(2011).
- [3] Onyango, N.O., Müller, J., “Determination of optimal vaccination strategies using an orbital stability threshold from periodically driven systems”, *J. Math. Biol.*, 68, 763–784 (2014).
- [4] Медуницын Н.В., Яковleva Т.В., “Совершенствование подходов к вакцинопрофилактике”, *Эпидемиология и вакцинопрофилактика*, 3, 70-78 (2012).

Algorithms of Planar Velocity Problem Solutions Construction in Case of Non Convex Target Set

Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.

pleb@yandex.ru, uspen@imm.uran.ru, ushak@imm.uran.ru

ИММ им. Н.Н. Красовского, ул. С. Ковалевской, д. 16, Екатеринбург, 620990

Алгоритмы решения задачи быстродействия на плоскости в случае невыпуклого целевого множества

Изучается проблема возникновения негладкости у функции оптимального результата в плоской задаче быстродействия [1] для случая круговой индикаторы. Особенности геометрии векторограммы скоростей предоставляет возможность углубленного аналитического анализа свойств решения задачи даже при условии невыпуклости целевого множества, имеющего при этом низкий порядок гладкости границы. В рассматриваемом случае граница цели дифференцируема. При этом допускается наличие граничных точек, в которых координатные функции терпят разрыв по производной второго порядка, т.е. изучается случай,

когда классическая кривизна кривой [2], ограничивающей краевое множество, вообще говоря не существует. У решения задачи возникают сингулярные множества, на которых функция, будучи непрерывной, тем не менее терпит разрыв градиента. При формировании решения требуется выявлять и строить такие множества.

Рассматриваемая задача представляет интерес с точки зрения теории оптимального управления. Ее решение также связано с решениями задач распространения волн в изотропных средах. Функция оптимального результата задачи быстродействия отличается лишь знаком от фундаментального решения [3] основного уравнения геометрической оптики [4], называемого уравнением эйконала. Волновые фронты эйконала являются линиями уровня функции оптимального результата. Эволюция волновых фронтов, их перестройка, возникновение и классификация особенностей изучаются методами и средствами теории особенностей гладких отображений [5].

В работе изучены свойства границы целевого множества M в задаче быстродействия с точки зрения выделения псевдовершин \mathbf{v}_i — характеристических точек, отвечающих за зарождение линий изломов волновых фронтов [6]. В терминах теории управления эти линии являются рассеивающими кривыми [7]. Это означает, что из каждой точки рассеивающей кривой выходит две или более оптимальных траекторий. Сингулярные кривые — это линии, на которых функции оптимального результата является негладкой. Производные по направлениям этой функции изучены в [8]. Поскольку вектограмма скоростей есть круг единичного радиуса с центром в начале координат, то оптимальными траекториями являются отрезки, соединяющие заданную точку с ближайшими к ней в евклидовой метрике элементами множества M . Псевдовершины лежат на границе $\Gamma = \partial M$ множества M и имеют важную особенность. Для каждой псевдовершины $\mathbf{v}_i \in \Gamma$ существует последовательность точек рассеивающей линии $L(M)$, такая, что последовательность пар точек их проекций на M сходится к $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$.

Авторами изучена структура расположения псевдовершин в случае односвязного ограниченного множества M , граница которого задана в параметрическом виде $\Gamma = \{\mathbf{g} = \mathbf{g}(t) : t \in [0, T]\}$, где $T > 0$, $\mathbf{g}(t)$ — непрерывная вектор-функция скалярного аргумента, для которой почти всюду определены её производные до третьего порядка включительно. При этом учитывается, что в $\mathbf{v}_i \in \Gamma$ кривизна Γ либо достигает локального максимума, либо не определена (подробнее см. [9]). Доказаны теоремы о необходимых условиях существования псевдовершин $\mathbf{g}(t^*), t \in [0, T]$. В случае, если в точке t^* функция $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t))$ имеет третий порядок гладкости, необходимые условия сводятся к выполнению одного из

равенств

$$y'(t^*) (\det(\mathbf{g}'(t^*), \mathbf{g}'''(t^*)) \|\mathbf{g}'(t^*)\|^2 - 3 \det(\mathbf{g}'(t^*), \mathbf{g}''(t^*)) \langle \mathbf{g}'(t^*), \mathbf{g}''(t^*) \rangle) = 0,$$

$$x'(t^*) (\det(\mathbf{g}'(t^*), \mathbf{g}'''(t^*)) \|\mathbf{g}'(t^*)\|^2 - 3 \det(\mathbf{g}'(t^*), \mathbf{g}''(t^*)) \langle \mathbf{g}'(t^*), \mathbf{g}''(t^*) \rangle) = 0.$$

Здесь выражение $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ означает определитель матрицы, столбцами которой служат вектор-столбцы \mathbf{a} и \mathbf{b} , $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ — скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Отдельно рассмотрен важный случай, когда в точке t^* не определена производная второго порядка, но определены её односторонние пределы $\mathbf{g}''(t^* - 0)$ и $\mathbf{g}''(t^* + 0)$, знаки которых совпадают, что гарантирует отсутствие в точке $\mathbf{g}(t^*)$ перегиба кривой Γ . Для данного типа точек авторами привлечена конструкция так называемого диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$, связывающего параметры, определяющие координаты проекций точек рассеивающей линии в окрестности псевдовершины [10]. В этом случае в точке t^* с необходимостью выполняется одно из четырех условий:

$$x'(t^*) \neq 0, y'(t^*) = 0;$$

$$\begin{aligned} \varkappa(\mathbf{g}(t^* - 0)) &= 2 \frac{(x'(t^*))^2}{\|\mathbf{g}'(t^*)\|^3} \lim_{t_1 \rightarrow t^*-0} \left(\frac{y(t_2(t_1)) - y(t_1)}{x(t_2(t_1)) - x(t_1)} \right)' = \\ &= 2 \frac{(y'(t^*))^2}{\|\mathbf{g}'(t^*)\|^3} \lim_{t_1 \rightarrow t^*-0} \left(\frac{x(t_2(t_1)) - x(t_1)}{y(t_2(t_1)) - y(t_1)} \right)', \\ &\text{если } x'(t^*) \neq 0, y'(t^*) \neq 0, \lim_{t_1 \rightarrow t^*-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0; \end{aligned}$$

$$y'(t^*) \neq 0, x'(t^*) = 0;$$

$$\begin{aligned} \varkappa(\mathbf{g}(t^* + 0)) &= 2 \frac{(x'(t^*))^2}{\|\mathbf{g}'(t^*)\|^3} \lim_{t_2 \rightarrow t^*+0} \left(\frac{y(t_2) - y(t_1(t_2))}{x(t_2) - x(t_1(t_2))} \right)' = \\ &= 2 \frac{(y'(t^*))^2}{\|\mathbf{g}'(t^*)\|^3} \lim_{t_2 \rightarrow t^*+0} \left(\frac{x(t_2) - x(t_1(t_2))}{y(t_2) - y(t_1(t_2))} \right)', \end{aligned}$$

$$\text{если } x'(t^*) \neq 0, y'(t^*) \neq 0, \lim_{t_2 \rightarrow t^*+0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = 0.$$

Здесь $\varkappa(\mathbf{g}(t))$ означает кривизну кривой Γ в точке $\mathbf{g}(t)$. Подробнее структура псевдовершин множества, ограниченного параметрически заданной кривой изложены в [11, 12]

На базе полученных условий существования характеристических точек ограниченного невыпуклого множества M авторами разработана процедура построения рассеивающих кривых в задаче быстродействия

с круговой вектограммой скоростей. Псевдовершины дают возможность строить точки прекращения сингулярных линий, а их участки гладкости могут быть найдены как решения дифференциального уравнения относительно координат их проекций на M (подробнее см. [13]) Эффективность процедуры проиллюстрирована на примерах с различными свойствами границы Γ целевого множества M .

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект №15-11-10018).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Красовский Н.Н. “Игровые задачи динамики. Г”, *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. № 5. С. 3–12. (1969).
- [2] Рашевский П.К. *Курс дифференциальной геометрии*. М.: Едиториал, УРСС, 2003.
- [3] Кружков С.Н. “Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала”, *Матем. сб.* 1974. Т. 98, Вып. 3. С. 450–493.
- [4] Слюсарев Г.Г. *Геометрическая оптика*. М.: Изд-во АН СССР, 1946.
- [5] Арнольд В.И. *Особенности каустик и волновых фронтов*. М.: ФАЗИС, 1996. 334 с.
- [6] Лебедев П.Д., Успенский А.А. “Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии”, *Автоматика и телемеханика*. 2009. № 7. С. 50–57.
- [7] Айзекс Р. *Дифференциальные игры*. М.: Мир, 1967.
- [8] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*. М.: Наука, 1990.
- [9] Лебедев П.Д., Успенский А.А. “Геометрия и асимптотика волновых фронтов”, *Изв. высших учеб. заведений. Математика*. 2008. № 3 (550). С. 27–37.
- [10] Успенский А.А. “Производные в силу диффеоморфизмов и их приложения в теории управления и геометрической оптики”, *Труды Института математики и механики*. Том 21, № 2. 2015. С. 252–266.
- [11] Успенский А.А. “Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала”, *Труды Института математики и механики*. Том 21, № 1. 2015. С. 250–263.
- [12] Успенский А.А., Лебедев П.Д. “Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества”, *Труды Института математики и механики*. Т. 22. № 1. 2016. С. 282–293.
- [13] Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. “Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстродействия”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та*. 2013. Сер. 10, вып. 3. С. 157–167.

Strict Polynomial Separation of Two Sets*Малозёмов В.Н., Плоткин А.В.*

v.malozemov@spbu.ru, avplotkin@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский
проспект, дом 28, Старый Петергоф, 198504, Россия**Строгое полиномиальное отделение двух множеств**

Как известно, задача *наилучшего линейного отделения* двух конечных множеств в евклидовом пространстве сводится к задаче линейного программирования [1]. В этом докладе мы покажем, что задача *строгого полиномиального отделения* двух конечных множеств также сводится к задаче линейного программирования.

1. Пусть в пространстве \mathbb{R}^n заданы два конечных множества

$$A = \{a_i\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad B = \{b_j\}_{j=1}^k.$$

Рассмотрим обобщённый полином

$$P(x, t) = \sum_{s=1}^r x[s] u_s(t), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

где $u_s(t)$ — непрерывные функции от n переменных.

Будем говорить, что множества A и B *строго полиномиально отделимы*, если найдётся вектор коэффициентов $x_0 \in \mathbb{R}^r$, такой что

$$\begin{aligned} P(x_0, a_i) &\geq 1 \quad \text{при всех } i \in 1 : m, \\ P(x_0, b_j) &\leq -1 \quad \text{при всех } j \in 1 : k. \end{aligned}$$

При этом отделяющая «гиперповерхность» определяется уравнением

$$P(x_0, t) = 0.$$

Покажем, что построение отделяющего полинома $P(x_0, t)$ сводится к решению задачи линейного программирования.

2. Введём функцию

$$f(x) = \max \left\{ \max_{i \in 1:m} [1 - P(x, a_i)]_+, \max_{j \in 1:k} [1 + P(x, b_j)]_+ \right\},$$

где $[u]_+ = \max\{0, u\}$. Очевидно, что $f(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^r$.

Лемма. Полином $P(x_0, t)$ строго отделяет множества A и B тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$.

Лемма показывает, что задача строгого полиномиального отделения множеств A и B сводится к минимизации функции $f(x)$ на \mathbb{R}^r .

3. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^r}. \quad (1)$$

Теорема 1. Задача (1) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} w &\rightarrow \min \\ P(x, a_i) + w &\geq 1, \quad i \in 1 : m; \\ -P(x, b_j) + w &\geq 1, \quad j \in 1 : k; \\ w &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

4. Задача линейного программирования (2) имеет решение, поскольку множество её планов непусто (за счёт w) и целевая функция ограничена снизу нулём. По лемме об эквивалентных экстремальных задачах [2, с. 11–13] задача (1) также имеет решение, причём минимальные значения целевых функций у задач (1) и (2) равны между собой. Обозначим это общее значение через w_* .

Теорема 2. Величина w_* может принимать только два значения: 0 или 1.

5. Строгое полиномиальное отделение множеств A и B сведено к решению задачи линейного программирования (2). Если (x_*, w_*) — решение этой задачи, то при $w_* = 0$ полином $P(x_*, t)$ строго отделяет множества A и B . При $w_* = 1$ строгое полиномиальное отделение множеств A и B невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bennett K. P., Mangasarian O. L. *Robust linear programming discrimination of two linearly inseparable sets*. Optimization Methods and Software 1 (1992), 23–34.
- [2] Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

Stochastic Model of the Universe Matter

Новоселов В.С., Королев В.С.

vokorol@bk.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург,
Россия

Abstract

We discuss the mathematical model of the structure and properties of matter in the universe. The basis of all processes is the movement. You can start with the basic principles and laws of physics, statistical and thermodynamic equilibrium. We consider the collective movement of quasiparticle wave function which satisfies the Schrodinger equation of quantum mechanics. The solution of this equation is in the form of a spherical wave function of the longitudinal wave, which can be represented in a specific form of soliton solutions. Weak interaction transition proton into a neutron, a positron and a neutrino, one can imagine what is happening under the influence of the Coulomb interaction constraints caused by the interposition of electrical helicity neutrinos. The strong interaction may be due to rearrangement of the electron by combining atoms. The substantiation of the basic laws of physics-based motion protoparticle small size and low weight. We obtain the probability parameters of the basic characteristics of protoparticles.

Вероятностные модели материи Вселенной

Физические, химические, математические и другие науки предлагаю возможное и доступное пониманию представление о природе окружающего мира для изучения на соответствующем уровне при использовании средств наблюдения за взаимодействиями или преобразованиями материи, энергии, гравитации или других силовых полей, пространства и времени. Различные научные коллективы на своем уровне для объектов разных размеров пытаются исследовать проявления и свойства объектов материального мира и живой природы [1-6].

Вещество в классическом понимании является множеством взаимосвязанных частиц в некоторой области пространства. Философы считали, что существующая материя состоит из однородных и неизменяемых частей, которым дали название атомы. Классическая физика рассматривает нескольких состояний: твердое, жидкое, аморфное, газообразное или в виде плазмы. Твердые тела только кажутся нам едиными, сплошными и абсолютно твердыми, сохраняя форму и объем. Это благодаря множеству взаимодействий всех элементов и частей тела.

Оказалось, что атомы состоят из таких частиц как протон, электрон, нейтрон. Они в свою очередь из более мелких бозонов и мезонов,夸克ов и глюонов. Были открыты и другие элементарные частицы. Прогнозируют новые открытия и появление частиц, которым заранее придумывают названия и приписывают особые свойства. Предполагают возможным существование по косвенным признакам новых форм материи [2-4, 9, 11-13, 15-17].

Как утверждал Альберт Эйнштейн «Материя и излучение, согласно специальной теории относительности, являются только особыми формами энергии, распределенной в пространстве» [14]. Принадлежность к веществу следует понимать условно, поскольку различие между формами материи сейчас стирается. Элементарные частицы представляют собой не что иное, как сгущение силового электромагнитного и гравитационного поля, наполненного энергией. Согласно космологическим представлениям, энергия вакуума определяется локально однородным и изотропным скалярным полем.

Энергия или материя распределены в пространстве в виде силовых полей для разных видов или типов взаимодействия по своим правилам и свойствам. Силовые поля формируют общую структуру и свойства пространства, в том числе все возможности изменения пространства и самого поля, которые мы называем движением [5, 9].

Сгусток силового поля может реализоваться как вещество или материя, которая характеризуется величиной (масса), относительным положением при общем распределении в пространстве, движением (импульс или количество движения) и другими свойствами (заряд, спин, ориентация). Это определяет структуру текущего состояния «пространства-времени» всего материального мира, которое мы называем Вселенной!

В результате эволюции при развитии или самоорганизации получаем разного вида и формы проявления материи. Устойчивые состояния представлены элементарными частицами, которые имеют разное время существования, а также наиболее устойчивыми формами в виде атомов. Можно в качестве «исходных» элементов предполагать [9] существование «проточастич» очень малых размеров и малой массы. Можно также считать, что вакуум наполнен ими, а все объекты взаимодействуют с ними или состоят из этих проточастич в виде устойчивых образований или сочетаний.

Каждое элементарное событие, из которых складывается всякий физический процесс (например, распад радиоактивного атома или столкновение нейтронов при экспериментах в ядерной физике), происходит в каком-либо месте или некоторой точке трехмерного физического пространства и некоторый момент времени [3-5, 10-12]. Какой-то представитель материального мира, который можно считать точкой, находится в данный момент в данном месте. Но нужно видеть совокупность всех его свойств и параметров в процессе взаимодействия.

Ньюton получил уравнения и решения для описания движения тела, которое можно считать материальной точкой, в центральном гравитационном поле [10]. Фарадей в своих исследованиях электричества и магнетизма, наблюдениях или экспериментах дошел до открытия и создания

электромагнитного поля, а основную математическую модель и уравнения предложил Максвелл, что привело к появлению квантовой механики [11]. Эйнштейн пытался создать единую теорию поля для всех существующих сил, соединяя время, пространство и силы тяготения [14].

Современные попытки построения новых моделей рождения и развития Вселенной лишь иллюстрируют процесс всеобщего внимания к изучению мира, рассматриваемого как единое целое. Единая субстанция проявляется в разных обстоятельствах в различных формах и свойствах «материи–энергии». Основные варианты и формы материи, как предполагается, образовались еще на ранней стадии возможной эволюции Вселенной [1-4].

Элементарные частицы непрерывно рождаются из проточастиц и затем весьма быстро взаимодействуют или вновь аннигилируют. Происходит быстрое установление статистического равновесия, при котором излучение электромагнитных колебаний определяется формулой Планка излучения черного тела, а проточастицы движутся во все стороны со скоростью света c . Скорость распространения не зависит от выбора системы координат.

При внесении в некоторую область вакуума энергии высокой частоты в указанной области происходит концентрация проточастиц. Этот процесс передается во все стороны. Освободившееся место занимает поток проточастиц из других областей.

Будем рассматривать коллективное перемещение квазичастиц, волновая функция которых удовлетворяет уравнению Шрёдингера квантовой механики [6-9, 12], которую можно моделировать нелинейной отрицательно определенной потенциальной функцией. Например, для взрыва с разлетом первоочастиц в диффузационной среде за основу можно принять одномерное уравнение

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma N + D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2},$$

где N - число проточастиц, параметр $\gamma = \text{const} > 0$, D - коэффициент диффузии. Отыскиваем решение этого уравнения в виде волновой функции по типу волны де Бройля, тогда уравнение может иметь солитонное решение [7, 9, 14-16] и приводится к выражению

$$\|x - x_0\| = 2t\sqrt{\gamma D} \left[1 - \frac{1}{4\gamma t} \ln(4\pi DN^2 t) + o(t^{-1} \ln t) \right].$$

Можно приравнять равновесную скорость проточастиц скорости распространения электромагнитной волны. Полученная формула может служить для определения постоянной γ .

Слабое взаимодействие перехода протона в нейтрон, позитрон и нейтрино, можно представить происходящим под действием ограничения кулоновского взаимодействия, вызванного помещением между электрическими частицами спирального нейтрино. Сильное взаимодействие может быть вызвано перестановкой электронов при объединении атомов.

Предложенная схема строения материи Вселенной, использующая проточастицы не является строго научной, хотя и отвечает законам физики [8, 9, 11], но указанные величины не поддаются пока экспериментальному определению. Подход вероятностный. Поэтому могут существовать особые события, мера которых существенно меньше меры нормальных событий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вагнер С., *Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной*, М.: Энергоиздат, (1981).
- [2] Валиев Б.Г., Лопатин В.М., “Трансформация материи во Вселенной”, *Успехи современной науки и образования*, 3, No. 8, 49–53 (2016).
- [3] Гинзбург И.Ф., “Неминимальные хиггсовские модели, темная материя и эволюция Вселенной”, *Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики*, 99, No. 11-12, 856–865 (2014).
- [4] Королев В.С., “Структура окружающего мира при образовании и развитии Вселенной”, *Актуальные направления научных исследований: от теории к практике*, No. 3, 188–192 (2014).
- [5] Королев В.С., “Принципы взаимодействия силовых полей материального мира”, *Наука вчера, сегодня, завтра*, No. 11, 24–36 (2016).
- [6] Новоселов В.С., *Статистическая динамика*, СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, (2009).
- [7] Новоселов В.С., “Интегральные инварианты и солитонные решения длинноволновых уравнений”, *Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 10*, No. 3, 69–75 (2010).
- [8] Новоселов В.С., Королев В.С., *Аналитическая механика управляемой системы*, СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, (2005).
- [9] Новоселов В.С., Королев В.С., “Материя Вселенной”, *Естественные и математические науки в современном мире*, No. 12, 28–43 (2016).
- [10] Ньютона И., *Математические начала натуральной философии*, М.: Наука, (1989).
- [11] Фок В.А., *Квантовая физика и строение материи*, М.: Изд-во ЛИБРОКОМ, (2014).
- [12] Шредингер Э., *Что такое жизнь с точки зрения физики?*, М.: Изд-во РИМИС, (2009).

- [13] Эйнштейн А., “Эфир и теория относительности”, *Собрание сочинений в 4 томах*, М.: Наука, (1965).
- [14] Burdyuzha V.V., “The fractal universe, preon structure of particles, and the familon model of dark matter”, *Astronomy Reports*, 58, No. 6, 353–365 (2014).
- [15] Karachentsev I.D., “Missing dark matter in the local universe”, *Astrophysical Bulletin.*, 67, No. 2, 123–134 (2012).
- [16] Korolev V.S., “Problem Structure and Properties Matter of Universe”, *American Scientific Journal*, No. 8, 12–22 (2016).
- [17] Pakulin V.N., “Structure of Matter. Vortex Model of Microworld”, *Philosophy and Cosmology*, 1, No. 1, 93–124 (2013).

2d-Ellipsoid of Optimal Volume and Its Applications

Стецюк П.И.

stetsyukr@gmail.com

Институт кибернетики НАН Украины, проспект Глушкова, 40, г. Киев, 03187,
Украина

Оптимальный по объему 2d-эллипсоид и его приложения

Оптимальным 2d-эллипсоидом в евклидовом пространстве E^n будем называть минимальный по объему эллипсоид $\text{Ell}(x_0, a, b, r)$ с центром в точке x_0 , который содержит выпуклое тело $W \in E^n$, полученное в результате пересечения n -мерного шара $S(x_0, r) = \{x: \|x - x_0\| \leq r\}$ и двух полу-пространств $P(x_0, \xi) = \{x: (x - x_0, \xi) \leq 0\}$ и $P(x_0, \eta) = \{x: (x - x_0, \eta) \leq 0\}$, таких, что $-1 < (\xi, \eta) < 0$, $\|\xi\| = 1$, $\|\eta\| = 1$. Отношение объема $\text{Ell}(x_0, a, b, r)$ к объему шара $S(x_0, r)$ равно $q = \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2} < 1$; длина полуоси в направлении $\xi - \eta$ равна $a = r\sqrt{1 + (\xi, \eta)} < r$; длина полуоси в направлении $\xi + \eta$ равна $b = r\sqrt{1 - (\xi, \eta)} > r$, а во всех $n - 2$ ортогональных к ξ и η направлениях длины полуосей равны r [1]. Преобразование эллипсоида $\text{Ell}(x_0, a, b, r)$ в “новый” шар $S(y_0, r)$ радиуса r реализуется с помощью оператора

$$T_2(\xi, \eta) = R_{\alpha_1} \left(\frac{\xi - \eta}{\|\xi - \eta\|} \right) R_{\alpha_2} \left(\frac{\xi + \eta}{\|\xi + \eta\|} \right), \quad (1)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\xi, \eta)}} > 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\xi, \eta)}} < 1$$

и отвечает последовательному применению оператора растяжения пространства $R_\alpha(\zeta) = I_n + (\alpha - 1)\zeta\zeta^T$, где I_n – единичная $n \times n$ -матрица, в двух ортогональных направлениях: “растяжение” в направлении разности векторов ξ и η с коэффициентом $\alpha_1 > 1$ и “сжатие” в направлении суммы векторов ξ и η с коэффициентом $\alpha_2 < 1$.

Лемма 1 [1]. Пусть $n \times n$ -матрица B_k – такая, что $\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\| \leq r$; g_1 и g_2 – n -мерные векторы, такие, что $(x_k - x^*, g_1) \geq 0$, $(x_k - x^*, g_2) \geq 0$ и $-\|B_k^T g_1\| \|B_k^T g_2\| < (B_k^T g_1, B_k^T g_2) < 0$. Если

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= B_k R_{\beta_1} \left(\frac{\xi - \eta}{\|\xi - \eta\|} \right) R_{\beta_2} \left(\frac{\xi + \eta}{\|\xi + \eta\|} \right), \\ \xi &= \frac{B_k^T g_1}{\|B_k^T g_1\|}, \quad \eta = \frac{B_k^T g_2}{\|B_k^T g_2\|}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\beta_1 = \sqrt{1 + (\xi, \eta)}$ и $\beta_2 = \sqrt{1 - (\xi, \eta)}$, то матрица B_{k+1} обладает следующими свойствами: (i) $\|B_{k+1}^{-1}(x_k - x^*)\| \leq r$; (ii) $\det(B_{k+1}) = \det(B_k) \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2}$; (iii) $(B_{k+1}^T g_1, B_{k+1}^T g_2) = 0$.

Лемма 1 имеет следующую интерпретацию. Свойство (i) означает локализацию точки $y^* = A_{k+1}x^*$ в шаре $S(y_k, r)$ преобразованного пространства $Y = A_{k+1}X$, $A_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$. Свойство (ii) означает уменьшение объема эллипсоида вида $\text{Ell}(y_k, a, b, r)$ по отношению к объему шара $S(y_k, r)$ и уменьшение объема будет тем больше, чем более тупым будет угол между векторами ξ и η . Свойство (iii) означает следующее. Пусть g_1 и g_2 – субградиенты выпуклой негладкой функции $f(x)$ в точке x_k . Тогда $B_k^T g_1$ и $B_k^T g_2$ – субградиенты выпуклой негладкой функции $\varphi_k(y) = f(B_k y)$ в точке $y_k = A_k x_k$ преобразованного пространства $Y = A_k X$. Угол между субградиентами $B_k^T g_1$ и $B_k^T g_2$ тупой, а значит в преобразованном пространстве переменных ни один из этих двух антисубградиентов в точке y_k не является направлением убывания функции $\varphi_k(y)$. Преобразование пространства $Y = A_{k+1}X$, $A_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$, где B_{k+1} вычислена по формуле (2), ортогонализует субградиенты $B_{k+1}^T g_1$ и $B_{k+1}^T g_2$ функции $\varphi_{k+1}(y) = f(B_{k+1} y)$ в следующем преобразованном пространстве $Y = A_{k+1}X$. Возможность их ортогонализации гарантирует условие

$$\left(\frac{B_k^T g_1}{\|B_k^T g_1\|}, \frac{B_k^T g_2}{\|B_k^T g_2\|} \right) = (\xi, \eta) > -1, \quad \text{где } \xi = \frac{B_k^T g_1}{\|B_k^T g_1\|}, \quad \eta = \frac{B_k^T g_2}{\|B_k^T g_2\|}.$$

Другими словами, свойство (iii) обеспечивает использование антиовражного приема, аналогичного используемому в r -алгоритмах [2]. Субградиенты с тупым углом в текущем пространстве переменных становятся ортогональными в преобразованном пространстве, что позволяет сделать менее вытянутыми поверхности уровня овражной функции. При этом коэффициенты растяжения пространства в направлении разности нормированных субградиентов и в направлении суммы нормированных субградиентов определяются углом между субградиентами. Чем более тупым будет угол между ними, тем большим будет коэффициент

растяжения пространства в направлении разности двух нормированных субградиентов. Учитывая, что “сжатие” пространства переменных с коэффициентом $\alpha_2 < 1$ в направлении суммы векторов ξ и η только усиливает “растяжение” пространства с коэффициентом $\alpha_1 > 1$ в направлении разности векторов ξ и η , то общий коэффициент растяжения пространства переменных в направлении разности нормированных субградиентов можно представить следующей формулой

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{1 - (\xi, \eta)}}{\sqrt{1 + (\xi, \eta)}} = \sqrt{1 - \frac{2(\xi, \eta)}{1 + (\xi, \eta)}} > 1, \quad (3)$$

где $-1 < (\xi, \eta) < 0$.

Формула (3) означает, что если пространство переменных растянуть в направлении разности двух нормированных субградиентов с коэффициентом α , то в “растянутом” пространстве переменных субградиенты станут ортогональными.

Использование оператора (1) требует в два раза больше арифметических операций, чем растяжение пространства. Сохранить трудоемкость итерации такой же, как в r -алгоритмах, позволяет одноранговый эллипсоидальный оператор [3]. Его матричная форма для векторов ξ и η имеет вид

$$T_1(\xi, \eta) = I_n - \frac{1}{1 - (\xi, \eta)^2} \left(\left(1 - \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2} \right) \eta - (\xi, \eta) \xi \right) \eta^T. \quad (4)$$

Обратный к (4) оператор $T_1^{-1}(\xi, \eta)$ (для преобразования пространства субградиентов) имеет вид

$$T_1^{-1}(\xi, \eta) = I_n + \frac{1}{\sqrt{1 - (\xi, \eta)^2}} \left(\left(1 - \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2} \right) \eta - (\xi, \eta) \xi \right) \eta^T. \quad (5)$$

Лемма 2 [3]. Пусть $n \times n$ -матрица B_k – такая, что $\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\| \leq r$; g_1 и g_2 – n -мерные векторы, такие, что $(x_k - x^*, g_1) \geq 0$, $(x_k - x^*, g_2) \geq 0$ и $\|B_k^T g_1\| \|B_k^T g_2\| < (B_k^T g_1, B_k^T g_2) < 0$. Если $B_{k+1} = B_k T_1^{-1}(\xi, \eta)$, где $\xi = \frac{B_k^T g_1}{\|B_k^T g_1\|}$, $\eta = \frac{B_k^T g_2}{\|B_k^T g_2\|}$, то матрица B_{k+1} обладает следующими свойствами: (i) $\|B_{k+1}^{-1}(x_k - x^*)\| \leq r$; (ii) $\det(B_{k+1}) = \det(B_k) \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2}$; (iii) $(B_{k+1}^T g_1, B_{k+1}^T g_2) = 0$.

Лемма 2 имеет такую же интерпретацию, как и лемма 1. Следовательно, операторы (4) и (5) позволяют обосновывать методы по тому же принципу, что и оператор (1), т.е. на итерации метода уменьшается объем эллипса локализации множества экстремумов. Для построения методов, в которых на итерации корректируется матрица B , оператор (4)

является более экономным, чем оператор (1), так как при его использовании требуется в два раза меньше арифметических операций.

Операторы (1) и (4) могут быть использованы при создании ускоренных вариантов методов эллипсоидов для широкого класса задач: задача выпуклого программирования, задача поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, отдельные случаи задач решения вариационных неравенств, специальные классы задач линейной и нелинейной комплементарности. В докладе рассмотрим их применение в субградиентных методах **amsg2** и **amsg2p** [4], в которых используется релаксационный **ams**-шаг (известен как шаг Поляка или шаг Агмона-Моцкина-Шенберга) и априорное знание минимального значения функции. В методе **amsg2p** преобразование пространства выполняется только на тех итерациях, когда тупым является хотя бы один из углов – либо угол между двумя последовательными субградиентами (**g2**), либо угол между последним субградиентом и агрегатным вектором **p**, который является выпуклой комбинацией вычисленных на предыдущих итерациях субградиентов. Приведем результаты вычислительных экспериментов для минимизации овражных выпуклых функций с помощью методов **amsg2** и **amsg2p**.

Работа выполнена при поддержке НАНУ, проект ВФ.120.19, и Volkswagen Foundation, грант №90 306.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Стецюк П.И., “ r -алгоритмы и эллипсоиды”, *Кибернетика и системный анализ*, No. 1, 113–134 (1996).
- [2] Шор Н.З., *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения*, Киев: Наукова думка, (1979).
- [3] Стецюк П.И., “Ортогонализующие линейные операторы в выпуклом программировании”, *Кибернетика и системный анализ*, No. 3, 97–119 (1997).
- [4] Стецюк П.И., *Методы эллипсоидов и r -алгоритмы*, Кишинэу: Эврика, (2014).

Comparative Study of Algorithms for Projecting a Point onto an Ellipsoid

Тамасян Г.Ш., Аббасов М.Э., Просолупов Е.В., Чумаков А.А.

g.tamasyan@spbu.ru, abbasov.majid@gmail.com,

e.prosolupov@spbu.ru, andrew1991.spb@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет

Сравнительный анализ алгоритмов проецирования точки на эллипсоид

В работе продолжены исследования в области вычислительной геометрии [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

В докладе будет приведен сравнительный анализ трех алгоритмов по поиску проекции начала координат на эллипсоид: «метод выписанных сфер» [1], метод «заряженных шариков» [8, 10], метод гиподифференциального спуска [5, 6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Lin, S. P. Han, “On the distance between two ellipsoids”, SIAM J. Optim., vol. 13, pp. 298–308, 2002.
- [2] A.Yu. Uteshev, M.V. Yashina, “Computation of the Distance from an Ellipsoid to a Linear Surface and a Quadric in Rⁿ”, Dokl. Akad. Nauk, vol. 419, no. 4, pp. 471–474, 2008.
- [3] A.I. Kosolap, “Quadratic Optimization Problems of Computer Geometry”, Art. Int., no. 1, pp. 70-75, 2009.
- [4] D.M. Lebedev, L.N. Polyakova, The problem of projecting the origin on a quadric, Bull. St. Petersburg State Univ., no. 1, pp. 11–17, 2013.
- [5] Тамасян Г. Ш., Чумаков А. А. *Нахождение расстояния между эллипсоидами* // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21. № 3. С. 87–102.
- [6] Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш. *Поиск наименьшего расстояния между эллипсоидами методом сопряженных гипоградиентов* // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. С. 62–64.
- [7] G.Sh. Tamasyan, A.A. Chumakov, “Finding the distance between ellipsoids”, J. Appl. and Ind. Math., vol. 8, no. 3, pp. 400–410, 2014.
- [8] M.E. Abbasov New optimization algorithm for finding distance between two convex sets // “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP), 2015 International Conference, 2015. IEEE — P. 293–294.
- [9] Tamasyan G., Chumakov A. Finding the distance between the ellipsoid and the intersection of a linear manifold and ellipsoid // “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP), 2015 International Conference, 2015. IEEE — P. 357–360.
- [10] M.E. Abbasov Charged balls method // The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 27–29 August 2015, BOOK OF ABSTRACTS — Баку, — 2015. — P. 32.
- [11] Малозёмов В.Н., Тамасян Г.Ш. Два быстрых алгоритма проектирования точки на стандартный симплекс // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:5 (2016), 742–755.
- [12] Тамасян Г. Ш., Просолупов Е. В., Ангелов Т. А. *Сравнительный анализ двух быстрых алгоритмов проецирования точки на стандартный симплекс* // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. Т. 23. № 2. С. 100–123.

Huge-Scale Non-Smooth Convex Optimization in Traffic Flow Modeling

*Баймурзина Д.Р., Гасников А.В., Гасникова Е.В.,
Двуреченский П.Е., Ершов Е.И., Лагуновская А.А.*

*dilyara.rimovna@gmail.com, gasnikov.av@mipt.ru,
egasnikova@yandex.ru, pavel.dvurechensky@gmail.com,
e.i.ershov@gmail.com, a.lagunovskaya@phystech.edu*

Московский физико-технический институт, Институтский переулок, д. 9,
Московская область, г. Долгопрудный, 141700, Россия; Сколковский институт
науки и технологий, Территория Инновационного Центра “Сколково”, улица
Нобеля, д. 3, г. Москва, 143026, Россия; Институт прикладного анализа и
стохастики им. К. Вейерштрасса, Моренштрассе, 39, Берлин, 10117, Германия

Негладкая выпуклая оптимизация в задачах транспортного моделирования

В работе рассматриваются задачи негладкой выпуклой оптимизации, возникающие при поиске равновесного распределения транспортных потоков в мегаполисах. Исследуется поиск равновесия в BMW-модели (обычно кратко называемой моделью Бекмана) [1] и в модели стабильной динамики (называемой также моделью Нестерова–де Пальмы) [2]. Отличительной чертой возникающих в этих моделях задач оптимизации является большое число переменных. В основе предлагаемого подхода лежит построение двойственной задачи оптимизации и решение этой задачи универсальным градиентным методом, обладающим тремя важными для рассматриваемых задач свойствами. Во-первых, универсальный градиентный метод является методом первого порядка, а, значит, каждая его итерация не требует большого объема вычислений. Во-вторых, метод автоматически адаптируется к степени гладкости в окрестности текущей точки. Так, на участке где функция гладкая, скорость сходимости соответствует быстрому градиентному методу, на участке, где функция негладкая скорость сходимости соответствует субградиентному методу. В-третьих этот метод является прямо-двойственным, т.е. по информации, полученной при решении двойственной задачи, позволяет найти решение прямой задачи с той же точностью. Экспериментальная проверка показала, что предложенный подход действительно является эффективным. Поскольку рассматриваемые задачи оптимизации являются негладкими, нижняя оценка на число итераций метода первого порядка имеет вид [3] $\Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, где ε – требуемая точность. Предложенный подход позволяет решать эти задачи за число итераций $\Theta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Перейдем к более формальному описанию. Рассмотрим транспортную сеть, которую будем представлять ориентированным графом $\langle V, E \rangle$,

где V – множество вершин (как правило, можно считать, что $|E|/4 \leq |V| \leq |E|$), а E – множество ребер, $|E| = n$. Обозначим множество пар $w = (i, j)$ источник-сток через OD , d_w – корреспонденция, отвечающая паре w , x_p – поток по пути p ; P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции w (начинающихся в i и заканчивающихся в j), $P = \bigcup_{w \in OD} P_w$ – множество всех путей. Затраты на прохождения ребра $e \in E$ описываются функцией $\tau_e(f_e)$, где f_e – поток по ребру e . Обозначим f – вектор потоков по всем ребрам; x – вектор потоков по всем путям; $X = \left\{ x \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in OD \right\}$ – прямое произведение симплексов, задающее допустимое множество векторов потоков по путям;

$$\Theta = \|\delta_{ep}\|_{e \in E, p \in P} = \left\| \Theta^{\langle p \rangle} \right\|_{p \in P}, \quad \delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases}$$

матрица, задающая принадлежность ребра e пути p .

В BMW-модели в качестве функции затрат на прохождения ребра $e \in E$ обычно выбираются BPR-функции

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e \cdot \left(1 + \rho \cdot \left(f_e / \bar{f}_e \right)^4 \right),$$

где \bar{t}_e , \bar{f}_e заданные величины. В модели стабильной динамики

$$\tau_e(f_e) = \begin{cases} \bar{t}_e, & 0 \leq f_e < \bar{f}_e \\ [\bar{t}_e, \infty), & f_e = \bar{f}_e \end{cases}$$

Поиск равновесия Нэша–Вардропа в обеих моделях сводится [4] к решению следующей негладкой задачи выпуклой оптимизации

$$\min_{f=\Theta x, x \in X} \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e), \quad (1)$$

где $\sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz$ – выпуклые функции. Причиной негладкости этой задачи является быстро растущая или бесконечная производная целевой функции, приводящая к нелипшицевости ее градиента, обычно требуемой в гладкой оптимизации.

В случае BMW-модели двойственной задачей будет

$$\max_{t \in \text{dom } \sigma^*} \left\{ \sum_{w \in OD} d_w \min_{e \in E} \delta_{ep} t_e - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \right\}, \quad (2)$$

где

$$\sigma_e^*(t_e) = \frac{4}{5} \bar{f}_e \cdot \left(\frac{t_e - \bar{t}_e}{\bar{t}_e \cdot \rho} \right)^{1/4} (t_e - \bar{t}_e).$$

есть функция, сопряженная к $\sigma_e(f_e)$. Для модели стабильной динамики двойственной будет задача

$$\max_{t \geq \bar{t}} \left\{ \sum_{w \in OD} d_w \min_{e \in E} \delta_{ep} t_e + \langle \bar{f}, \bar{t} - t \rangle \right\}. \quad (3)$$

Для решения двойственной задачи в каждой модели применяется универсальный метод подобных треугольников (УМПТ) [5]. Для поиска субградиента целевой функции используется построение дерева кратчайших путей на транспортном графе с помощью алгоритма Дейкстры. В результате теоретическая верхняя оценка на число арифметических операций для достижения точности ε следующая $O\left(Sn \ln n \cdot \frac{Hd^2R^2}{\varepsilon^2}\right)$, где n – число ребер в графе, S – число источников в транспортной сети, H – максимальное число ребер в осмысленном пути, d – суммарный объем корреспонденций по всем парам источник-сток, R – расстояние от точки старта метода до решения. В проведенных численных экспериментах для транспортной сети города Анахайм (Anaheim) [6] с $n \simeq 10^3$, $S \sim 40$ метод позволил найти решение с точностью ε за время, пропорциональное $\frac{1}{\varepsilon}$.

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ 15-31-70001-мол_а_мос и гранта Президента РФ МК-1806.2017.9.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Patriksson M. *The traffic assignment problem. Models and methods*, Utrecht, Netherlands: VSP, 1994.
- [2] Nesterov Yu., de Palma A. “Stationary dynamic solutions in congested transportation Networks: Summary and Perspectives” *Networks Spatial Econ*, 3, No. 3, 371–395 (2003).
- [3] Немировский А.С., Юдин Д.Б. *Сложность задач и эффективность методов оптимизации*, М.: Наука, (1979)
- [4] Гасников А.В., Дорн Ю.В., Нестеров Ю.Е., Шпирко С.В. “О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков”, *Математическое моделирование*, 26, No. 6, 34–70 (2014). arXiv:1405.7630
- [5] Гасников А.В., Нестеров Ю.Е. “Универсальный метод для задач стохастической композитной оптимизации”, *ЖВМ и МФ*, 57, No. 7 (2017). arXiv:1604.05275
- [6] <https://github.com/bstabler/TransportationNetworks>

Section 6

Nonsmooth Methods in Game Theory

Stochastic Variational Formulation for the General Time-Dependent Cournot-Nash Principle

Barbagallo A., Bianco G.

annamaria.barbagallo@unina.it, serena.guarinolobianco@unina.it

Department of Mathematics and Applications “R. Caccioppoli”, University of
Naples Federico II, via Cintia - 80126 Naples, Italy

In the last years many authors (see [6, 7, 8, 9, 10, 11]) developed the study of stochastic variational inequalities and random equilibrium problems. Recently, a complete study on the stochastic variational inequalities is done in [12].

In the last decadence, the time-dependent variational formulation of the oligopolistic market equilibrium problem is introduced and studied intensively starting by [1]. In [3] and [4] the authors observed that during an economic crisis period the presence of production excesses can be due to a demand decrease in demand markets and, on the other hand, the presence of demand excesses may occur when the supply can not satisfy the demand especially for fundamental goods. Moreover, the presence of both production and demand excesses is a consequence of the fact that the physical transportation of commodity between a firm and a demand market is evidently limited, therefore, it is more realistic that some firms produce more fundamental good than they can send to all the demand markets and, on the other hand, some of the demand markets require more good.

The time-independent model in conditions of uncertainty in which both production and demand excesses occur was introduced in [2]. The development of the oligopolistic market equilibrium problem under conditions of uncertainty arises because the constraints or the data are often variable over time in a non-regular and unpredictable manner. It is sufficient to think about unpredictable events and sudden accidents. So we propose a model which is able to handle random constraints. Moreover, we choose for our model a Hilbert space setting, which allows us to obtain existence results and to perform a complete duality theory.

In this setting, we focus our attention on the study of a more general oligopolistic market equilibrium problem with uncertainty. In particular, we propose a time-dependent oligopolistic market equilibrium problem in presence of both production and demand excesses in condition of

uncertainty. Recently, a time-independent new weighted transportation model in conditions of uncertainty was introduced in [5].

The “natural” setting of the general random oligopolistic market equilibrium problem involving the time and random variable will be the Hilbert space $L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^k, \mathbb{P})$, endowed with the inner product denoted by $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

The model we will consider is the following: let P_i , $i = 1, \dots, m$ be m firms, that produce a homogeneous commodity and n demand markets Q_j , $j = 1, \dots, n$, that are generally spatially separated. Assume that the homogeneous commodity, produced by the m firms and consumed by the n markets, is considered depending by random variables. Let p_i , $i = 1, \dots, m$, denote the random variable expressing the nonnegative commodity output produced by firm P_i and suppose that $p_i = p_i(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$. Let q_j , $j = 1, \dots, n$, denote the random variable expressing the nonnegative demand for the commodity of demand market Q_j , namely $q_j = q_j(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$. Let x_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, denote the random variable expressing the nonnegative commodity shipment between the supply producer P_i and the demand market Q_j , namely $x_{ij} = x_{ij}(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$. In particular, let us set the vector $x_i(t, \omega) = (x_{i1}(t, \omega), \dots, x_{in}(t, \omega))$, $i = 1, \dots, m$, $\omega \in \Omega$, as the strategy vector for the firm P_i . Let ε_i , $i = 1, \dots, m$, denote the random variable expressing the nonnegative production excess for the commodity of the firm P_i , namely $\varepsilon_i = \varepsilon_i(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$. Let δ_j , $j = 1, \dots, n$, denote the random variable expressing the nonnegative demand excess for the commodity of the demand market Q_j , namely $\delta_j = \delta_j(t, \omega)$, $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

Let us suppose that the following feasibility conditions hold:

$$p_i(t, \omega) = \sum_{j=1}^n x_{ij}(t, \omega) + \varepsilon_i(t, \omega), \quad i = 1, \dots, m, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}, \quad (1)$$

$$q_j(t, \omega) = \sum_{i=1}^m x_{ij}(t, \omega) + \delta_j(t, \omega), \quad j = 1, \dots, n, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.} \quad (2)$$

More precisely, the quantity produced by each firm P_i must be equal to the commodity shipments from that firm to all the demand markets plus the production excess. Moreover, the quantity demanded by each demand market Q_j must be equal to the commodity shipments from all the firms to that demand market plus the demand excess.

Furthermore, we assume that the nonnegative commodity shipment between the producer P_i and the demand market Q_j belongs to $L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}_+, \mathbb{P})$ and has to satisfy two capacity constraints, namely there exist two

nonnegative random variables $\underline{x}, \bar{x} \in L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}_+^{mn}, \mathbb{P})$ such that

$$\begin{aligned} 0 \leq \underline{x}_{ij}(t, \omega) \leq x_{ij}(t, \omega) \leq \bar{x}_{ij}(t, \omega), \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \forall j = 1, \dots, n, \text{ a.e. in } [0, T], \mathbb{P} - \text{a.s.} \end{aligned} \quad (3)$$

Taking into account that the production and the demand excesses are nonnegative random variables, we can represent the feasible set in the following equivalent way:

$$\mathbb{K} = \left\{ \begin{array}{l} x \in L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}_+^{mn}, \mathbb{P}) : \\ \underline{x}_{ij}(t, \omega) \leq x_{ij}(t, \omega) \leq \bar{x}_{ij}(t, \omega), \quad \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n, \\ \text{a.e. in } [0, T], \mathbb{P} - \text{a.s.}, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij}(t, \omega) \leq p_i(t, \omega), \quad \forall i = 1, \dots, m, \text{ a.e. in } [0, T], \mathbb{P} - \text{a.s.}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij}(t, \omega) \leq q_j(t, \omega), \quad \forall j = 1, \dots, n, \text{ a.e. in } [0, T], \mathbb{P} - \text{a.s.} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Let us note that \mathbb{K} is a convex, closed and bounded of the Hilbert space $L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}_+^{mn}, \mathbb{P})$.

Let us associate a random variable denoting the production cost f_i , $i = 1, \dots, m$ with each firm P_i , and assume that the production cost of a firm P_i may depend upon the entire production pattern, namely, $f_i = f_i(t, x(t, \omega))$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. Analogously, let us associate a random variable denoting the demand price for unity of the commodity d_j , $j = 1, \dots, n$, with each demand market Q_j , and assume that the demand price of a demand market Q_j may depend upon the entire consumption pattern, namely, $d_j = d_j(t, x(t, \omega))$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. Since production excesses occur, we consider the random variable g_i , $i = 1, \dots, m$, expressing the storage cost of the commodity produced by the firm P_i and assume that this cost may depend upon the entire production pattern, namely, $g_i = g_i(t, x(t, \omega))$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. Finally, let c_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, denote the random variable expressing the transaction cost, which includes the transportation cost associated with trading the commodity between firm P_i and demand market Q_j . In our model, we assume that the transaction cost depends upon the entire shipment pattern, namely, $c_{ij} = c_{ij}(t, x(t, \omega))$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. As a consequence, the

profit v_i of the firm P_i , $i = 1, \dots, m$, is

$$\begin{aligned} v_i(t, x(t, \omega)) &= \sum_{j=1}^n d_j(t, x(t, \omega)) x_{ij}(t, \omega) - f_i(t, x(t, \omega)) - g_i(t, x(t, \omega)) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^n c_{ij}(t, x(t, \omega)) x_{ij}(t, \omega), \quad \text{a.e. in } [0, T], \mathbb{P} - \text{a.s.}, \end{aligned} \tag{5}$$

namely, it is equal to the price that the demand markets are disposed to pay minus the production cost, the storage cost and the transportation cost.

In our model the m firms supply the commodity in a noncooperative fashion, each one trying to maximize its own profit function considered the optimal distribution pattern for the other firms, in a nondeterministic framework. We shall make suitable assumption (as in [2]) on the payoff functions $v_i(t, x(t, \omega))$ in order to determine a nonnegative commodity distribution matrix-function x for which the m firms and the n demand markets will be in a state of equilibrium as defined below with the random generalized Cournot-Nash principle. In particular, we will prove an equivalence as in the following statement

- $x^* \in \mathbb{K}$ is a general random oligopolistic market equilibrium if and only if it satisfies the stochastic variational inequality

$$\begin{aligned} &\langle\langle -\nabla_D v(t, x^*), x - x^* \rangle\rangle = \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i(\xi, x^*(\omega))}{\partial x_{ij}} (x_{ij}(\xi, \omega) - x_{ij}^*(\xi, \omega)) d\xi d\mathbb{P} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{K}. \end{aligned} \tag{6}$$

Moreover, we will provide existence results for the operator $A : L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{P}) \rightarrow L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{P})$ defined by $A = \left(-\frac{\partial v_i}{\partial x_{ij}}(t, x^*) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$,

where the variables belong to the feasible set (4). We will prove that if one of the following conditions hold

- A is B-pseudomonotone or F-hemicontinuous,
 - A is K-pseudomonotone and lower hemicontinuous along line segments,
- then the stochastic variational inequality:

$$\langle\langle Ax^*, x - x^* \rangle\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{K}, \tag{7}$$

admits a solution $x^* \in \mathbb{K}$.

Moreover, a stochastic regularity theorem will be proved. Indeed it will be shown that a solution of (6) is stochastic continuous on $(0, T)$, provided

that the feasible set \mathbb{K} is a nonempty, closed, convex and bounded subset verifying Kuratowski's convergence property.

References

- [1] A. Barbagallo, M.-G. Cojocaru, Dynamic equilibrium formulation of oligopolistic market problem, *Math. Comput. Model.*, 49, 966–976 (2009).
- [2] A. Barbagallo, G. Di Meglio, P. Mauro, A stochastic variational approach to a general oligopolistic market equilibrium problem with uncertainty, submitted.
- [3] A. Barbagallo, P. Mauro, Evolutionary variational formulation for oligopolistic market equilibrium problems with production excesses, *J. Optim. Theory Appl.*, 155, 1–27 (2012).
- [4] A. Barbagallo, P. Mauro, Time-dependent variational inequality for an oligopolistic market equilibrium problem with production and demand excesses, *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, art. no. 651975 (2012).
- [5] A. Barbagallo, G. Scilla, Stochastic weighted variational inequalities in non-pivot Hilbert spaces with applications to a transportation model , submitted.
- [6] I.V. Evstigneev, M.I. Taksar, Equilibrium states of random economies with locally interacting agents and solutions to stochastic variational inequalities in $\langle L_1, L_\infty \rangle$, *Ann. Oper. Res.*, 114, 145–165 (2002)
- [7] A. Ganguly, K. Wadhwa, On random variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 206, 315–321 (1997)
- [8] J. Gwinner, F. Raciti, On a class of random variational inequalities on random sets, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 27, 619–636 (2006)
- [9] J. Gwinner, F. Raciti, Random equilibrium problems on networks, *Math. Computer Model.*, 43, 880–891 (2006)
- [10] J. Gwinner, F. Raciti, Some equilibrium problems under uncertainty and random variational inequalities, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 200, 299–319 (2012)
- [11] G. Gürkan, A.Y. Özge, S.M. Robinson, Sample-path solution of stochastic variational inequalities, *Math. Program.*, 84, 313–333 (1999)
- [12] R.T. Rockafellar, R.J.-B. Wets, Stochastic variational inequalities: single-stage to multistage, *Math. Program.*, Ser. B, DOI 10.1007/s10107-016-0995-5

Software for Pareto Set Reduction

Baskov O., Noghin V.

ov.japh@gmail.com, noghin@gmail.com

Saint-Petersburg State University, Universitetsky pr. 35, Petrodvorets,
Saint-Petersburg, 198504, Russia

Denote by X a (crisp) set of feasible alternatives. There are m numerical functions f_1, \dots, f_m defined on the set X , $m \geq 2$. They form the vector

criterion $f = (f_1, \dots, f_m)$ that takes values in the m -dimensional vector space R^m .

Suppose that the Decision Maker (DM) is not always able to decide unambiguously which of the two given alternatives is preferable. Accordingly, we consider a DM's fuzzy preference relation defined on the set X with a membership function μ_X . For alternatives x_i, x_j , the number $\mu_X(x_i, x_j)$ represents the degree of DM's confidence in that the alternative x_i is preferable to x_j .

Now, let us specify all elements of the *fuzzy multicriteria choice problem* in terms of alternatives:

- 1) the set of feasible alternatives X ,
- 2) a vector criterion f defined on the set X ,
- 3) a fuzzy preference relation with a membership function μ_X that is defined on the Cartesian product $X \times X$ and takes values within the interval $[0, 1]$.

A solution of the fuzzy multicriteria choice problem is a fuzzy set of chosen alternatives that we shall denote by $C(X)$, $C(X) \subset X$ with a membership function $\lambda_{C(X)}$.

Let $Y = f(X)$, and μ_Y be a fuzzy relation induced by μ_X on Y , i.e., $\mu_X(x_i, x_j) = \mu_Y(y_i, y_j)$, where $y_i = f(x_i), y_j = f(x_j)$.

We accept the following four axioms [1].

Axiom 1. For each pair of alternatives $x_i, x_j \in X$ that satisfies $\mu_X(x_i, x_j) \in (0, 1]$, we have the inequality $\lambda_X^C(x_j) \leq 1 - \mu_X(x_i, x_j)$.

Axiom 2. A fuzzy preference relation with a membership function μ_X (hence, with a corresponding membership function μ_Y) is irreflexive and transitive. Moreover, there exists an irreflexive and transitive fuzzy relation defined in the whole criterion space R^m with a membership function μ such that its restriction to Y coincides with the preference relation μ_Y .

Axiom 3. Each of the criteria f_i is compatible with the preference relation μ , i. e., for all $i = 1, 2, \dots, m$ and $y = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_m)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{i-1}, \bar{y}_i, y_{i+1}, \dots, y_m)$, $y_i > \bar{y}_i$, it follows that $\mu(y, \bar{y}) = 1$.

The compatibility of a given criterion with a preference relation means that the DM is interested in the largest possible values of this criterion, other things being equal.

Axiom 4. The fuzzy preference relation μ is invariant with respect to a linear positive transformation, i. e. $\mu(y, \bar{y}) = \mu(ky + c, k\bar{y} + c)$ for all $k > 0$ and $c \in R^m$.

Under these axioms, the set of chosen alternatives $C(X)$ must be a subset of a (crisp) Pareto set $P_f(X)$ with respect to the vector criterion f : $C(X) \subset P_f(X) = \{x \in X : \nexists x^* \in X : f(x^*) \geq f(x)\}$. In practice, the Pareto set can

still be too large for manual selection of the chosen alternatives. Thus, we develop a method of Pareto set reduction.

Consider two groups of criteria indices $A, B \subset \{1, 2, \dots, m\}$ such that $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$. We say that there is a given *quantum of fuzzy information* with the groups of criteria A and B , two collections of positive parameters w_i for all $i \in A$ and w_j for all $j \in B$ and a degree of confidence $\mu^* \in (0, 1]$ if the equality $\mu(y, \bar{y}) = \mu^*$ holds for all vectors $y, \bar{y} \in R^m$ satisfying $y_i - \bar{y}_i = w_i$ for all $i \in A, \bar{y}_j - y_j = w_j$ for all $j \in B, y_k = \bar{y}_k$ for all $k \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus (A \cup B)$.

Given a list of quanta of fuzzy information, we may construct a fuzzy set $P_g(X)$ that serves as an upper bound on the set of chosen alternatives: $C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X)$. The set $P_g(X)$ is a fuzzy Pareto set with respect to a generalized vector criterion g , consisting of a number of numerical functions g_1, \dots, g_n defined on X and corresponding membership degree bounds $\beta_1, \dots, \beta_n: \lambda_{P_g(X)}(x) = \min_{x^* \in X \setminus \{x\}} \max\{0; \beta_k, k: g_k(x) > g_k(x^*)\}$ [3]. The components of the vector criterion g are found by solving a problem of constructing the generators of a dual fuzzy polyhedral cone.

We present the ParSetRe program that implements the described approach. This program assists the DM in selecting the best choice from a given list of alternatives by gradually reducing the list using quanta of fuzzy information.

Work with the program starts with specifying the vector criterion f . The DM should give each criterion in f a name and specify whether it should be maximized or minimized. Internally those criteria f_k that are to be minimized are replaced by criteria $-f_k$, so in the following discussion we may assume that every criterion is to be maximized.

The next step is listing the set of feasible alternatives X . For each alternative $x \in X$ the DM must specify the values $f(x)$ of all criteria. After this stage all alternatives that are not Pareto optimal are eliminated.

Next comes the main part: the DM is asked to provide quanta of fuzzy information for further reduction of the set of choices. There are several options to do this:

- 1) compare a pair of criteria and decide whether one of them feels more important than the other;
- 2) compare two choices and decide whether one of them is better than the other;
- 3) add a quantum manually.

Addition of every quantum leads to the reduction of the set of feasible alternatives. The described approach allows to utilize the quanta one by one, there is no need to specify all quanta beforehand. The DM can always review the results and either adjust already given information, or specify new quanta

and continue the process of reduction until it becomes possible to determine the solution of the multicriteria choice problem: the set of chosen alternatives $C(X)$.

References

- [1] V. Noghin, *Pareto set reduction: an axiomatic approach*, Fizmatlit, Moscow (2017).
- [2] V. Noghin, O. Baskov, “Pareto Set Reduction Based on an Arbitrary Finite Collection of Numerical Information on the Preference Relation”, *Doklady Mathematics*, 83, No. 3, 418–420 (2011).
- [3] O. Baskov, “An algorithm for Pareto set reduction using fuzzy information on decision-maker’s preference relation”, *Scientific and Technical Information Processing*, 42, No. 5, 382–387 (2015).

On Some Properties of Superposition of Optimality Principles on the Space of TU-Games

Chistyakov S., Vasetsov M.

svch50@mail.ru, matvey_v@yahoo.com

Saint-Petersburg State University, Universitetskii prospekt 35, Peterhof,
Saint-Petersburg, 198504, Russia; OOO LANIT-TERCOM, Universitetskii
prospekt 28, Peterhof, Saint-Petersburg, 198504, Russia

An impetus to the development the theory of classical cooperative games or, more exactly, the theory of games with transferable utility (the theory of TU-games for short) was monograph [1]. The object in the theory of TU-games is the so-called problem of the imputation of joint results, obtained after some activity, among several counter parties, called the players [2].

By the optimality principle or, perhaps more precisely, by the principle of achieving a compromise in a given class of TU-games an operator that maps this class of games into itself can be understood. Since any additive game has only one imputation, then the optimality principle is said to be perfect, if it maps each game from a relevant space of games into an additive game [3]. The optimality principle, is called quasiperfect, if some of its degree is a perfect optimality principle. A class of minimax optimality principles forms a wide class of quasiperfect optimality principles [4], [5].

Further, we will describe the conditions under which a superposition of optimality principle with quasiperfect optimality principle is also a quasiperfect optimality principle. But first, for exact formulation of the results, we will recall and refine necessary definitions.

Let $I = \{1, 2, \dots, n\}$ be the set of players. Any function $v : 2^I \rightarrow R$ is called the TU-game, or just a game for short, if the following conditions hold:
 1) $v(\emptyset) = 0$ and 2) $v(I) \geq \sum_{i \in I} v_i$, where $v_i = v(\{i\})$.

We call the set of TU-games *a space of TU-games* (with the set of players I), and denote it by $\mathcal{V}(I)$ [3].

Let $E(v)$ be the set of imputations in a game $v \in \mathcal{V}(I)$, i.e. the set of all vectors $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ such that $x_i \geq v_i \forall i \in I$ and $\sum_{i \in I} x_i = v(I)$. Let $C(v)$ denote the core in the game $v \in \mathcal{V}(I)$, i.e. the set of all vectors $x \in E(v)$ such that $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \forall S \in 2^I \setminus \{\emptyset, I\}$.

Now we will admitt the following definitions, based on [3], [4] and [5].

Definition 1 Let game $v \in \mathcal{V}(I)$.

- 1) We will call any non-empty set $M \subset E(v)$ **a compromise** in game v .
- 2) We will call any function $w : 2^I \rightarrow R$ **a basis of compromise** M in game v , if

$$w(S) = \inf_{x \in M} \sum_{i \in S} x_i \quad \forall S \neq \emptyset, \quad w(\emptyset) = 0.$$

(It is easily shown that the basis w of any comromise M in game $v \in \mathcal{V}(I)$ also belongs to $\mathcal{V}(I)$ and, moreover, the basis w is a superadditive game).

- 3) Let the set of all games $w \in \mathcal{V}(I)$, each of which is a basis of some compromise in the game v be W_v . We will call any non-empty subset $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}(I)$ which contains set W_v together with each game v **a subspace of space** $\mathcal{V}(I)$.
- 4) By **optimality principle**, (or more exactly, by the **principle of achieving a compromise** on a subspace $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}(I)$), we mean any operator $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ such that $\mathcal{A} \circ v \in W_v \quad \forall v \in \mathcal{V} \subset \mathcal{V}(I)$.
- 5) Let $\mathcal{W}(I)$ be the set of all games, each of which is the basis of some compromise in game $v \in \mathcal{V}(I)$. We will call the optimality principle \mathcal{A} on subspace \mathcal{V} :
 - a) **monotone**, if $\mathcal{A} \circ v \geq v \quad \forall v \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}(I)$, i.e. if $(\mathcal{A} \circ v)(S) \geq v(S) \quad \forall S \subset I$ and $\forall v \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}(I)$;
 - b) **perfect**, if $\forall v \in \mathcal{V}$ game $\mathcal{A} \circ v$ is an additive game, (an additive function of set);
 - c) **finally perfect**, if $\forall v^{(0)} \in \mathcal{V}$ sequence $v^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, converges to an additive game $v^{(*)} \in \mathcal{V}(I)$, where

$$v^{(k)} = \mathcal{A} \circ v^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (1)$$

- d) **quasiperfect**, if k -th degree of operator \mathcal{A} , $k = 1, 2, \dots$, is the perfect optimality principle.

As regards content, any game $v \in \mathcal{V}(I)$ can be interpreted as a general problem aggregate income $v(I)$ distribution, on condition that each coalition $S \subset I$ claims $v(S)$ as a part of this income. Hence, the iterative sequence (1) can be interpreted as a sequential procedure for correction of coalition's claims

based on optimality principle \mathcal{A} . Moreover, in case optimality principle \mathcal{A} is monotone, we have

$$v^{(1)} \leq v^{(2)} \leq \cdots \leq v^{(k)} \leq \cdots . \quad (2)$$

However, as it follows from definition 1.2, if $w \in \mathcal{W}(I)$, i.e. if game w is the basis of some compromise in some game $v \in \mathcal{V}(I)$, then $C(w) \neq \emptyset$. Therefore, as it follows from definition 1.4, $C(v^{(k)}) \neq \emptyset$ for each game of sequence (1). At the same time, for monotone optimality principle \mathcal{A} , defined on subspace \mathcal{V} , owing to inequalities (2), the following inclusions hold

$$C(v^{(1)}) \supset C(v^{(2)}) \supset \cdots \supset C(v^{(k)}) \supset \cdots . \quad (3)$$

Since game $v^{(1)} = \mathcal{A} \circ v^{(0)}$ is the basis of some compromise in game $v^{(0)}$, then

$$E(v^{(0)}) \supset C(v^{(1)}), \quad (4)$$

and this inclusion holds for any game $v^{(0)} \in \mathcal{V}$, and, in particular, for the game such that $C(v^{(0)}) = \emptyset$.

The set of imputations in game $v^{(0)}$ could be called as an initial area of compromises in this game. Hence, inclusions (3) and (4) mean that, for monotone optimality principle \mathcal{A} on subspace \mathcal{V} , iterative sequence (1) generates a narrowing process for the initial area of compromises. For finally perfect or, especially, quasiperfect optimality principle, this process leads to an unambiguous solution of the imputation problem in game $v^{(0)}$, and, to be exact, to a compromise

$$\{x^*\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} C(v^{(k)}), \quad (5)$$

consisting of one and only one imputation $x^* \in E(v^{(0)})$. This finally follows from the fact that in the given case sequence (3) converges to some additive game v^* , but since any additive game has only one imputation x^* , we have $x^* = E(v^*) = C(v^*)$.

It is noteworthy that, as it follows from definition 1.2 and 1.4, any additive game $v \in \mathcal{V}$ is a fixed point of each optimality principle \mathcal{A} on subspace \mathcal{V} .

Now we introduce the following new definition.

Definition 2 *Optimality principle $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ on subspace $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}(I)$ keeps the order, if $\mathcal{A} \circ v' \geq \mathcal{A} \circ v''$, for any games $v', v'' \in \mathcal{V}$ such that $v' \geq v''$.*

The main result of the research is the following theorem.

Theorem *If each of optimality principles \mathcal{A}_1 and \mathcal{A}_2 on subspace $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}(I)$, is monotone and, besides, if one of them is quasiperfect and keeps the*

order on \mathcal{V} , then each of superpositions $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1$ and $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2$ of these optimality principles, is also a quasiperfect optimality principle.

References

- [1] J. Von Neumann and O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press, (1944).
- [2] J. Rosenmüller, *Kooperative Spiele und Märkte. Lecture Notes in Operations Res. and Math. Systems*, Vol. 53., Berlin: Springer-Verlag, (1971).
- [3] S.V. Chistyakov, "The Dynamical Aspect of the Solution of Classical Cooperative Games", *Rus. Acad. Nauk Dokl.* Vol. 330, No. 6, 707-709 (in Russian) (1993). English translation (1993) in *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, Vol. 47, No. 3 (1993).
- [4] M.E. Vasetsov and S.V. Chistyakov "On Some Quasiperfect Optimality Principles of Cooperative Games" *Vestnik St.Petersburg University*, No. 22 (Ser. Math. Mekh. Astr., Vyp. 4, 3-9.) (in Russian), (1998).
- [5] S.V. Chistyakov and S.Y. Mikhajlova "On Some Properties of Superposition of Optimality Principles for Cooperative Games". *International Game Theory Review*, Vol. 2, No. 1, 107-116 (2000).

Dynamic Stability of the Shapley Value in the Differential Resource Extraction Game

Ershov D.

turnament17@mail.ru

Department of Mathematical Games Theory and Statistical Decisions, Saint Petersburg State University 198504, Universitetskiy prospect, 35, Saint Petersburg, Russia

Introduction

In the [1], [2] was shown and discussed in detail an algorithm for solving differential cooperative resource extraction game by two competing firms. This algorithm searches for Nash equilibrium in differential two-person game in normal form, based on the Isaacs-Bellman equations. The corresponded system of differential equations was solved numerically, since the analytic solutions were not possible. The obtained solutions doesn't give any idea about the structure of the solution in general case.

In this paper we have tried to ensure that the resulting system of Isaacs-Bellman equations has an analytic solution. The resulting model has an interpretation similar to the models [1],[2], and to find Nash equilibrium we use the Isaacs-Bellman equations. As a principle of optimality the Shapley value was chosen. We construct the time consistent Shapley value distribution procedure which coincides with the derivative of the Shapley

value. We tested its sign and found the conditions when the resulting solution to a cooperative game will be dynamically stable.

Formulation of the problem

Consider the differential resource extraction game $\Gamma(x_0, T)$ by two companies that have a license for the production of this resource in the interval $[0, T]$ [1]. Resource deposits $y = e^x, x \in X \subset R$ change in accordance with the equation:

$$\dot{e^x} = e^{x(s)} \dot{x}(s) = a - u_1(s, x) - u_2(s, x), e^{x(0)} = x_0 \quad (1)$$

where $u_1(s, x) \in U_1 \subset C([0, T] \times [0, \infty)), u_2(s, x) \in U_2 \subset C([0, T] \times [0, \infty))$ are the level of resource extraction by players 1 and 2 respectively, $a = \text{const}$ determines the rate of increase of the resource. Denote by $r = \text{const}$ the discount coefficient, and the cost of resource extraction by player i is equal to a constant $c_i = \text{const}$, whereas the cost of resource extraction for each player can be assumed as $\frac{c_i}{2} u_i^2(s)$. Instant win of player i is equal to:

$$H_i(t, x; u_1, u_2) = u_i(t, x) - \frac{c_i}{2} u_i^2(t, x), i = 1, 2.$$

Consider first the non-cooperative case. Winnings are transferable over time and between players. At time t_0 win of player i is equal to:

$$\begin{aligned} K_i(x_0, T; u_1, u_2) &= \int_0^T \left[u_i(s, x(s)) - \frac{c_i}{2} u_i^2(s, x(s)) \right] e^{-rs} ds + \\ &+ qe^{-rT+x(T)} \rightarrow_{u_i} \max \end{aligned}$$

Searching Nash equilibrium

Denote by $\left[u_1^{(0)*}(t, x), u_2^{(0)*}(t, x) \right]$ the Nash equilibrium [3] in game $\Gamma(x_0, T)$. To find it, use the Isaacs - Bellman equations:

$$\begin{aligned} -V_t^{(0)i}(t, x) &= \max_{u_i} \left\{ \left(u_i(t, x) - \frac{c_i u_i^2(t, x)}{2} \right) e^{-rt} + \right. \\ &\quad \left. + V_x^{(0)i}(t, x) (e^{-x} (a - u_1(t, x) - u_2(t, x))) \right\}, i = 1, 2, \\ V^{(0)i}(T, x) &= qe^{x(T)-rT}, \end{aligned} \quad (2)$$

Maximizing in (2) we find the Nash equilibrium:

$$u_i^{(0)*}(t, x) = \frac{1 - V_x^{(0)i}(t, x)e^{rt-x}}{c_i}, i = 1, 2. \quad (3)$$

Here $V^{(t_0)i}(t, x)$ is a payoff of player i in Nash equilibrium in the subgame from initial state x with duration $T - t$ of the game $\Gamma(x_0, T)$, $V^{(0)i}(t, x) : [0, T] \times R^n \rightarrow R$. Substitute (3) in (2). We seek a solution in the form:

$$V^{(0)i}(t, x) = e^{-rt}(A_i(t)e^x + B_i(t)), i = 1, 2. \quad (4)$$

Substituting (3) and (4) in (2) we get the system of differential equations for $A_i(t), B_i(t)$. Solving this system we find the functions $A_i(t), B_i(t)$.

Now we can find the trajectory corresponding to Nash equilibrium (3). We shall call it "optimal trajectory" and denote $x^*(t)$. The optimal trajectory is:

$$x^*(t) = \ln \left((a - c)t + \frac{cq e^{-rT}}{r} (e^{rt} - 1) + e^{x_0} \right). \quad (5)$$

Function $V^{(t_0)i}(t, x)$ is equal to:

$$\begin{aligned} V^{(0)i}(t, x^*(t)) &= e^{-rT} \left(-\frac{1}{2rc_i} + qe^{x_0} - q(c - a)T \right) + \frac{q^2}{2rc_i} e^{2r(t-T)-rt} + \\ &+ \frac{q^2}{r} \left(\frac{1}{2c_i} + \frac{1}{c_j} \right) e^{-rT} - \frac{cq^2 e^{-2rT}}{r} + \frac{e^{-rt}}{2rc_i}, \\ c &= \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_j}, i, j = 1, 2, i \neq j. \end{aligned} \quad (6)$$

Cooperative case

We now turn to the situation in which the players take a decision on cooperation. Let $K_c(x_0, T; (u_1, u_2))$ be a win of coalition $[1, 2]$ in the game $\Gamma(x_0, T)$. Then:

$$\begin{aligned} K_c(T; (u_1, u_2)) &= \int_0^T \left[u_1(s, x) - \frac{c_1}{2} u_1^2(s, x) \right] e^{-rs} ds + \\ &+ \int_0^T \left[u_2(s, x) - \frac{c_2}{2} u_2^2(s, x) \right] e^{-rs} ds + 2qe^{rT+x(T)} \rightarrow_{u_1, u_2} \max. \end{aligned}$$

Denote by $W^{(0)}(t, x)$ maximal joined payoff of coalition $[1, 2]$ in the subgame from initial state x with duration $T - t$ of the game $\Gamma(x_0, T)$. Using Isaacs-Bellman equations, we obtain:

$$\begin{aligned} -W_t(t, x) &= \max_{u_1, u_2} \left\{ \left(u_1 - \frac{c_1 u_1^2}{2} \right) e^{-rt} + \left(u_2 - \frac{c_2 u_2^2}{2} \right) e^{-rt} + \right. \\ &\quad \left. + W_x(t, x) (e^{-x} (a - u_1 - u_2)) \right\}, \quad W(T, x) = 2qe^{x(T)-rT}. \end{aligned} \quad (7)$$

Denote by $u^{(0)*}(t, x) = \{u_1^{(0)*}(t, x), u_2^{(0)*}(t, x)\}$ the pair of strategies which define the situation of the Nash equilibrium in cooperative variant of the game $\Gamma(x_0, T)$. Maximizing in (7) we find the Nash equillibrium:

$$u_i^{(0)*}(t, x) = \frac{1 - W_x^{(0)i}(t, x)e^{rt-x}}{c_i}. \quad (8)$$

We seek function $W^{(0)}(t, x)$ in the form:

$$W^{(0)}(t, x) = e^{-rt}(A(t)e^x + B(t)). \quad (9)$$

The cooperative trajectory $x_c^*(t)$ is

$$x_c^*(t) = \ln \left((a - c)t + \frac{2cq e^{-rT}}{r} (e^{rt} - 1) + e^{x_0} \right), c = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}. \quad (10)$$

Let us observe the behaviour of maximal joined payoff of coalition [1, 2] along cooperative trajectory:

$$\begin{aligned} W^{(0)}(t, x_c^*(t)) &= \frac{ce^{-rt}}{2r} + e^{-rT} \left(\frac{c}{2r} + 2qe^{x_0} - 2q(c-a)T \right) + \\ &+ \frac{2cq^2}{r} e^{2r(t-T)-rt} + \frac{2cq^2}{r} e^{-rT} - \frac{4cq^2}{r} e^{-2rT}. \end{aligned} \quad (11)$$

Investigation of dynamic stability the Shapley value

Shapley value [4] in the case of two players is calculated as follows:

$$Sh_i(t) = V^{(0)i}(t, x) + \frac{W^{(0)}(t, x) - V^{(0)1}(t, x) - V^{(0)2}(t, x)}{2}. \quad (12)$$

Substituting (6),(5),(11) and (10) in (12) we will get:

$$\begin{aligned} Sh_i(t) &= \frac{e^{-rt}}{2rc_i} + e^{-rT} \left(-\frac{1}{2rc_i} + qe^{x_0} - q(c-a)T \right) + \\ &+ q^2 \left(\frac{3}{4rc_i} + \frac{5}{4rc_j} \right) e^{2r(t-T)-rt} + \frac{q^2}{r} \left(\frac{3}{4c_i} + \frac{5}{4c_j} \right) e^{-rT} - \frac{2cq^2}{r} e^{-2rT}, \\ c &= \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_j}, i, j = 1, 2, i \neq j. \end{aligned} \quad (13)$$

Let us denote $\beta_i(t)$ the imputation distribution procedure (IDP) which coinsides with the derivative of the Shapley value. It is equal to:

$$\beta_i(t) = \frac{e^{-2rT} (-3c_i q^2 e^{rt} - 5c_j q^2 e^{rt} + 2c_j e^{r(2T-t)})}{4c_i c_j}, i = 1, 2. \quad (14)$$

Theorem 1. The following conditions provide non-negativity of the division of IDP for the Shapley value:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4c_1}q^2 + \frac{5}{4c_2}q^2 - \frac{1}{2c_2} &< 0, \\ \frac{3}{4c_2}q^2 + \frac{5}{4c_1}q^2 - \frac{1}{2c_1} &< 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Proof. The derivative of $\beta_i(t)$ is equal to:

$$\beta'_1(t) = \frac{e^{-2rT}(-3c_1q^2e^{rt} - 5c_2q^2e^{rt} - 2c_2e^{r(2T-t)})}{4c_1c_2} < 0.$$

Hence function $\beta_i(t)$ is decreasing over time on the interval $[0, T]$ and reaches its minimum at $t = T$. Substituting $t = T$ in (14) will give us these conditions.

Conclusion

On the basis of our paper players can make predictions about the prospects for profitable extraction of limited resources in a competitive environment. It has been proved that the best behavior of the two companies is cooperation. The economic interpretation of the results is quite clear, too.

The non-trivial point in this research is non-negativity conditions of the function $\beta_i(t)$ which represents the instantaneous payoff of player i under cooperation. In many other cases the components of time consistant imputation distribution procedure as derivative of the Shapley value may take negative values which in real life situations trouble their implementation.

References

- [1] Zenkevich N. A., Petrosyan L. A., Yeung D. W. K.: Dynamic Games and Their Application in Management. SPb: Graduate School of Management, 2009, 415p.
- [2] Petrosyan L. A., ZenkevichN. A., Shevkoplyas E. V.: Game Theory: 2nd Edition, Revised and Enlarged. SPb.: BHV-Petersburg, 2012, 424p.
- [3] Nash J. F. Equilibrium in n -person Games// Proc. Nat. Acad. Sci., USA. Vol. 36, 1950. P. 48–49.
- [4] Shapley L. S. A Value for n -person Games// Contributions to the Theory for Games II/ eds Luce R. D. and Tucker A. W. Princeton: N. J. Princeton Univercity Press, 1953. P. 307–317.

On the Superadditivity of a Characteristic Function in Cooperative Differential Games with Negative Externalities

Gromova E., Malakhova A., Marova E.

*e.v.gromova@spbu.ru, nastyusha-mishka@mail.ru,
marovaek@gmail.com*

Saint-Petersburg State University, Universitetskii prospekt 35, Petergof,
Saint-Petersburg, 198504, Russian Federation

Most cooperative games are described by a characteristic function and the problem of construction of such a function is of particular importance. There are different methods to construct a characteristic function leading to the so-called α , β , γ and δ -characteristic functions as well as the recently introduced ζ -characteristic function.

When solving various economical problems related to ecological management it is common to use game-theoretic models with negative externalities. In [1], it was shown that for cooperative games with negative externalities the δ -characteristic function is superadditive. However, this result does not take into account possible constraints on the control, a typical situation in practice.

In this contribution, an example of non-superadditive δ -characteristic function for a differential game with negative externalities is presented. Also, we discuss the superadditivity property for different classes of characteristic functions.

Consider a n -player cooperative differential game $\Gamma(x_0, T - t_0)$ with prescribed duration $T - t_0$ which evolves on the interval $t \in [t_0, T]$ from the initial state $x_0 \in R^n$, governed by differential equations

$$\dot{x} = f(x, u_1, \dots, u_n), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$x \in R^n$, $u_i \in U_i \subset compR^k$, $i \in \overline{1, n}$, and with payoff functions

$$K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^T h_i(x, u_1, \dots, u_n) dt,$$

where $x(t)$ is the solution of the system (1) under controls $u = (u_1, \dots, u_n)$.

We consider the cooperative form of the game $\Gamma(x_0, T - t_0)$. This means that all players join to maximize their total payoff

$$V(N, x_0, T - t_0) = \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^T h_i(x, u_1, \dots, u_n) dt. \quad (2)$$

The controls $\{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ which maximized (2) are said to be optimal controls and the corresponding trajectory $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$ is said to be the cooperative trajectory.

We assume that trajectory $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$ exists and is unique. The class of the strategies in differential games may differ depending on the particular problem. However, most often the open-loop $u_i(t)$ or the close-loop $u_i(x, t)$ classes of controls are used. Within this framework we consider the strategy of the i -th player to be the function $u_i(\cdot)$ which takes values in the set of admissible instantaneous controls U_i .

To define the cooperative game we have to construct the characteristic function (c.f.) $V(S, x_0, T - t_0)$ for every coalition $S \subset N$ in the game $\Gamma(x_0, T - t_0)$. In the modern literature under the characteristic function in cooperative games is understood as a mapping from the set of all possible coalitions:

$$V(\cdot) : 2^N \rightarrow R,$$

$$V(\emptyset) = 0.$$

Note that the value of the characteristic function for the grand coalition N equals to $V(N, x_0, T - t_0)$. There are several main approaches to the construction of the characteristic function which shows the power of the coalition S (see, for example, [1], [2]). The most commonly used classes of characteristic functions can be indicated in the order that they appear as α -, β -, γ -, δ -, ζ - characteristic function.

The value $V(S)$ can be interpreted as a power of the coalition S . The important property is the property of superadditivity:

$$V(S_1 \cup S_2, x_0, T - t_0) \geq V(S_1, x_0, T - t_0) + V(S_2, x_0, T - t_0),$$

$$\forall S_1, S_2 \subseteq N, S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

However, the use of superadditive characteristic function in solving various problems in the field of cooperative game theory in static and dynamic setting, provides a number of advantages such as:

1. provides the individual rationality for cooperative solutions,
2. encourages players to create large coalitions and eventually unite into a Grand coalition N ,
3. gives clear meaning to the Shapley value (a component of the division for each player is equal to its average contribution to the welfare of the Grand coalition under a certain mechanism of its formation),
4. needed when you build a strongly dynamically stable optimality principles.

Thus, in many aspects more useful to have superadditive characteristic function.

It can be constructed, for example, as α -c.f. [3], i.e. as the lower value of the zero-sum game between the coalition S , acting as the first (maximizing) player and the coalition $N \setminus S$, acting as the second (minimizing) player. The payoff of coalition S is the sum of respective payoffs of the players from the coalition S , and the strategy of coalition S is an element of Cartesian product of players' strategy sets from the coalition S . The lower value of the game always exists and is a superadditive function of coalition $S \subset N$.

$$V^\alpha(x_0, T - t_0; S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\} \\ \text{val } \Gamma_{S, N \setminus S}(x_0, T - t_0), & S \subset N, \\ \max_{u_1, u_2, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u), & S = N. \end{cases}$$

It is rather easy to construct the characteristic function $V(S, x_0, T - t_0)$ in the form of δ -c.f. [5]. The characteristic function of coalition S is computed in two stages: first, we have to calculate the Nash equilibrium strategies for all players and next, we fix (freeze) it for players from $N \setminus S$ while players from coalition S seek to maximize their joint payoff $\sum_{i \in S} K_i$. In general, this δ -c.f. is not superadditive function but it is superadditive for a class of games with negative externalities [1].

$$V^\delta(x_0, T - t_0; S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\} \\ \max_{\substack{u_i, i \in S \\ u_j = u_j^*, j \in N \setminus S}} \sum_{i \in S} K_i(x_0, T - t_0, u_S, u_{N \setminus S}^N), & S \subset N, \\ \max_{u_1, u_2, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u_1, u_2, \dots, u_n), & S = N. \end{cases}$$

One of the novel approaches is to use ζ -c.f. [2]. The characteristic function of coalition S is computed in two stages: first, we find optimal controls maximizing the total payoff of the players; next, the cooperative optimal strategies are used by the players from the coalition S while the left-out players from $N \setminus S$ use the strategies minimizing the total payoff of the players from S . The characteristic function defined in this way is superadditive.

$$V^\zeta(x_0, T - t_0; S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\} \\ \min_{\substack{u_j \in U_j, j \in N \setminus S \\ u_i = u_i^*, i \in S}} \sum_{i \in S} K_i(x_0, T - t_0, u_S^*, u_{N \setminus S}), & S \subset N, \\ \max_{\substack{u_1, u_2, \dots, u_n, \\ u_i \in U_i, i \in N}} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u_1, u_2, \dots, u_n), & S = N. \end{cases}$$

In this work we consider the example of differential games of control the amount of harmful emissions into the atmosphere, in which a characteristic function can be constructed by all three ways illustrated above.

The game involves three players (countries, firms), $N = 1, 2, 3$ and continuous in the finite interval $[0; T]$. The controls of the players are understood as $u_i \in [0; b_i]$, $i = 1, 2, 3$ – amount of emissions.

Dynamics has the following form:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t), \quad x(0) = x_0.$$

Payoff function of player i , $i = 1, 2, 3$

$$K_i(x_0, 0, T, u) = \int_0^T (b_i \sqrt{u_i} - d_i x) dt, \quad d_i - \text{Const}, \quad d_i > 0.$$

For this game we construct an example with not superadditivity δ -c.f.

References

- [1] P. Reddy, G. Zaccour, "A friendly computable characteristic function", *Mathematical Social Sciences*, vol. 82, issue C, 18–25, (2016).
- [2] E. Gromova, L. Petrosyan, "On a approach to the construction of characteristic function for cooperative differential games", *Mat. Teor. Igr Pril.*, 7:4, 19–39 (2015).
- [3] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, (1953).
- [4] P. Chander, "The gamma-core and coalition formation", *International Journal of Game Theory*, V. 35, 539–556 (2007).
- [5] L. Petrosjan, G. Zaccour, "Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction", *J. of Economic Dynamics and Control*, V. 27, no. 3, 381–398, (2003).
- [6] E. Gromova, "The Shapley value as a sustainable cooperative solution in differential games of 3 players", *Recent Advances in Game Theory and Applications*, Birkhauser, Springer Int. Publishing, 67–89 (2016).

Shares Allocation Methods for Game Problems with Joint Constraints

Konnov I.

konn-igor@ya.ru

Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan, 420008, Russia

We first consider the custom l -person noncooperative game, where the i -th player has a strategy set $X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ and a cost (dis-utility) function $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$

with $X = X_1 \times \dots \times X_l$. That is, each i -th player selects an element $x_i \in X_i$ for $i = 1, \dots, l$ and receives the cost $f_i(x)$ at the situation $x = (x_1, \dots, x_l)^\top \in X$. In the classical noncooperative game framework, all the players are supposed to be equal and independent. Moreover, it is supposed that all the players make their choices simultaneously. The most popular solution concept for this problem was suggested by Nash [1]. The *Nash equilibrium problem* (NEP) consists in finding a point $x^* = (x_1^*, \dots, x_l^*)^\top \in X$ such that

$$f_i(x_{-i}^*, v_i) \geq f_i(x^*) \quad \forall v_i \in X_i, i = 1, \dots, l.$$

In the constrained l -person noncooperative game, all the players together with the above dis-utility functions and strategy sets have some joint constraints contained in the set V . That is, they have the common feasible set

$$D = X \bigcap V,$$

A point $x^* = (x_1^*, \dots, x_l^*)^\top \in D$ is said to be a solution of a *generalized Nash equilibrium problem* (GNEP), if

$$f_i(x_{-i}^*, v_i) \geq f_i(x^*) \quad \forall (x_{-i}^*, v_i) \in D, i = 1, \dots, l. \quad (1)$$

The presence of the joint binding constraints creates certain difficulties for players since they become mutually dependent. Besides, the set V may be determined by rather complex (nonlinear) functions, and we are interested in development of suitable solution methods, which can approximate solutions for comparatively broad classes of these generalized game problems.

In the talk, we suggest a general approach to this problem within the same noncooperative framework. More precisely, we propose to apply the shares allocation method for joint constraints, which replaces the initial problem with a sequence of Nash equilibrium problems together with inserting an upper level set-valued variational inequality as master problem.

We first take the following set of basic assumptions.

Each strategy set X_i is convex and closed and each dis-utility function f_i is convex and lower semicontinuous in its i -th variable x_i for $i = 1, \dots, l$. Also, the joint constraint set is defined by

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^l h_i(x_i) \leq b \right\},$$

where $h_i(x_i) = (h_{i1}(x_i), \dots, h_{im}(x_i))^\top$, $h_{ij} : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, l$ are convex functions, b is a fixed vector in \mathbb{R}^m , $n = \sum_{i=1}^l n_i$, and the common feasible set D is nonempty.

We can transform the joint constraint set V by inserting auxiliary variables:

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}^{ml}, \sum_{i=1}^l u_i = b, h_i(x_i) \leq u_i, i = 1, \dots, l \right\},$$

where $u = (u_1, \dots, u_l)^\top$, $u_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, l$. These variables u_i determine a partition of the right-hand side vector b , i.e. give explicit shares of players. Given a feasible partition

$$u \in U = \left\{ u \in \mathbb{R}^{ml} \mid \sum_{i=1}^l u_i = b \right\},$$

we can consider the reduced NEP: Find a point $x(u) = (x_1(u), \dots, x_l(u))^\top \in D(u)$ such that

$$f_i(x_{-i}(u), v_i) \geq f_i(x(u)) \quad \forall v_i \in D_i(u_i), i = 1, \dots, l. \quad (2)$$

where $D(u) = D_1(u_1) \times \dots \times D_l(u_l)$, $D_i(u_i) = \{x_i \in X_i \mid h_i(x_i) \leq u_i\}$, $i = 1, \dots, l$. Let $y_i(u)$ is the optimal Lagrange multiplier of this problem, which estimates the particular constraint $h_i(x_i) \leq u_i$, for $i = 1, \dots, l$. Set $y(u) = (y_1(u), \dots, y_l(u))^\top$. Since it is not defined uniquely in general, we treat $-y(u)$ as points in $T(u)$ of a set-valued mapping T . We can define the variational inequality (VI): Find a point $u^* \in U$ such that

$$\exists t^* \in T(u^*), \langle t^*, u - u^* \rangle \geq 0, \quad \forall u \in U. \quad (3)$$

It appeared the *master VI* (3) yields the optimal shares of common constraints among players.

Theorem 1. *If a point u^* solves VI (3), the corresponding solution $x(u^*)$ in (2) is a solution of EP (1).*

This approach utilizes the right-hand side decomposition technique suggested for separable optimization problems; see [2]. In order to develop a convergent iterative methods and calculate a solution of problems (3) or (1), we need additional monotonicity properties of the set-valued mapping T . We also show that application of regularization together with a decomposable penalty method allows us to simplify the solution process essentially.

Namely, given a number $\varepsilon > 0$ and a feasible partition $u \in U$, let us take the NEP: Find $x^\varepsilon(u) \in X$ such that

$$\tilde{f}_i^\varepsilon(x_{-i}^\varepsilon(u), v_i) \geq \tilde{f}_i^\varepsilon(x^\varepsilon(u)) \quad \forall v_i \in X_i, i = 1, \dots, l; \quad (4)$$

where the i -th player has the dis-utility function

$$\tilde{f}_i^\varepsilon(x) = f_i(x) + (\varepsilon/2)\|x_i\|^2 + (1/(2\varepsilon))\|\pi_+[h_i(x_i) - u_i]\|^2.$$

Set

$$\Phi(x, v) = \sum_{i=1}^l f_i(x_{-i}, v_i) - \sum_{i=1}^l f_i(x).$$

If the bi-function $\Phi(x, v)$ is monotone, then NEP (4) has always a unique solution. Then set

$$F_i^\varepsilon(u) = -(1/\varepsilon)\pi_+[h_i(x_i^\varepsilon(u)) - u_i], \quad \forall i = 1, \dots, l;$$

and define VI: Find a point $u^* \in U$ such that

$$\langle F^\varepsilon(u^*), u - u^* \rangle \geq 0, \quad \forall u \in U. \quad (5)$$

We show that $F^\varepsilon(u)$ is a single-valued approximation of $T(u)$ and possesses strengthened monotonicity properties. Similarly, VI (5) approximates master VI (3). We can take various iterative methods for finding a solution of VI (5) with proper choice of $\varepsilon > 0$ to solve the initial problem.

References

- [1] J. Nash, "Non-cooperative games", *Ann. of Mathem.*, 54, No. 2, 286–295 (1951).
- [2] J. Kornai and T. Liptak, "Two-level planning", *Econometrica*, 33, No. 1, 141–169 (1965).

On the Stability of a Cooperative Agreement in Multistage Multicriteria Game

Kuzyutin D., Nikitina M.

d.kuzyutin@yandex.ru, maryaniki@gmail.com

Saint-Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya emb., St. Petersburg, 199034, Russia; National Research University Higher School of Economics, 3A Kantemirovskaya Street, Saint-Petersburg, 194100, Russia

We use so-called "Imputation Distribution Procedure" approach [2, 3] to sustain long-term cooperation in n -person multicriteria game in extensive form [3, 1]. We will restrict ourselves to the games with perfect information when players $i \in N$ use pure strategies $u_i(\cdot)$. A strategy profile $u = (u_1, \dots, u_n)$ determines a unique play (trajectory) $\omega = \{x_0, x_1, \dots, x_{t-1}, x_t, \dots, x_T\}$ on the game tree K , and let

$$h_i(x_t) = (h_{i/1}(x_t), \dots, h_{i/r}(x_t)), h_{i/k}(x_t) \geq 0, k = 1, \dots, r, x_t \in K,$$

denote the player's i (r -dimensional) vector payoff at node x_t ; $h_i(\omega) = \sum_{t=0}^T h_i(x_t)$ is the player's i payoff, which corresponds to the trajectory ω .

Hence, we get the player's i vector payoff function: $H_i(u_1, \dots, u_n) = h_i(\omega) = \sum_{t=0}^T h_i(x_t)$.

Given $a, b \in R^m$ we'll use the following notations: $a \geq b$, iff $a_k \geq b_k, k = \overline{1, m}$; $a > b$, iff $a_k > b_k, k = \overline{1, m}$; $a \geq b$, iff $a \geq b$ and $a \neq b$. If the players have agreed to cooperate, then they will try to maximize (in terms of binary relation \geq) the total vector payoff $\sum_{i=1}^n H_i(u)$.

Let U^c denote the set of all Pareto optimal strategy profiles u^c , i.e. $\#u : \sum_{i=1}^n H_i(u) \geq \sum_{i=1}^n H_i(u^c)$.

We will assume further that players have agreed on a rule γ regarding how to choose the unique strategy profile $\bar{u} = \gamma(U^c)$ from the set U^c . We will call \bar{u} the optimal cooperative strategy profile and the corresponding play $\bar{\omega} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t, \dots, \bar{x}_T)$ – the optimal cooperative trajectory.

The next challenge of cooperation is to choose an allocation mechanism to split the total cooperative vector payoff $\sum_{i=1}^n H_i(\bar{u})$ between the players. As an example of a single-valued cooperative solution, we will exploit the Shapley value [5] which has been extended onto multicriteria games in [4].

Let $\Gamma^{x_0}(N, V^{x_0})$ be a multicriteria TU cooperative game [4], where $S \subseteq N$ is a coalition, $V^{x_0}(S) : 2^N \rightarrow R^r$ is a (vector-valued) characteristic function of this game, with $V^{x_0}(\emptyset) = \bar{0} = (0, \dots, 0)$, $V^{x_0}(N) = \sum_{i=1}^n H_i(\bar{u})$.

Definition 1. [5, 4] The Shapley value of $\Gamma^{x_0}(N, V^{x_0})$ denoted by φ^{x_0} is defined for each player $i \in N$ as

$$\varphi_i^{x_0} = \sum_{S \subset N, i \in S} \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n!} (V^{x_0}(S) - V^{x_0}(S \setminus \{i\}))$$

What remains to be done is to decompose the Shapley value over time to ensure time consistency and other desirable properties of this allocation procedure (i.e. a sustainability of original cooperative agreement).

Let $\bar{x}_t \in \bar{\omega}$, and $\Gamma^{\bar{x}_t}(N, V^{\bar{x}_t})$ denote a subgame starting at node \bar{x}_t (along the optimal cooperative play):

$$V^{\bar{x}_t}(N) = \sum_{\tau=t}^T \sum_{i=1}^n h_i(\bar{x}_\tau).$$

Denote by $(\varphi_i^{\bar{x}_t})_{i=1}^n$ the Shapley value at the subgame $\Gamma^{\bar{x}_t}(N, V^{\bar{x}_t})$.

Let $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}, i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r; t = 0, \dots, T$ be the Payment Schedule (PS) or "imputation distribution procedure" [2, 3]. When we exploit the Imputation Distribution Procedure approach we assume that the players have agreed to aggregate the cooperative vector payoff $\sum_{i=1}^n H_i(\bar{u})$, constructed by use of the initial "stage payoffs" $h_i(\bar{x}_t)$, and then allocate this payoff (between the players and overtime) along the optimal cooperative trajectory. Then $\beta_{i/k}(\bar{x}_t)$ denotes "actual current payment" which the player i receives at \bar{x}_t on criterion k (instead of $h_{i/k}(\bar{x}_t)$) according to PS β .

Definition 2. [2, 3] Each PS $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$ has to satisfy the efficiency constraint:

$$\sum_{t=0}^T \beta_i(\bar{x}_t) = \varphi_i^{x_0} \quad (1)$$

A payment schedule may also satisfy some of (but not all) the following properties: time consistency (TC) [2, 3], or "time consistency inequality", non-negativity constraint, balance condition and Irrational Behavior Proofness (IBP) [6].

Definition 3. [3] The payment schedule $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$ satisfies time consistency (equality), if

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_i(\bar{x}_\tau) + \varphi_i^{\bar{x}_t} = \varphi_i^{x_0} \quad \forall t = 1, \dots, T \quad \forall i \in N. \quad (2)$$

This condition requires that the total amount received by the player i along the optimal play before node \bar{x}_t plus the Shapley value in the subgame starting at that node, corresponds to what he is entitled to reach in the whole game.

Definition 4. The PS β satisfies time consistency inequality, if

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_i(\bar{x}_\tau) + \varphi_i^{\bar{x}_t} \geq \varphi_i^{x_0} \quad \forall t = 1, \dots, T \quad \forall i \in N. \quad (3)$$

We assume that if player i accepts PS, satisfying (2), he will certainly accept PS which satisfies (3) since in the latter case the payments received before the subgame $\Gamma^{\bar{x}_t}$ starts are larger. In a sense the TC inequality (3) is even better incentive to cooperate for player i than (2).

Definition 5. The non-negativity constraint of PS means that:

$$\beta_{i/k}(\bar{x}_t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r; t = 0, \dots, T. \quad (4)$$

Definition 6. PS β satisfies the balance condition if $\forall t = 0, \dots, T; \forall k = 1, \dots, r$

$$\sum_{\tau=0}^t \sum_{i=1}^n \beta_{i/k}(\bar{x}_\tau) \leq \sum_{\tau=0}^t \sum_{i=1}^n h_{i/k}(\bar{x}_\tau) \quad (5)$$

Inequality (5) means that at any intermediate node \bar{x}_t the players have enough summarized payoffs (collected along the optimal cooperative trajectory from x_0 till \bar{x}_t) to realise PS β . Note that (5) is always satisfied for $t = T$ due to efficiency (1). If PS β does not satisfy (5) at some node \bar{x}_t , we assume that the players may "borrow" the currently required amount against

future earnings. For the sake of simplicity we assume that an "interest-free loan" is available for grand-coalition N , recognizing that in general case the sustainability of the cooperative agreement may require extra costs.

Definition 7. The PS $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$, $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, r$; $t = 1, \dots, T$ satisfies the "strong" (or component-wise) IBP condition, if $\forall i \in N$, for each criterion k , $\forall t = 1, \dots, T$ the following inequality holds:

$$V_k^{x_0}(\{i\}) \leq \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_{i/k}(\bar{x}_\tau) + V_k^{\bar{x}_t}(\{i\}) \quad (6)$$

If (6) holds, player i has an incentive to cooperate even if he assumes that cooperation may be destroyed (due to irrational behavior of some players) at some intermediate node \bar{x}_t .

The following payment schedule

$$\beta_i(\bar{x}_t) = \varphi_i^{\bar{x}_t} - \varphi_i^{\bar{x}_{t+1}}, t = 0, \dots, T-1; \beta_i(\bar{x}_T) = \varphi_i^{\bar{x}_T}, \quad (7)$$

is known to satisfy TC and the balance condition, but does not satisfy non-negativity constraint and IBP in multistage unicriterium games (see, for instance [3]).

We prove that the direct extension of the PS (7) onto multicriteria games also satisfies TC (2) and the balance condition (5) however does not satisfy non-negativity (4) and strong IBP (6).

The PS

$$\beta_{i/k}(\bar{x}_t) = \frac{\sum_{i=1}^n h_{i/k}(\bar{x}_t)}{V_k^{x_0}(N)} \cdot \varphi_{i/k}^{\bar{x}_0}, t = 0, \dots, T \quad (8)$$

implies "proportional" distribution of the total current payoff at each node along the cooperative trajectory. This PS obviously satisfies non-negativity (4) and the balance condition (5) for multicriteria games but does not satisfy TC and IBP even for unicriterium games [3].

We propose the algorithm to construct so called Refined payment schedule that satisfies efficiency, non-negativity constraint and time consistency inequality. Moreover, we design the Generalized payment schedule which satisfies efficiency, non-negativity constraint, TC inequality and strong IBP as well.

It is worth noting that to ensure time consistency one has to sacrifice either non-negativity constraint (PS (7)) or the balance condition (Refined payment schedule). In other words it is impossible to design a time consistent PS β that satisfies both non-negativity and the balance condition.

References

- [1] D. Kuzyutin, M. Nikitina, L. Razgulyaeva, "On the A-equilibria properties in multicriteria extensive games", *Applied Mathematical Sciences*, 9, No. 92, 4565–4573 (2015).

- [2] L. Petrosyan, N. Danilov, “Stability of the solutions in nonantagonistic differential games with transferable payoffs”, *Viestnik of Leningrad University*, Sep.1., No. 1, 52–59 (1979) (in Russian).
- [3] L. Petrosyan, D. Kuzyutin, *Consistent solutions of positional games*, Saint Petersburg University Press, (2008), (in Russian).
- [4] G. Pieri, L. Pusillo, “Multicriteria partial cooperative games”, *Applied Mathematics*, No. 6, 2125–2131 (2015).
- [5] L. Shapley, “A value for n-person games”, *Contributions to the Theory of Games*, II, H. Kuhn and A. W. Tucker, eds., Princeton: Princeton University Press (1953).
- [6] D. Yeung, “An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games”, *International Game Theory Review*, No. 8 (4), 739–744 (2006).

Wardrop Equilibrium for Networks reconsidered

Mazalov V.

vlmazalov@yandex.ru

Institute of Applied Mathematical Research, Pushkinskaya st. 11, Petrozavodsk, 185910, Russia

We consider a network with incoming traffic flow and latency function detremined in each link. The distribution of the incoming flow follows to the Wardrop minimum cost principle. According to the Wardrop principle, the trip time along all existing routes is the same for all road users and is smaller than the trip time of any road user in the case of route diversion. We continue the Wardrop's idea assuming that not only trip time, but also that the total costs of road users on all routes are same and minimal.

We have analytically derived a system of equations defining the optimal flows and compare the social costs under competetive and cooperative behavior.

References

- [1] Mazalov, V., Melnik, “Equilibrium Prices and Flows in the Passenger Traffic Problem”, *International Game Theory Review*, 18, No. 1 (2016).

Stable Cooperation in Oligopoly

Parilina E., Sedakov A.

e.parilina@spbu.ru, a.sedakov@spbu.ru

Saint Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., Saint Petersburg 199034, Russia

The literature on oligopoly generally covers two alternative frameworks regarding firms' behavior. The first one studies competitive behavior which

results in an equilibrium (Cournot–Nash or Bertrand–Nash) policy for any firm. The basic assumption in this framework is that the firm acts individually on a market with the goal of increasing its profit and decides on its behavior independently of other firms. An alternative concept is devoted to the case of cooperative behavior resulting in a cooperative policy for the firms. The key issue here is that all the firms being members of one alliance, jointly decide on their behavior taking into account only the goal of the alliance, not firms. Generally, such goal is represented by an increase of the total profit of the firms, or by an increase of the social welfare. These two frameworks are classical in the theory of oligopolies, however they have certain practical limitations. For example, it is unlikely that all the firms act individually on a market without any collusion with their competitors: there might be a few firms deciding to act as one alliance competing on a market with the rest of the firms (which might also merge in smaller alliances). It is also unlikely that the firms can form the only alliance when antitrust regulators actively prevent market from monopolies. These facts motivate us to find a tradeoff between individual behavior of the firms and their cooperative behavior resulting in complete cooperation.

We suppose that firms compete in quantities (a la Cournot), but the maximum quantity of the product to be produced by any firm is bounded which is common knowledge. When we model the competitive oligopoly, to be closer to practical situations from our perspective, we assume that firms can merge in smaller alliances called coalitions, where individual and cooperative behaviors of the firms become opposite cases. We call a partition of the firms into smaller coalitions a coalition structure. The firms belonging to the same coalition act to maximize the joint profit of its members.

In the paper, we focus on a problem of stable cooperation on a single-product market where firms are in competitive relationship. Indeed, any firm gains its profit from cooperation with other firms within the coalition it belongs to, however different coalition structures may prescribe different profits to it. It is so because the firm may belong to the coalitions of different sizes, or the partition of other firms affects the firm's profit through the number of firms-coalitions on the market and their structure, etc. Therefore, we are interested in finding a coalition structure that would be appropriate for all the firms and would motivate them to hold the coalitions they belong to. Specifically, we focus on finding a structure which would be stable against unilateral deviations of any firm (Nash stability). For this reason, for a given coalition structure, we first determine the worth of any coalition taking into account the joint profit of the firms involved. We do it in two steps by means of the equilibrium outcome and the α -characteristic function, which measures the maximum profit that this coalition can get in the worst-case

scenario, i.e., when the complement of this coalition would act against it. At the first step, we measure the worth of any firm-coalition as its (Cournot–Nash) equilibrium payoff in a noncooperative game between firms-coalitions assuming the uniqueness of such equilibrium. At the second step, for a fixed firm-coalition, we measure a worth of any subset of the coalition with the use of the α -characteristic function. Here we should make an assumption about the behavior of the left-out firms of the coalition. We assume that they implement their equilibrium strategies found at the first step. This is in line with the idea of the δ -characteristic function. Thus we use a combination of α - and δ -approaches: α -approach is applied to the firms inside the coalition while δ -approach is applied to the firms which do not belong to it. The aforementioned procedure helps us to determine the cooperative solution based on the values of the characteristic function. This solution reallocates the equilibrium payoff of each coalition between its members. As a cooperative solution, we consider the Aumann–Drèze value which is the Shapley value adopted to a given coalition structure. Having found the cooperative solution analytically, we discuss the concept of stability of the coalition structure providing some insights about its form.

References

- [1] R. Aumann, “Acceptable points in general cooperative n -Person Games”. In: Tucker, Luce (eds) *Contributions to the theory of games. IV. Annals of Mathematics Studies*, 40, Princeton: Princeton University Press (1959).
- [2] R. Aumann, J.H. Drèze, “Cooperative games with coalition structures”, *International Journal of Game Theory*, 3, 217–237 (1974).
- [3] A. Bogomolnaia, M.O. Jackson, “The stability of hedonic coalition structures”, *Games and Economic Behavior*, 38, No. 2, 201–230 (2002).
- [4] S. Curranini, M.A. Marini, “Coalitional approaches to collusive agreements in oligopoly games”, *Manchester School*, 83, No. 3, 253–287 (2015).
- [5] S. Hart, M. Kurz, “Endogenous formation of coalitions”, *Econometrica*, 51, No. 4, 1047–1064 (1983).
- [6] T. Ichiishi, “A Social Coalitional Equilibrium Existence Lemma”, *Econometrica*, 49, 369–377 (1981).
- [7] A. Lardon, “The γ -core in Cournot oligopoly TU-games with capacity constraints”, *Theory and Decision*, 72, No. 3, 387–411 (2012).
- [8] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press (1944).
- [9] E. Parilina, A. Sedakov, “Stable bank cooperation for cost reduction problem”, *Czech Economic Review*, 8, No. 1, 7–25 (2014).

- [10] L.A. Petrosjan, G. Zaccour, "Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, No 3, 381–398 (2003).
- [11] L. Shapley, "A value for n -person games", In: Kuhn, Tucker (eds) *Contributions to the Theory of Games II*, Princeton: Princeton University Press, pp. 307–317 (1953).
- [12] J. Zhao, "A β -Core Existence Result and Its Application to Oligopoly Markets", *Games and Economic Behavior*, 27, 153–168 (1999).
- [13] J. Zhao, "The Most Reasonable Solution for an Asymmetric Three-firm Oligopoly", mimeo, Saskatchewan, Canada (2013).

Differential Games with Moving Informational Horizon and Non-transferable Utility

Petrosian O., Nastych M.

petrosian.ovanes@yandex.ru, nastych@bk.ru

Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Universitetskii prospekt 35, Peterhof, Saint Petersburg, 198504, Russian; Faculty of Liberal Arts and Sciences, Saint-Petersburg State University, 58-60 Galernaya St., St.Petersburg, 190000, Russia

In the present research we examine a special case of cooperative differential games with non-transferable utility in which the game structure can change with time (time-dependent formulation) and assume that the players do not have full information about the change of the game structure, but they have certain information about the game structure on the truncated time interval. The duration of the period of this information is known in advance. The interpretation can be given as follows: players have certain information about the game structure, but the duration of the period with this information being correct is unknown in advance. Evidently, this truncated information is valid only for certain time and has to be updated. In order to define the best possible behavior for players in this type of cooperative differential game, it is needed to develop a special approach. One of the fundamental questions in the theory of cooperative differential games with non-transferable utility is the formulation of optimal behavior for players or economic agents, the design of Pareto-optimal trajectories, computation of corresponding solution and analysis of its time consistency. In the paper, we answer this questions for a game with moving informational horizon, as an optimality principle we use Nash bargaining solution. Haurie analyzed the problem of dynamic instability of the Nash bargaining solutions in differential games [6]. The notion of time consistency of differential games solutions as formalized mathematically by Petrosyan [8]. In the paper [15] authors firstly

derived subgame consistent solutions for a class of cooperative stochastic differential games with nontransferable utility. In this paper, we show that in games with moving informational horizon Nash bargaining solution obtains also the property of time consistency, which is a rare event in cooperative differential games with non-transferable utility.

This approach is similar in spirit to the Model Predictive Control theory developed within the framework of numerical optimal control. We refer to [12], [5], [7], [14] for the overview of the recent results in this field. Model predictive control is a form of control in which the current control action is obtained by solving, at each sampling instant, a finite horizon open-loop optimal control problem using the current state of the plant as the initial state. An important advantage of this type of control is its ability to cope with hard constraints on controls and states.

As an illustration of offered approach we use Cournot oligopoly differential model of the oil market [2] with largest oil exporters and other countries. In the paper [13] the author examines cartel formation in the world oil market under Cournot setting. The authors in [1] use the quantity competitive environment to model collusions and proportionate adjustment of production levels. Following this tradition, we use Cournot framework and define quotas of oil production as adjustment of production levels to admit nontransferable payoffs. Making an agreement about quotas on production levels is viewed as pure cooperative behavior. In the example we use two types of agreements of solutions, first is a Nash bargaining solution. The second one is a solution which is based on the Nash equilibrium in the corresponding non-zero-sum game, this solution allows us to lower the production levels of all participants simultaneously. Obviously, the second solution is not time consistent, but it allows us to model latest real life market agreements. Both solutions are compared numerically.

Games with moving informational horizon allow taking into account the variability of market demand, an adaptation of participants actions to changing the environment, actual planning horizons for demand. Therefore the approach can be successfully used to model continuous economic process as if it is being solved in the real time. Using the approach we can make the following conclusions. Firstly, the situation when players predict market demand on the truncated time interval leads to higher production levels comparing with a static model. Secondly, using the historical information about the total world oil supply, prices of oil of different benchmark crude and average costs of oil production for the largest oil exporters, we estimate the optimal quotas of oil production for OPEC countries.

Cooperative differential games with moving informational horizon were studied mainly for cooperative differential games with transferable payoffs [4],

[11], [3], [10]. In the paper [3] the cooperative differential game with finite-horizon is considered. The paper [11] is dedicated to studying games with stochastic forecast and dynamic adaptation in the case when information about the conflicting process can change during the game. The paper [4] studies dependency of the resulting solution upon the value of informational horizon. In the paper [10] the approach was applied to the cooperative differential game with infinite-horizon. In this paper, we apply this approach to the cooperative differential game with nontransferable payoffs and propose to use Nash bargaining solution as a cooperative solution.

References

- [1] K. Berger, M. Hoel, S. Holden, O. Olsen, “The Oil Market as an Oligopoly. Discussion paper”, *Central Bureau Statistics*, 32 (1988).
- [2] R. Cellini, L. Lambertini, “A differential oligopoly game with differentiated goods and sticky prices”, *European Journal of Operational Research*, 176, 1131–1144 (2007).
- [3] O. Petrosian, “Looking Forward Approach in Cooperative Differential Games”, *International Game Theory Review*, 18, DOI:10.1142/S0219198916400077 (2016).
- [4] E. Gromova, O. Petrosian, “Control of Informational Horizon for Cooperative Differential Game of Pollution Control”, *2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference)*, DOI:10.1109/STAB.2016.7541187 (2016).
- [5] G. Goodwin, M. Seron, J. Dona, *Constrained Control and Estimation: An Optimisation Approach*, Springer, New York, (2005).
- [6] A. Haurie, “A note on nonzero-sum differential games with bargaining solution”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 18, No. 1, 31–39 (1976).
- [7] W. Kwon, S. Han, *Receding Horizon Control: Model Predictive Control for State Models*, Springer, New York, (2005).
- [8] L. Petrosyan, “Time-consistency of solutions in multi-player differential games”, *Vestnik Leningrad State University*, 19, 46–52 (1977).
- [9] L. Petrosyan, N. Danilov, “Stability of solutions in non-zero sum differential games with transferable payoffs”, *Vestnik Leningrad State University*, 1, 52–59 (1979).
- [10] O. Petrosian, “Looking Forward Approach in Cooperative Differential Games with infinite-horizon”, *Vestnik Leningrad State University*, 4, 18–30 (2016).
- [11] O. Petrosian, A. Barabanov, “Looking Forward Approach in Cooperative Differential Games with Uncertain-Stochastic Dynamics”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 172, No. 1, 328–347 (2017).
- [12] J. Rawlings, D. Mayne, *Model Predictive Control: Theory and Design*, Nob Hill Publishing, (2009).

- [13] S. Salant, "Exhaustible Resources and Industrial Structure: A Nash-Cournot Approach to the World Oil Market", *The Journal of Political Economy*, 85, No. 5, 1079–1094 (1976).
- [14] L. Wang, *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*, Springer, New York, (2005).
- [15] D. Yeung, L. Petrosyan, "Subgame Consistent Solutions of a Cooperative Stochastic Differential Game with Nontransferable Payoffs", *Journal of optimization theory and applications*, 124, No. 3, 701–724 (2005).

Existence of Strong Nash Equilibrium in Repeated and Multistage Games

Petrosyan L., Chistyakov S., Pankratova Ya.

1.petrosyan@spbu.ru, s.chistyakov@spbu.ru, y.pankratova@spbu.ru
Saint Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., Saint Petersburg
199034, Russia

1. Repeated games. Denote by G the infinity repeated game with n -person game Γ played on each stage. For simplicity suppose that the stage game Γ is finite (has finite sets of strategies).

$$\Gamma = \langle N; U_1, \dots, U_i, \dots, U_n; K_1, \dots, K_i, \dots, K_n \rangle.$$

If on stage k ($1 \leq k \leq \infty$) strategy profile $u^k = (u_1^k, \dots, u_i^k, \dots, u_n^k)$ is chosen, the payoff in G is defined as:

$$\begin{aligned} H_i(u_1(\cdot), \dots, u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(u_1^k, \dots, u_i^k, \dots, u_n^k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(u^k) = H_i(u(\cdot)), \quad i \in N, \end{aligned} \tag{1}$$

here $u_1(\cdot) = (u_1^1, \dots, u_1^k, \dots), \dots, u_i(\cdot) = (u_i^1, \dots, u_i^k, \dots), \dots, u_n(\cdot) = (u_n^1, \dots, u_n^k, \dots)$.

Consider the strategy profile $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}_1(\cdot), \dots, \bar{u}_i(\cdot), \dots, \bar{u}_n(\cdot))$ such that

$$\sum_{i \in N} H_i(\bar{u}) = \max_{u(\cdot)} \sum_{i \in N} H_i(u). \tag{2}$$

It is evident that such strategy profile always exist. One can take $\bar{u}_i(\cdot) = (\bar{u}_i^1, \dots, \bar{u}_i^k, \dots)$ $i \in N$ such that

$$\sum_{i \in N} K_i(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i, \dots, \bar{u}_n) = \max_{u_1, \dots, u_i, \dots, u_n} \sum_{i \in N} K_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n), \tag{3}$$

and since the stage games are the same (G is repeated game) we can take $\bar{u}_i^k = \bar{u}_i$ for all $k = 1, \dots, n$. Then from (1)-(3) we get that

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} H_i(\bar{u}) &= \sum_{i \in N} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(\bar{u}_1^k, \dots, \bar{u}_n^k) \right) = \\ &= \sum_{i \in N} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) \right) = \frac{1}{1-\delta} \sum_{i \in N} K_i(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Introduce characteristic function $V(S)$, $S \subset N$ in Γ in classical sense. Then we shall have

$$V(N) = \sum_{i \in N} K_i(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) \quad (5)$$

and it can be easily shown that the characteristic function $W(S)$, $S \subset N$ in G will have the form

$$W(S) = \frac{1}{1-\delta} V(S), \quad S \subset N. \quad (6)$$

Remind now the definition of Strong (or coalition proof) Nash Equilibrium.

Definition 1. The n -tuple of strategies $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n) = \hat{u}$ is called Strong (or coalition proof) Nash Equilibrium (SNE) if for all $S \subset N$, and all $u_S = \{u_i, i \in S\}$ the following inequality holds

$$\sum_{i \in S} K_i(\hat{u}) \geq \sum_{i \in S} K_i(\hat{u} || u_S). \quad (7)$$

The definition can be effectively used for one-shot games but for repeated or multistage and differential games a refinement is necessary. This refinement is weaker as defined before and we shall call it Partially Strong Nash Equilibrium (PSNE). In the definition we shall require only stability against simultaneous (one-shot) deviations of coalitions.

Definition 2. The n -tuple of strategies $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n) = \hat{u}$ is called Partially Strong Nash Equilibrium (PSNE) if for all $S \subset N$ the following inequality holds

$$\sum_{i \in S} K_i(\hat{u}) \geq \sum_{i \in S} K_i(\hat{u} || u_S).$$

for all $u_S = \{u_i, i \in S\}$ different from \hat{u}_i , $i \in S$ and the composition of deviating coalition S is the same in all stage games.

Consider now the core C in Γ , and suppose that $C \neq \emptyset$, and suppose also that there exist an imputation $\alpha \in C$ such that

$$\sum_{i \in S} \alpha_i > V(S), \quad S \subset N, S \neq N. \quad (8)$$

Construct now the modification G^α of the game G . The difference between G^α and G is in payoffs defined in stage games Γ when the cooperative strategies $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ are used and the payoff in this case is equal to $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, where α satisfies (8). For all other strategy combinations the payoffs remain as in Γ .

The following theorem holds.

Theorem 1. In game G^α there exist $\delta \in (0, 1)$ and PSNE such that payoffs in this PSNE are equal to $\alpha_i \frac{1}{1 - \delta}$, which are payoffs in G^α under cooperation.

2. Multistage games. Multistage game G starts from a fixed stage game which can be considered as situated in the position (root) z_1 of the game tree G .

$$\Gamma(z_1) = \langle N; U_1^{z_1}, \dots, U_i^{z_2}, \dots, U_n^{z_1}; K_1^{z_1}, \dots, K_i^{z_1}, \dots, K_n^{z_1} \rangle. \quad (9)$$

For simplicity we suppose that the set of players N is the same in all stage games. When the game G develops the finite sequence of different stage games is realized. Like in the previous section denote by $u_i(\cdot)$ the strategy of player i in G (defined as function of histories). The strategy profile which maximizes the sum of players payoffs in G is called “cooperative” strategy profile and the corresponding sequence of stage games (or equivalently sequence of positions on the tree G) “cooperative trajectory”. Suppose that for each stage game $\Gamma(z)$ the characteristic function $V(z, S)$ is defined, then introduce the new function

$$W(S) = \max_{z \in G} V(z, S). \quad (10)$$

We suppose that the maximum is attained for each S . Call $W(S)$ generalized characteristic function in Γ . In general $W(S)$ will be not super additive, but is monotone with respect to S . It is clear that $W(S) \geq V(z, S)$ for all S , we make the following assumption $V(z, N) \geq W(S)$ for all S . Suppose the core $C(z)$ is not empty in each stage game $\Gamma(z)$, denote by $D(z)$ the subcore of $C(z)$ as set of all imputations $\alpha^z = (\alpha_1^z, \dots, \alpha_n^z)$, $\sum_{i \in S} \alpha_i^z \geq W(S)$, for all S .

Suppose that for all $z \in G$, $C(z) \neq \emptyset$ and suppose also that there exist imputation $\alpha^z = (\alpha_1^z, \dots, \alpha_n^z)$ such that

$$\sum_{i \in S} \alpha_i^z > W(S) \text{ for all } S, \quad (11)$$

$$\inf_{S,z} \left[\sum_{i \in S} \alpha_i^z - W(S) \right] = A > 0. \quad (12)$$

In the special case when $V(z, N) = W(N)$ for all z the previous condition (11), (12) can be written as

$$\sum_{i \in S} \alpha_i > W(S) \text{ for all } S, \quad (13)$$

$$\inf_S \left[\sum_{i \in S} \alpha_i - W(S) \right] = A > 0. \quad (14)$$

since we can select z the same in all stage games. Construct now the modification G^α of the game in the same way as it was done in section 1. The theorem 1 from section 1 holds also for the game G^α

Theorem 2. In the game G^α there exist $\delta \in (0, 1)$ and PSNE such that payoffs in this PSNE are equal to $\alpha_i \frac{1}{1-\delta}$, which are payoffs in G^α under cooperation.

More about repeated and multistage games see in [1], [2]. The paper is a refinement and generalization of [3].

References

- [1] R. J. Aumann, M. Maschler, *Repeated Games with Incomplete Information*, MIT Press, Cambridge, 1995.
- [2] R. B. Myerson, "Multistage Games with Communication", *Econometrica*, 54 , 323-358, (1986).
- [3] L.A. Petrosjan, L.V. Grauer, "Strong Nash equilibrium in multistage games", *International Game Theory Review*, 4, No. 3 (2002).

Dynamic Shapley Value in the Game with Spanning Forest

Yin L.

liyinrus@outlook.com

St. Petersburg State University, Universitetskii prospekt 35, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia

This paper discusses the dynamic Shapley Value for for N -person and M -suppliers in two-stage minimum cost spanning forest game. The cooperative

behavior of players is defined. Selecting strategies, players build a minimum cost spanning forest at each stage. After first stage a particular player $m \in N$ leave the game with probability p that depends on the previous behavior of players. The characteristic function along the cooperative trajectory is computed and the Shapley Value for two-stage and one stage games is defined. Using the IDP(imputation distribution procedure) the dynamic Shapley Value is constructed.

We denote the set of players by $N = \{1, \dots, n\}$, and we denote the set of sources by $M = \{n+1, \dots, n+m\}$. For each player $i \in N$ let $M(i) \subseteq M$ denote the set of sources to which player i wishes to be connected. We will assume throughout that $M(i) \neq \emptyset$ for all $i \in N$. A graph over $N \cup M$ is $G(N \cup M, E) = \{(i, j) : \forall i, j \in N \cup M\}$. E is the set of all edges. A pair (i_1, i_2) is said to be a edge in G , if $(i_1, i_2) \in E, \forall i_1, i_2 \in N \cup M$.

Two players i and $j \in N$ are said to be connected in G if $\exists (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n)$ such that $(i_k, i_{k+1}) \in G(N \cup M, E), 1 \leq k \leq n-1$, and $i_1 = i, i_n = j$. A graph G is called connected over $N \cup M$ if i, j are connected in $G, \forall i, j \in N \cup M$. The set of connected graphs over $N \cup M$ is denoted by $\Gamma_{N \cup M}$.

The cost of connections between the players and sources can be represented by a cost matrix $C = (c_{ij})$, where $c_{ij} = c_{ji} > 0$ the cost of connecting i and $j, i \neq j \in N \cup M$. In this paper, let $c_{ij} = c_{ji}$ (the cost of connecting i and sources $i \in N, j \in M$) be a nonnegative constant in advance. Thus cost matrices are nonnegative, symmetric matrices of order $(n+m) \times (n+m)$.

At the first stage, player i chooses a $n-1$ dimensional vector $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,i-1}, x_{i,i+1}, \dots, x_{i,n})$, where $x_{i,j} \in X_{i,j}$ is strategy of player i against player $j, \forall i, j \in N$. In the same way, $x_{j,i} \in X_{j,i}$ is strategy of player j against player i . Then we define the cost of edge (i, j) as follow:

$$c_{ij} = c_{ji} = f_c(g_{i,j}, g_{j,i}) > 0, \forall i, j \in N, i \neq j.$$

where function f_c is a mapping from strategies of players i, j to the cost of edge (i, j) . It means that, the cost $c_{ij} = c_{ji}$ is completely specified by strategies of players $i, j, x_{i,j} \in X_{i,j}, x_{j,i} \in X_{j,i}, \forall i, j \in N$. For a profile strategy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, the cost of all edges $c_{ij} = c_{ji}, \forall i, j \in N$ is determined. This means that, as the cost matrix $C = (c_{ij})$ is determined, then the graph $G(N \cup M, E) \in \Gamma_{N \cup M}$ over $N \cup M$ is uniquely determined.

Now we define the minimum cost spanning forest over $N \cup M$, denoted by $F_x(N \cup M, C)$

$$F_x(N \cup M, C) = \arg \min_{G \in \Gamma_{N \cup M}} \sum_{(i,j) \in G(N \cup M, E)} c_{ij} \quad (1)$$

where $C = (c_{ij})$ is a cost matrix, the graph $G(N \cup M, E)$ is uniquely build by the profile strategy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. We represent the total cost of edges in the minimum cost spanning forest $F_x(N \cup M, C)$ as $C(F_x(N \cup M, C))$

$$C(F_x(N \cup M, C)) = \sum_{(i,j) \in F_x(N \cup M, C)} c_{ij} \quad (2)$$

Similarly, after that particular player m dropped out of the game, the set of players is $N \setminus \{m\}$. According to the profile strategy $x \setminus \{m\} = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n)$, a graph $G(N \cup M \setminus \{m\}, E) \in \Gamma_{N \cup M \setminus \{m\}}$ is build. And in this graph, each cost of edge $(i, j) \in G(N \cup M \setminus \{m\}, E)$ is determined as follow

$$c_{ij} = c_{ji} = f_c(x_{i,j}, x_{j,i}) > 0, \forall i, j \in N \cup M \setminus \{m\}, i \neq j.$$

In the graph $G(N \cup M \setminus \{m\}, E)$, we define the minimum cost spanning forest over $N \cup M \setminus \{m\}$, denoted by $F_{x \setminus \{m\}}(N \cup M \setminus \{m\}, C)$

$$F_x(N \cup M \setminus \{m\}, C) = \arg \min_{G \in \Gamma_{N \cup M \setminus \{m\}}} \sum_{(i,j) \in G(N \cup M \setminus \{m\}, E)} c_{ij}. \quad (3)$$

The total cost of edges in the minimum cost spanning forest $F_{x \setminus \{m\}}(N \cup M \setminus \{m\}, C)$ is

$$C(F_x(N \cup M \setminus \{m\}, C)) = \sum_{(i,j) \in F_x(N \cup M \setminus \{m\}, C)} c_{ij}. \quad (4)$$

Given a minimum cost spanning forest $F_x(N \cup M, C)$, we denote a subgraph $T_x(S_m, C) \subset F_x(N \cup M, C)$, where $S_m \subset N \cup M$, the player $m \in S_m$. For $\forall i \in S_m$ there is path from i to m in $T_x(S_m, C)$. For $\forall j \notin S_m$ the path from j to m isn't exist.

According to the above, the probability of player m leaving the game is defined as follow:

$$p = \frac{\sum_{(i,j) \in T_x(S_m, C)} c_{ij}}{C(F_x(N \cup M, C))} \quad (5)$$

where minimum cost spanning forest $F_x(N \cup M, C)$ can be obtained directly by from the graph $G(N \cup M, E)$, which is constructed by the profile strategy $x = (x_1, \dots, x_n)$.

We assume that the total cost of players in two-stage minimum cost spanning forest game is the sum of the cost of players in the first stage and in the second stage. In order to minimize the expected sum of their cost, we consider the cooperative game in which all players jointly choose strategies.

Now we define the value of characteristic function for set $N \cup M$. Suppose that the path z_1, z_2 is realized during the game. Due to the stochastic transition from the first stage game to the second stage game we consider the mathematical expectation of the total cost of the players. A strategy $x_i(\cdot)$ for player $i \in N$ is a mapping which determines for each stage game which local strategy x_i in this stage game is to be selected. Thus $x_i(z_1) = x_i^1$ and $x_i(z_2) = x_i^2, i \in N$.

$$\begin{aligned} V^1(N \cup M) &= \min_{x(\cdot)} \{C(F_{x^1}(N \cup M, C)) + [pC(F_{x^2 \setminus \{m\}}(N \cup M \setminus \{m\}, C)) + \\ &\quad + (1-p)C(F_{x^2}(N \cup M, C))] \} = C(F_{\bar{x}^1}(N \cup M, C)) + \\ &\quad + [pC(F_{\bar{x}^2 \setminus \{m\}}(N \cup M \setminus \{m\}, C)) + (1-p)C(F_{\bar{x}^2}(N \cup M, C))] \} \end{aligned}$$

where p defined as above, strategies $\bar{x}_i(\cdot), i \in N$ are called cooperative strategies, and strategy profile $\bar{x}(\cdot) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ is called as cooperative strategy profile.

In a similar way, given $S \subset N, S' = S \cup \{0\}$, define the worth of coalition S' , $V(S')$, assuming that players in $N \cup M \setminus S'$ are out. In this situation all players in $N \cup M \setminus S'$ don't want to be connected to sources. Let's define the characteristic function for set $S \subset N, S' = S \cup M$ as follows:

If $m \in S, S' = S \cup M$,

$$\begin{aligned} V^1(S') &= \min_{x(\cdot)} \{C(F_{x^1}(S', C^{S'})) + [pC(F_{x^2 \setminus \{m\}}(S' \setminus \{m\}, C^{S' \setminus \{m\}})) + \\ &\quad + (1-p)C(F_{x^2}(S', C^{S'}))] \} = C(F_{\bar{x}^1}(S', C^{S'})) + \\ &\quad + [pC(F_{\bar{x}^2 \setminus \{m\}}(S' \setminus \{m\}, C^{S' \setminus \{m\}})) + (1-p)C(F_{\bar{x}^2}(S', C^{S'}))] \}. \end{aligned}$$

If $m \notin S, S' = S \cup M, x(\cdot) = \{x_i(\cdot), i \in S\}$,

$$\begin{aligned} V^1(S') &= \min_{x(\cdot)} [C(F_{x^1}(S', C^{S'})) + C(F_{x^2}(S', C^{S'}))] = \\ &= C(F_{\bar{x}^1}(S', C^{S'})) + C(F_{\bar{x}^2}(S', C^{S'})), \end{aligned}$$

where p defined as above, $C^{S'}$ is the cost matrix restricted to S' .

Now define the value of characteristic function for set $N \cup M$ at the second stage.

If the player m dropped out of the game after the first stage,

$$\begin{aligned} V^2(N \cup M \setminus \{m\}) &= \min_{x^2(\cdot)} C(F_{x^2 \setminus \{m\}}(N \cup M \setminus \{m\}, C)) = \\ &= C(F_{\bar{x}^2 \setminus \{m\}}(N \cup M \setminus \{m\}, C)) \end{aligned}$$

where strategies $\bar{x}_i^2(\cdot)$, $i \in N \setminus \{m\}$ are called cooperative strategies, and strategy profile $\bar{x}^2(\cdot) = (\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_{m-1}^2, \bar{x}_{m+1}^2, \dots, \bar{x}_n^2)$ is called as cooperative strategy profile.

If the player m didn't drop out of the game after the first stage,

$$V^2(N \cup M) = \min_{x^2(\cdot)} C(F_{x^2}(N \cup M, C)) = C(F_{\bar{x}^2}(N \cup M, C))$$

where strategies $\bar{x}_i^2(\cdot)$, $i \in N$ are called cooperative strategies, and strategy profile $\bar{x}^2(\cdot) = (\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_n^2)$ is called as cooperative strategy profile.

Now we consider the characteristic function for set $S \subset N$, $S' = S \cup M$ at the second stage. Given a coalition S , because the player m would never drop out of the game, the value of characteristic function is simply equal to the minimum sum of costs of players who are in the set S .

$$V^2(S') = \min_{x(\cdot)} C(F_{x^2}(S', C^{S'})) = C(F_{\bar{x}^2}(S', C^{S'}))$$

where $S \subset N$, $S' = S \cup \{0\}$, $C^{S'}$ is the cost matrix restricted to S' .

From the above, the Shapley value in two-stage minimum cost spanning forest game is defined as

$$Sh_i^1(N \cup M, C) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} [V^1(S'_{\pi(i)} \cup \{i\}) - V^1(S'_{\pi(i)})], \quad (6)$$

where $\forall i \in N$, $S' = S \cup M$, $S \subseteq N$, Π denotes the set of all permutations over N , and $S_{\pi(k)} = \{i | \pi(i) < \pi(k)\}$.

Similarly, at the second stage, the Shapley value in one stage minimum cost spanning forest game is defined as follow. If the player m dropped out of the game after the first stage,

$$Sh_i^2(N \cup M \setminus \{m\}, C) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} [V^2(S'_{\pi(i)} \cup \{i\}) - V^2(S'_{\pi(i)})], \quad (7)$$

where $\forall i \in N \setminus \{m\}$, $S' = S \cup \{0\}$, $S \subseteq N \setminus \{m\}$, Π denotes the set of all permutations over $N \setminus \{m\}$, and $S_{\pi(k)} = \{i | \pi(i) < \pi(k)\}$.

If the player m didn't drop out of the game after the first stage,

$$Sh_i^2(N \cup M, C) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} [V^2(S'_{\pi(i)} \cup \{i\}) - V^2(S'_{\pi(i)})], \quad (8)$$

where $\forall i \in N$, $S' = S \cup \{0\}$, $S \subseteq N$, Π denotes the set of all permutations over N , and $S_{\pi(k)} = \{i | \pi(i) < \pi(k)\}$.

For the Shapley value we consider its subgame consistency problem. Subgame consistency of the cooperative solution concept was introduced for the first time in.

Using the IDP (imputation distribution procedure) we can construct the dynamic Shapley Value. Imputation distribution procedure of the Shapley value in two-stage minimum cost spanning forest game is a scheme $\beta = (\beta^1, \beta^2)$ s.t.

$$\beta^1 = Sh^1(N \cup M, C) - pSh^2(N \cup M \setminus \{m\}, C) - (1-p)Sh^2(N \cup M, C)$$

$$\beta^2 = pSh^2(N \cup M \setminus \{m\}, C) + (1-p)Sh^2(N \cup M, C)$$

where p defined as above.

Following, the Shapley value Sh^1 is called time consistent in the game with spanning forest, if there exists a nonnegative IDP ($\beta_i^1 \geq 0, \beta_i^1 \geq 0, \forall i \in N$) such that the following condition holds:

$$Sh^1(N \cup M, C) = \beta^1 + pSh^2(N \cup M \setminus \{m\}, C) + (1-p)Sh^2(N \cup M, C)$$

$$pSh^2(N \cup M \setminus \{m\}, C) + (1-p)Sh^2(N \cup M, C) = \beta^2$$

where p defined as above.

Proposition: Let an minimum cost spanning forest game with player set N and set of sources M , defined on the graph $G(N \cup M, E)$. Suppose that there is a player $i \in N, i \neq m$ with $M(i) = M$. Constructed above IDP β for the Dynamic Shapley value $Sh^1 = (Sh_1^1, \dots, Sh_n^1)$ is subgame consistent.

References

- [1] J. Kuipers, “Minimum cost forest games”, *Journal*, 26, 367 (1997).
- [2] C.R. Edward, “The minimum cost spanning forest game”, *Journal*, 23,4, 355-357 (1987).
- [3] L.A. Petrosyan and N.N. Danilov, “Vestnik of the Leningrad State University”, *Journal*, 1, (1979).
- [4] Bird C G., “On cost allocation for a spanning tree: a game theoretic approach”, *Journal*, 6(4), 335-350 (1976).
- [5] A. Kar, “Axiomatization of the Shapley value on minimum cost spanning tree games”, *Journal*, 38(2), 265-277 (2002).

Strongly Time-Consistent Core in Multistage Game

Булгакова М.А., Петросян Л.А.

mari_bulgakova@mail.ru, l.petrosyan@spbu.ru

СПбГУ, Университетская наб. д.7-9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

Сильно-динамически устойчивое ядро в многошаговой игре

Аннотация: В данной работе применяется подход, предложенный в [1] для построения сильно-динамически устойчивого ядра. На основе введения некоторой новой характеристической функции строится подмножество ядра многошаговой кооперативной игры, которое обладает свойством сильно-динамической устойчивости. Это подмножество можно рассматривать как новый принцип оптимальности в рассматриваемой игре.

Пусть задана m -шаговая игра n -лиц G , которая развивается следующим образом. В состоянии z_1 происходит одновременная игра

$$\Gamma(z_1) = \langle N; X_1^{z_1}, X_2^{z_1}, \dots, X_n^{z_1}; K_1^{z_1}, \dots, K_n^{z_1} \rangle$$

Где N - множество игроков, $X_i^{z_1}$ - множество стратегий i -го игрока в состоянии z_1 , $K_i^{z_1}$ - функция выигрыша.

В игре $\Gamma(z_1)$ выбираются стратегии $x_1(z_1) \in X_1^{z_1}, \dots, x_i(z_1) \in X_i^{z_1}, \dots, x_n(z_1) \in X_n^{z_1}$ и игра переходит в следующее состояние $z_2 = T(x_1(z_1), \dots, x_n(z_1)) = T(x(z_1)), \dots, z_k = T(u(z_{k-1}))$. Игра заканчивается на шаге m в состоянии $z_m = T(x(z_{m-1}))$. Получается последовательность игр: $\Gamma(z_1), \Gamma(z_2), \dots, \Gamma(z_m)$.

Стратегией игрока в игре G $u(\cdot), i \in N$ является функция, которая в каждой текущей одновременной игре $\Gamma(z)$ выбирает управление (стратегию) i -го игрока в этой игре, то есть $u_i(z) = x_i^z \in X_i^z$.

Тогда функцию выигрыша $H_i, i \in N$ в игре G определим как:

$$\begin{aligned} H_i(u_1(\cdot), \dots, u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) &= \sum_{t=1}^n K_i(u_1(z_t), \dots, u_i(z_t), \dots, u_n(z_t)) = \\ &= \sum_{t=1}^n K_i(x_1^{z_t}, \dots, x_i^{z_t}, \dots, x_n^{z_t}) \end{aligned}$$

Рассмотрим кооперативный вариант игры. Пусть существует такой набор стратегий $\bar{u}(\cdot)$, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} H_i(\bar{u}_1(\cdot), \dots, \bar{u}_n(\cdot)) &= \max_{u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m K_i(u_1(z_t), \dots, u_n(z_t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t)) \quad (1) \end{aligned}$$

Последовательность $\bar{z}_1, \bar{z}_2 = T(\bar{u}(z_1)), \dots, \bar{z}_t = T(\bar{u}(z_t)), \dots, \bar{z}_m = T(\bar{u}(z_m))$ — будем называть кооперативной траекторией и обозначим ее как $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_t, \dots, \bar{z}_m)$.

Для определенности далее будем обозначать игру G как $G(z_1)$, тем самым фиксируя, что игра начинается с позиции z_1 . Введем характеристическую функцию $v(S; \bar{z}_t)$, $S \subset N$ классическим способом. Значение характеристической функции $v(S; \bar{z}_1)$ вычисляется как значение антагонистической игры на основе игры $G(z_1)$, между коалицией S (первый максимизирующий игрок) и коалицией $N \setminus S$ (второй минимизирующий игрок). При этом выигрыш коалиции S полагается равным сумме выигрышей игроков из этой коалиции.

Введем новую функцию: $\bar{v}(S; \bar{z}_1)$, $S \subset N$. Следуя [2], преобразуем $v(S; \bar{z}_1)$ - характеристическую функцию, введенную классическим образом:

$$\bar{v}(S; \bar{z}_1) = \sum_{t=1}^m \frac{v(S; \bar{z}_t) \cdot \sum_{i=1}^n K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t))}{v(N; \bar{z}_t)}$$

Аналогично для $\bar{z}_l \in \bar{z}$:

$$\bar{v}(S; \bar{z}_l) = \sum_{t=l}^m \frac{v(S; \bar{z}_t) \cdot \sum_{i=1}^n K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t))}{v(N; \bar{z}_t)}$$

Можно показать, что функция $\bar{v}(S; \bar{z}_1)$ обладает всеми свойствами характеристической функции игры $\Gamma(z_1)$, а именно:

$$\bar{v}(N; \bar{z}_1) = v(N; \bar{z}_1) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t))$$

$$\bar{v}(S_1 \cup S_2; \bar{z}_1) \geq \bar{v}(S_1; \bar{z}_1) + \bar{v}(S_2; \bar{z}_1)$$

Для $S_1, S_2 \subset N, S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (здесь используется супераддитивность функции $v(S; \bar{z}_1)$).

Построение сильно-динамически устойчивого подядра. Построим сильно-динамически устойчивое (согласно [2]) подядро игры $G(z_1)$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda(S) = \max_k \frac{v(S; \bar{z}_k)}{v(N; \bar{z}_k)},$$

и функцию:

$$\bar{\bar{v}}(S; \bar{z}_1) = \sum_{t=1}^m \lambda(S) \sum_{i=1}^n K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t))$$

Тогда

$$\bar{v}(S; \bar{z}_1) = \lambda(S)v(N; \bar{z}_1)$$

Аналогично для подыгры $G(z_l)$:

$$\bar{\bar{v}}(S; \bar{z}_l) = \lambda(l, S)v(N; \bar{z}_l)$$

Здесь $\lambda(l, S) = \max_{l \leq p \leq m} \frac{v(S; \bar{z}_p)}{v(N; \bar{z}_p)}$. Легко видеть, что имеет место:

$$\bar{\bar{v}}(S; \bar{z}_l) \geq \bar{v}(S; \bar{z}_l), l = 1, \dots, m$$

А так же верно

$$\bar{\bar{v}}(N; \bar{z}_l) = \bar{v}(N; \bar{z}_l), l = 1, \dots, m$$

Кроме того, для всех $S_1, S_2, S_1 \subset S_2$ из монотонности $v(S; \bar{z}_l)$ следует монотонность $\bar{\bar{v}}(S; \bar{z}_l)$ по S :

$$\bar{\bar{v}}(S_1; \bar{z}_l) \geq \bar{\bar{v}}(S_2; \bar{z}_l)$$

Свойство супераддитивности по S для функции $\bar{\bar{v}}(S; \bar{z}_l), l = 1, \dots, m$ в общем случае не выполняется. Запишем неравенство:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{v}}(S; \bar{z}_l) &= \lambda(l, S)v(N; \bar{z}_l) = \max_{l \leq p \leq m} \frac{v(S; \bar{z}_p)}{v(N; \bar{z}_p)} v(N; \bar{z}_l) \geq \\ &\geq v(N; \bar{z}_l) \frac{v(S; \bar{z}_l)}{v(N; \bar{z}_l)} \geq v(S; \bar{z}_l) \end{aligned}$$

Сформулируем это в виде леммы.

Лемма 1:

$$\bar{\bar{v}}(S; \bar{z}_l) \geq v(S; \bar{z}_l)$$

Обозначим через $C(z_1)$ ядро игры $G(z_1)$, и через $C(z_l)$, соответственно, ядро подыгры $G(z_l)$. Обозначим через $\bar{C}(z_l)$ множество решений системы неравенств

$$\sum_{i \in S} \xi_i \geq \bar{v}(S; z_l), S \subset N$$

$$\sum_{i \in N} \xi_i = \bar{v}(N; z_l)$$

Предположим, что множество $\bar{C}(z_l)$ не пусто, при $l = 1, \dots, m$. Это множество является аналогом ядра $C(z_l)$, если в качестве характеристической функции взять функцию $\bar{\bar{v}}(S; \bar{z}_l)$.

Лемма 2: Имеет место включение:

$$\overline{\overline{C}}(z_l) \subset C(z_l) \cap \overline{C}(z_l)$$

Поскольку $\overline{\overline{C}}(z_l) \subset \overline{C}(z_l)$, то $\overline{\overline{C}}(z_l)$ является сильно динамически устойчивым, так как $\overline{C}(z_l)$ является таковым см. [2]). Из Леммы 2 следует, что дележки из $\overline{\overline{C}}(z_l)$ при всех $l = 1, \dots, m$ принадлежат классическому ядру игры $G(z_l)$. Таким образом построено сильно-динамически устойчивое подядро $C(z_l)$ для подигры $G(z_l)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект 17-51-53030 ГФЕН_а, "Рациональность и устойчивость в играх на сетях").

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Петросян Л.А., Панкратова Я. Б., "Построение сильно-динамически устойчивых подядер в дифференциальных играх с предписанной продолжительностью", *Труды института математики и механики УрО РАН*, 23, №. 1, 33–39 (2017).
- [2] Петросян Л.А. "Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности", *Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия*, №. 4, 40 — 46 (1993).
- [3] Basar T., Olsder G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*, London: Academic Press, 1982
- [4] Parilina E., Zaccour G., "Node-consistent core for games played over event trees", *Automatica*, Vol. 53, pp. 304-311, 2015.

Conception of Coalitional Equilibrium in a Three-Person Game

Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.

zhkvlad@yandex.ru, kudrkn@gmail.com

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1, Москва, 119234, Россия; Южно-Уральский государственный университет (НИУ), просп. Ленина 76, Челябинск, 454080, Россия;

Концепция коалиционного равновесия в игре трех лиц

В докладе предлагается новая концепция оптимального решения (которое мы будем называть «коалиционное равновесие»), основанная на объединении понятий равновесий по Нэшу [1] и Бержу [2]. Предлагаемое равновесие удовлетворяет условиям взаимовыгодной практики Сагдена [3,4].

Рассмотрим игру трех лиц

$$\Gamma_3 = \langle \{1, 2, 3\}, \{X_i\}_{i=1,2,3}, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \rangle.$$

В Γ_3 , $\{1, 2, 3\}$ – множество номеров игроков, каждый из которых выбирает свою стратегию $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2, 3$, в результате чего формируется ситуация $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \prod_{i=1}^3 X_i \subset \mathbb{R}^n$ ($n = \sum_{i=1}^3 n_i$). На множестве ситуаций X определены функции выигрыша игроков $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$).

Для игры Γ_3 возможны следующие 5 коалиционных структур

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \quad \mathfrak{P}_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \mathfrak{P}_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \\ \mathfrak{P}_4 &= \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \mathfrak{P}_5 = \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Здесь \mathfrak{P}_1 соответствует бескоалиционному характеру игры, \mathfrak{P}_5 – кооперативному. Условия индивидуальной рациональности могут быть сформулированы для структуры \mathfrak{P}_1 . Будем далее для $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ использовать обозначения $-i = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$, т.е. для $i = 1 \rightarrow -i = \{2, 3\}$, для $i = 2 \rightarrow -i = \{1, 3\}$, и, для $i = 3 \rightarrow -i = \{1, 2\}$.

Тогда условие индивидуальной рациональности для ситуации $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in X$ означает, что

$$f_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) = \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i^0, x_{-i}) \leq f_i^0(x^*), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

то есть, применение максиминной стратегии x_i^0 влечет за собой следующие неравенства:

$$f_i^0 \leq f_i(x^*), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Для коалиционной структуры \mathfrak{P}_5 в игре Γ_3 с множеством ситуаций $X^* \subseteq X$ ситуация $x^* \in X^* \subseteq X$ оптимальна по Парето в трехкри-териальной задаче $\Gamma_{X^*} = \langle X^*, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \rangle$ если $\forall x \in X^*$ несовместна система неравенств $f_i(x) \geq f_i(x^*)(i = 1, 2, 3)$, из которых, хотя бы одно – строгое. Согласно лемме Карлина [5, с.71], если

$$\sum_{i=1}^3 f_i(x^*) = \max_{x \in X^*} \sum_{i=1}^3 f_i(x), \quad (3)$$

то ситуация x^* максимальна по Парето в задаче Γ_{X^*} .

Далее мы формализуем следующие условия рациональности для коалиционных структур $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ и \mathfrak{P}_4 ; Эти условия базируются на объединении концепций равновесий по Нэшу и Бержу.

Для \mathfrak{P}_2 условие *коалиционной рациональности* означает выполнение четырех неравенств:

$$f_1(x_1^*, x_2^*, x_3) \leq f_1(x^*) \quad \forall x_3 \in X_3, \quad (4a)$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*, x_3) \leq f_2(x^*) \quad \forall x_3 \in X_3, \quad (4b)$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3^*) \leq f_1(x^*) \quad \forall x_j \in X_j \ (j = 1, 2), \quad (4c)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3^*) \leq f_2(x^*) \quad \forall x_j \in X_j \ (j = 1, 2); \quad (4d)$$

для \mathfrak{P}_3 :

$$f_1(x_1, x_2^*, x_3) \leq f_1(x^*) \quad \forall x_k \in X_k \ (k = 1, 3), \quad (5a)$$

$$f_3(x_1, x_2^*, x_3) \leq f_3(x^*) \quad \forall x_k \in X_k \ (k = 1, 3), \quad (5b)$$

$$f_1(x_1^*, x_2, x_3^*) \leq f_1(x^*) \quad \forall x_2 \in X_2, \quad (5c)$$

$$f_3(x_1^*, x_2, x_3^*) \leq f_3(x^*) \quad \forall x_2 \in X_2; \quad (5d)$$

и, наконец, для \mathfrak{P}_4 :

$$f_2(x_1, x_2^*, x_3^*) \leq f_2(x^*) \quad \forall x_1 \in X_1, \quad (6a)$$

$$f_3(x_1, x_2^*, x_3^*) \leq f_3(x^*) \quad \forall x_1 \in X_1, \quad (6b)$$

$$f_2(x_1^*, x_2, x_3) \leq f_2(x^*) \quad \forall x_l \in X_l \ (l = 2, 3), \quad (6c)$$

$$f_3(x_1^*, x_2, x_3) \leq f_3(x^*) \quad \forall x_l \in X_l \ (l = 2, 3). \quad (6d)$$

Будем говорить, что для ситуации $x^* \in X$, для которой выполнены все 12 неравенств (4a)–(6d), удовлетворяет условиям *коалиционной рациональности* в игре Γ_3 . Множество таких ситуаций обозначим X^* .

Далее, при определении оптимального решения, мы будем использовать только шесть из пятнадцати неравенств (2), (4a)–(6d), поскольку остальные 9 непосредственно следуют из этих шести.

Этот факт устанавливается в следующих двух леммах.

Лемма 1. *Если выполнены условия (4c), (6c) и (6d), то:*

$$f_i(x^*) \geq f_i^0 = \max_{x_i} \min_{x_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) = \min_{x_{-i}} f_i(x_i^0, x_{-i}) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Лемма 2. *Имеют место следующие импликации:*

$$(5a) \Rightarrow (4a), (4c) \Rightarrow (5c), (4d) \Rightarrow (6a), (6c) \Rightarrow (4b), (5b) \Rightarrow (6b), (6d) \Rightarrow (5d).$$

Обозначая далее $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$, введем следующее определение.

Определение.

Назовем пару $(x^*, f(x^*)) \in X \times \mathbb{R}^3$ коалиционным равновесием в игре Γ_3 , если выполнены следующие условия:

1. справедливы шесть неравенств:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} f_j(x_1, x_2, x_3^*) &= f_j(x^*) \quad (j = 1, 2), \\ \max_{x_1, x_3} f_k(x_1, x_2^*, x_3) &= f_k(x^*) \quad (k = 1, 3), \\ \max_{x_2, x_3} f_l(x_1^*, x_2, x_3) &= f_l(x^*) \quad (l = 2, 3); \end{aligned} \quad (7)$$

2. ситуация $x^* \in X$ максимальна по Парето на множестве всех коалиционно рациональных ситуаций X^* в игре Γ_3 , т.е. $\forall x \in X^*$ несогласна система неравенств $f_i(x) \geq f_i(x^*)$ ($i = 1, 2, 3$), из которых, по крайней мере, одно строгое.

Достаточные условия существования коалиционного равновесия получим, следуя [6,7], с помощью специального вида свертки Гермейера [8] функций выигрыша. А именно, используя два n -вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in X \subset \mathbb{R}^n$ ($n = \sum_{i=1}^3 n_i$) и $z = (z_1, z_2, z_3) \in X$ и семь скалярных функций

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, z) &= f_1(x_1, x_2, z_3) - f_1(z), \\ \varphi_2(x, z) &= f_2(x_1, x_2, z_3) - f_2(z), \\ \varphi_3(x, z) &= f_1(x_1, z_2, x_3) - f_1(z), \\ \varphi_4(x, z) &= f_3(x_1, z_2, x_3) - f_3(z), \\ \varphi_5(x, z) &= f_2(z_1, x_2, x_3) - f_2(z), \\ \varphi_6(x, z) &= f_3(z_1, x_2, x_3) - f_3(z), \\ \varphi_7(x, z) &= \sum_{l=1}^3 f_l(x) - \sum_{l=1}^3 f_l(z), \end{aligned} \quad (8)$$

построим свертку Гермейера функций (8)

$$\varphi(x, z) = \max_{k=1, \dots, 7} \varphi_k(x, z), \quad (9)$$

определенную на $X \times (Z = X) \subset \mathbb{R}^{2n}$, где $X = \prod_{i=1}^3 X_i$ — множество ситуаций в игре Γ_3 .

Седловая точка $(\bar{x}, z^*) \in X \times Z$ скалярной функции $\varphi(x, z)$ (из (8), (9)) в антагонистической игре

$$\Gamma^\alpha = \langle X, Z = X, \varphi(x, z) \rangle \quad (10)$$

определяется следующей системой неравенств

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(\bar{x}, z^*) \leq \varphi(\bar{x}, z) \quad \forall x \in X, z \in X. \quad (11)$$

Утверждение. Если в игре Γ^α существует седловая точка (\bar{x}, z^*) , то минимаксная стратегия $z^* \in X$ игры Γ^α является ситуацией коалиционного равновесия в игре Γ_3 .

Существование в игре Γ_3 коалиционного равновесия в смешанных стратегиях, при обычных в теории игр ограничениях, показано в следующей теореме.

Теорема. Если в игре Γ_3 множества $X_i \in \text{comp}\mathbb{R}^n$ и $f_i(\cdot) \in C(X)$ ($i = \{1, 2, 3\}$), тогда в Γ_3 существует коалиционное равновесие в смешанных стратегиях.

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] NASH J. "Equilibrium points in N-person games", *Proc. Nat. Academ. Sci. USA.*, 36, 48-49 (1950).
- [2] Жуковский В. И., Чикрий А. А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры*. Киев.: Наукова Думка, (1994).
- [3] Sugden, R. "Mutual advantage, Conventions and Team Reasoning", *International Review of Economics*, 58, 9-20 (2011).
- [4] Sugden, R. "Team Reasoning and Intentional Cooperation for Mutual Benefit", *Journal of Social Ontology*, 1(1), 143-166 (2015).
- [5] Подиновский В. В., Ногин В. Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. КМ.: Физматлит, (2007).
- [6] Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. "Pareto-optimal Nash equilibrium: Sufficient conditions and existence in mixed strategies", *Automation and Remote Control*, 77, No. 8, 1500-1510 (2016).
- [7] Жуковский В. И., Кудрявцев К.Н. "Математические основы Золотого правила. I. Статический вариант", *Математическая теория игр и ее приложения*, 7, No. 3, 16-47 (2015).
- [8] Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. М.: Наука, (1971).

Computing the Pareto-Optimal Nash Equilibrium in Bimatrix Game

Кудрявцев К.Н., Жуковский В.И., Стабулит И.С.

kudrkn@gmail.com, zhkvlad@yandex.ru, irisku76@mail.ru

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), просп. Ленина 76,
Челябинск, 454080, Россия; Московский государственный университет им.
М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1, Москва, 119234, Россия; Челябинский
государственный университет, ул. Братьев Кашириных 129, Челябинск,
454001, Россия

Построение оптимальных по Парето равновесий по Нэшу в биматричных играх

В работе [1], для бескоалиционной игры N лиц, авторами были предложены достаточные условия существования равновесия по Нэшу, одновременно максимального по Парето по отношению ко всем остальным равновесиям по Нэшу. В докладе представлена модификация достаточных условий из [1], позволяющая конструктивно находить такие равновесия в смешанных стратегиях для биматричных игр, основанная на поиске минимакса в специального вида гермейеровской свертке критериев.

Рассмотрим бескоалиционную игру N лиц

$$\langle \mathbb{N}, \{\mathbf{X}_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle, \quad (1)$$

где $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$ – множество порядковых номеров игроков; каждый i -й игрок, не объединяясь с другими в коалицию, выбирает и использует свою чистую стратегию $x_i \in \mathbf{X}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, в результате образуется ситуация $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{X} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{X}_i \subset \mathbb{R}^n$ ($n = \sum_{i \in \mathbb{N}} n_i$); на множестве ситуаций

\mathbf{X} для каждого $i \in \mathbb{N}$ определена функция выигрыша $f_i(x)$, значение которой – выигрыш i -го игрока. Далее используем также обозначения $(x \| z_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$, $f = (f_1, \dots, f_N)$.

Введем $N + 1$ скалярную функцию

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, z) &= f_i(z \| x_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}), \\ \varphi_{N+1}(x, z) &= \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(z) - \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

где $z = (z_1, \dots, z_N)$, $z_i \in \mathbf{X}_i$ ($i \in \mathbb{N}$), $z \in \mathbf{X}$, $x \in \mathbf{X}$ и постоянная $\alpha \geq 0$. Рассмотрим гермейеровскую свертку [2, с.43] скалярных функций (2)

$$\varphi(x, z, \alpha) = \max_{j=1, \dots, N, N+1} \varphi_j(x, z). \quad (3)$$

Теорема. Если существуют постоянная $\alpha_0 \geq 0$ и ситуация $z^* \in \mathbf{X}$ такие, что

$$\min_{z \in \mathbf{X}} \max_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x, z, \alpha_0) = \max_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x, z^*, \alpha_0) = 0,$$

и для любого значения параметра $\alpha < \alpha_0$

$$\min_{z \in \mathbf{X}} \max_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x, z, \alpha) > 0,$$

то z^* является ситуацией равновесия по Нэшу в игре (1), одновременно максимальной по Парето по отношению ко всем остальным ситуациям равновесия по Нэшу в (1).

Отметим, что если в условиях теоремы $\alpha_0 = 0$, то найденная ситуация z^* является оптимальной по Парето на всем множестве ситуаций \mathbf{X} .

Биматричные игры. Рассмотрим биматричную игру $\Gamma(A, B)$, где A и $B - n \times n$ -матрицы выигрыша первого и второго игроков соответственно. Множество смешанных стратегий i -го игрока ($i = 1, 2$)

$$\mathbf{X}_i = \left\{ x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}) \in \mathbb{R}^n \mid x_i^{(j)} \geq 0, (j = 1, \dots, n), x_i^{(1)} + \dots + x_i^{(n)} = 1 \right\},$$

ситуации $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$, а функции выигрыша

$$f_1(x) = \langle x_1, Ax_2 \rangle, \quad f_2(x) = \langle x_2, Bx_1 \rangle.$$

Гермейеровская свертка критериев $\varphi(x, z, \alpha)$ определяется согласно (2) и (3), где, как и выше, $z = (z_1, z_2) \in \mathbf{X}$.

Для поиска в классе смешанных стратегий оптимального по Парето равновесия по Нэшу (PONE) в игре $\Gamma(A, B)$ может быть использован следующий алгоритм:

1. Инициализировать $\alpha := 0$;
2. Вычислить $\beta = \min_{z \in \mathbf{X}} \max_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x, z, \alpha) = \max_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x, z^*, \alpha_0)$;
3. Если $\beta = 0$, то PONE есть z^* ,
иначе $\alpha := \alpha + \beta$, перейти к пункту 2.

Отметим, что решение задачи поиска внутреннего максимума $\max_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x, z, \alpha)$ при каждой фиксированной ситуации z сводится к нахождению наибольшего элемента n -вектора, что делает эту задачу легко разрешимой.

Для поиска внешнего минимума авторами предлагается подходящая модификация метода дифференциальной эволюции [3].

Предложенный алгоритм был реализован в виде программы, результаты работы которой будут представлены в докладе.

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.А03.21.0011.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. “Pareto-optimal Nash equilibrium: Sufficient conditions and existence in mixed strategies”, *Automation and Remote Control*, 77, No. 8, 1500–1510 (2016).
- [2] Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. М.: Наука, (1971).
- [3] Storn R., Price K. “Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces”, *Journal of Global Optimization*, 11, No. 4, 341-359 (1997).

A Search Aspects of a Cyclic Games

Лебедев В.Н.

lebedevvn@mail.ru

Волгоградский государственный университет, Университетский проспект , дом 100, Волгоград, 400062, Россия

Вычислительные аспекты циклических игр

Основным предметом работы является следующая антагонистическая игра с полной информацией [3]. Задан ориентированный граф без тупиков ($V : A \cup B; E; h' : E \rightarrow [-h, h], v \in V$) с множеством вершин V , множеством ориентированных ребер E , с целочисленной весовой функцией $h' : E \rightarrow [-h, h]$ на ребрах и начальной вершиной игры $v \in V$. Отсутствие тупиков означает, что в каждой вершине графа есть хотя бы одно исходящее из этой вершины ребро. Вершины разбиты на два непересекающихся множества A - вершины с правом хода первого игрока, B - вершины с правом хода второго игрока. Из начальной вершины v фишкa переносится игроками по ребрам графа. Игра проходит до первого цикла (т.е. как только фишкa приходит в вершину, где была ранее, игра заканчивается). Первый игрок побеждает в этой игре, если вес возникшего цикла неотрицателен. В противном случае, когда вес возникшего цикла отрицателен выигрывает второй игрок (вес цикла - сумма весов ребер цикла) . Мы рассматриваем вопросы временной сложности алгоритмов решения представленной циклической игры на победителя.

Данная задача может быть представлена нахождением минимакса линейного функционала при линейных ограничениях, связующие переменные. Эта задача в нелинейной постановке изучалась в работе [4]. Циклические игры на победителя обладают достаточной степенью общности. Такие игры имеют приложения для проверки корректности параллель-

ных распределенных систем, в том числе в задачах анализа расписаний [1], в активных системах [2].

В данной работе получены два основных результата.

Во-первых, для незначительной модификации известного метода динамического программирования [7] показываем полиномиальную оценку его ожидаемого времени для любого графа игры.

Теорема 1. Пусть задан произвольный граф $(V = A, B; E)$. Рассматриваем множество исходов, полученных при равномерном распределении весов ребер $h' : E \rightarrow [-h, h]$. Среднее время алгоритма динамического программирования, который решает полученную циклическую игру на победителя удовлетворяет условиям: $f(n, |V|) = O(\text{poly}(|V|) \ln(h))$ при $h = \Omega(\exp(|E|))$.

Рассмотрим траекторную игру за t шагов из начальной вершины v . Эта игра также непрерывно проходит по ребрам графа и заканчивается точно через t шагов. Выигрыш игрока A , соответственно проигрыш игрока B - есть сумма весов ребер возникшей траектории. Игра конечная, с полной информацией, поэтому в ней есть цены. Пусть $f(v, t)$ - цена траекторной игры из начальной вершины v за t шагов ($t = 0, \dots; v \in V$). Тогда цены за $t + 1$ шаг определяются условиями динамического программирования (1), (2). Начальные цены нулевые $f(v, 0) = 0$, $v \in V$. Далее введено обозначение $V(v)$ - конечные вершины ребер, которые исходят из вершины v .

$$f(v, t + 1) = \max_{w \in V(v)} [f(w, t) + c(v, w)], v \in A. \quad (1)$$

$$f(v, t + 1) = \min_{w \in V(v)} [f(w, t) + c(v, w)], v \in B. \quad (2)$$

Показано, что траекторная игра эквивалентна игре на победителя при больших t . Отметим, что вариант экспоненциально больших весов ребер существенен. Например, при полиномиально малых весах ребер задача определения победителя полиномиальна даже в гарантированной оценке сложности.

Во-вторых, даем опровержение гипотезы работы [6]. В цитируемой статье дана гипотеза о полиномиальности недетерминированного алгоритма для решения игр на четность. В игре на четность 1-ый игрок побеждает, если максимальный вес ребер цикла четный, и побеждает 2-ой игрок, если максимальный вес ребер цикла нечетный. Такие игры полиномиально сводимы к играм на победителя. В работе [5] представлены примеры задач с экспоненциальным временем работы недетерминированного алгоритма.

Работа поддержана РФФИ-р-Поволжье (грант N 14-01-97002-а)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алифанов Д.В., Лебедев В.Н., Цурков В.И. *Оптимизация расписаний с логическими условиями предшествования.*// Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 94-99.
- [2] Воронин А.А., Губко М.В., Мишин С.П., Новиков Д.А. *Математические модели организаций:* Учебное пособие.- М.: Ленанд. 2008.-360 с.
- [3] Гурвич В. А., Карзанов А. В., Хачиян Л. Г. *Циклические игры и нахождение минимаксных средних циклов в ориентированных графах* // ЖВМ МФ. 1988. Т. 28. № 9. С. 1407–1417.
- [4] Демьянов В.Ф. *О задаче минимакса при связных ограничениях* // ЖВМиМФ. № 3. 1972. С. 799-804.
- [5] Лебедев В.Н. *Экспоненциальные примеры решения игр на четность* //ЖВММФ. 2016. Т.56. № 9. С.688-697. Engl. trans. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016. Vol. 56. № 4. P. 688-697.
- [6] E.Beffara, S.Vorobyov *Is randomized Gurvich-Karzanov-Khachiyan's algorithm for parity games polynomial?/* technical report. Department of Infomation Technology Uppsala University. Uppsala. Sweden. 2001. 25. p.
- [7] Zwick U., Paterson M. *The complexity of mean payoff games on graphs.* Theoretical Computer Sciense. 1996. V. 158. P. 343-359.

**Two Stage Network Game
in Passengers Transportation Problem***Ложкин А.*aleksejs.lozkin@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб.
д.7-9., Санкт-Петербург, 199034, Россия

**Двушаговая сетевая игра в задаче о перевозке
пассажиров**

В работе рассматривается ситуация на рынке с участием трех фирм, которые предлагают некоторые услуги по организации перевозок пассажиров. Эти фирмы взаимодействуют между собой (B2B business) и предлагают услуги конечному потребителю (B2C business). Примем, что одна из фирм осуществляет услуги авиаперевозок по некоторой сети, это будет авиакомпания. Остальные две фирмы являются аэропортами, которые предлагают услуги для авиакомпании по осуществлению рейсов, обслуживанию и консолидации пассажиров (в случае рейсов с пересадками). Интересы авиакомпании в данном сотрудничестве заключается в возможности организации рейсов через рассматриваемые аэропорты, что позволяет увеличить наполненность самолетов пассажирами и, как следствие, приводит к уменьшению издержек на перевозку одного пассажира.

В свою очередь, аэропорты заинтересованы в увеличении пассажиропотока через них, т.к. их прибыль зависит от количества рейсов, которые совершает авиакомпания с участием аэропорта, и от количества пассажиров, использующих услуги аэропорта. Авиакомпания может организовать почти все свои рейсы через один аэропорт, в этом случае большой пассажиропоток вызовет низкие издержки на перевозки пассажиров, но издержки на рейсы через другой аэропорт будут расти, что приведет к потере клиентов из-за повышения цен на билеты. Задача авиакомпании – равномерно распределить рейсы между двумя аэропортами при организации рейсов с одной пересадкой с учетом потока пассажиров в/из этих аэропортов.

Обозначим множество фирм через N , где $N = \{1, 2, 3\}$, $i \in N$, $i = 1$ – авиакомпания, $i \in N \setminus \{i = 1\}$ – множество аэропортов (используемых для организации пересадок). Рассмотрим A – множество пунктов отправления (аэропорты отправления, не рассматриваются в качестве фирм) пассажиров, где пассажир из пункта $a_i \in A$ может попасть в конечный пункт маршрута $a_j \in A$ $\forall i \neq j$ только через $n \in \{n_2, n_3\}$, где n_2, n_3 соответствуют фирме 2 и 3 в сети перевозок, т.е. прямые рейсы между пунктами из A исключены. Пересадочные пункты $n \in \{n_2, n_3\}$ могут быть начальным или конечным пунктом маршрута рейса, в этом случае рейс является прямым (не содержит пересадочных пунктов в маршруте). Множество узлов в сети определяется как $V = A \cup \{n_2, n_3\}$, множество возможных маршрутов рейсов $E = \{(a_i, n_k, a_j) | a_i, a_j \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}, \forall i \neq j\} \cup \{(a_i, n_k) | a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}\} \cup \{(n_k, a_i) | a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}\}$.

Каждое ребро из множеств $\{(a_i, n_k) | a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}\}$ и $\{(n_k, a_i) | a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}\}$ имеет пропускную способность $C = \{c_{a_i n_k}, c_{n_k a_i} | a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}\}$. Спрос на направления $D = \{d_{a_i n_k}, d_{n_k a_i}, d_{a_i a_j} | a_i, a_j \in A, \forall i \neq j, n_k \in \{n_2, n_3\}\}$, где $d_{a_i n_k}, d_{n_k a_i}, d_{a_i a_j} \in D$ спрос по соответствующим направлениям $(a_i, n_k), (n_k, a_i), (a_i, a_j)$, стоимость перелета для пассажиров по ребрам $F = \{f_{a_i n_k}, f_{n_k a_i} | a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}\}$.

Стоимость перелетов по маршрутам (a_i, n_1, a_j) и (a_i, n_2, a_j) могут отличаться. В случае минимизации издержек, фирма $i = 1$ стремится организовывать перелеты меньшей стоимости, тогда фирма теряет клиентов по более дорогим маршрутам. В данной задаче предлагается рассмотреть решение, когда фирма регулирует поток клиентов по направлениям с помощью пересадочных пунктов. Увеличение пассажиропотока через “не популярные” аэропорты позволяет сократить издержки перевозок и уменьшить стоимость перелета.

В моделировании экономической ситуации используются фиксированные стоимости F и пропускные способности C . Обозначим

$$X = \{x_{a_i n_k a_j}, x_{a_i n_k}, x_{n_k a_i} | a_i, a_j \in A, \forall i \neq j, n_k \in \{n_2, n_3\}\}$$

— множество пассажиров перевозимых по маршрутам, они являются переменными, которые могут выбираться авиакомпанией.

Сделаем следующие допущения при построении модели: фирмы $i = 2$ и $i = 3$ принимают решения по распределению рейсов и стараются максимизировать свой пассажиропоток; авиакомпания $i = 1$ не определяет точный маршрут рейса, а определяет наиболее выгодные направления на основе суммарной пропускной способности C и пассажиропотока D (отличие направления от маршрута в том, что направление - это начальный и конечный пункт в то время, как маршрут отражает полную последовательность пунктов). Допущения позволяют создать игровую ситуацию между компаниями $i = 2$ и $i = 3$ для поиска компромиссного решения по распределению рейсов для $i = 1$. Аэропорты $i = 2$ и $i = 3$ являются игроками в игре конкуренции за направления, общее количество которых определяет $i = 1$. Множество стратегий игроков S определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{a_j \in A, a_j \neq a_i} s_{a_i n_k a_j} + s_{a_i n_k} \leq c_{a_i n_k}, \forall a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}, \\ \sum_{a_i \in A, a_i \neq a_j} s_{a_i n_k a_j} + s_{n_k a_j} \leq c_{n_k a_j}, \forall a_j \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}, \end{cases}$$

где $s_{a_i n_k a_j}$, $s_{a_i n_k}$ и $s_{n_k a_j}$ количество пассажиров перевозимых по соответствующим маршрутам, проходящих через аэропорт n_k . Игроки $i = 2$ и $i = 3$ выбирают стратегии и определяют игровую ситуацию $(x_2, x_3) \in S$, где x_2 и x_3 вектор, отражающий количество перевозимых пассажиров по всем возможным маршрутам, проходящих через n_2 и n_3 соответственно. Выбор стратегий игроками происходит на основе договоренностей между собой и стремлении компаний увеличить поток пассажиров через свой аэропорт. Возможны ситуации, когда ни одна из компаний не хочет уступить, в этом случае игроки не получают ничего. В такой постановке игры предполагаем, что игроки обязательно приходят к решению, и нулевой выигрыш компаний заведомо исключается. Функция выигрыша игроков:

$$F(x_k) = \sum_{a_i \in A} (f_{n_k a_i} x_{n_k a_i} + f_{a_i n_k} x_{a_i n_k}) + \sum_{a_i \in A} \sum_{a_j \in A, a_j \neq a_i} (f_{a_i n_k} + f_{n_k a_j}) x_{a_i n_k a_j},$$

где $x_k \in S$ стратегия игрока $i = k$. Игра может быть представлена парой $\langle S, F \rangle$.

Поиск компромиссной ситуации в игре конкуренции со сделанными допущениями $\langle S, F \rangle$ позволяет найти решение для авиакомпании $i = 1$

в изначальной задаче сбалансированного распределения рейсов между пунктами пересадок. Поиск равновесия в игре основывается на принципе оптимальности Беллмана [1].

Равновесие достигается в результате выбора стратегий $(x_2, x_3) \in S$ игроками $i = 2$ и $i = 3$, которые доставляют максимум следующего функционала:

$$\begin{aligned} & \sum_{n_k \in \{n_2, n_3\}} \sum_{a_i \in A} (f_{n_k a_i} x_{n_k a_i} + f_{a_i n_k} x_{a_i n_k}) + \\ & + \sum_{a_i \in A} \sum_{n_k \in \{n_2, n_3\}} \sum_{a_j \in A, a_j \neq a_i} (f_{a_i n_k} + f_{n_k a_j}) \min(x_{a_i n_k a_j}, \min(\frac{d_{a_i a_j}}{2}, x_{a_i n_k a_j} + \\ & + \max(0, \frac{d_{a_i a_j}}{2} - x_{a_i n_k^* a_j}))), \end{aligned}$$

где n_k^* индекс, обозначающий игрока, конкурирующего с n_k . Пассажиропоток накладывает ограничение на переменные, т.к. перевоз количества пассажиров превышающий спрос — невозможен.

$$\begin{cases} \sum_{n_k \in \{n_2, n_3\}} x_{a_i n_k a_j} \leq d_{a_i a_j}, \forall a_i, a_j \in A, a_i \neq a_j, \\ x_{a_i n_k} \leq d_{a_i n_k}, \forall a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}, \\ x_{n_k a_j} \leq d_{n_k a_j}, \forall a_j \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}. \end{cases}$$

С учетом ограничений, получаем следующую задачу нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{n_k \in \{n_2, n_3\}} \sum_{a_i \in A} (f_{n_k a_i} x_{n_k a_i} + f_{a_i n_k} x_{a_i n_k}) + \\ & + \sum_{a_i \in A} \sum_{n_k \in \{n_2, n_3\}} \sum_{a_j \in A, a_j \neq a_i} (f_{a_i n_k} + f_{n_k a_j}) \min(x_{a_i n_k a_j}, \min(\frac{d_{a_i a_j}}{2}, x_{a_i n_k a_j} + \\ & + \max(0, \frac{d_{a_i a_j}}{2} - x_{a_i n_k^* a_j}))) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sum_{n_k \in \{n_2, n_3\}} x_{a_i n_k a_j} \leq d_{a_i a_j}, \forall a_i, a_j \in A, a_i \neq a_j, \\ x_{a_i n_k} \leq d_{a_i n_k}, \forall a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}, \\ x_{n_k a_j} \leq d_{n_k a_j}, \forall a_j \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}, \\ \sum_{a_j \in A, a_j \neq a_i} x_{a_i n_k a_j} + x_{a_i n_k} \leq c_{a_i n_k}, \forall a_i \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}, \\ \sum_{a_i \in A, a_i \neq a_j} x_{a_i n_k a_j} + x_{n_k a_j} \leq c_{n_k a_j}, \forall a_j \in A, n_k \in \{n_2, n_3\}, \end{cases}$$

Решение задачи нелинейного программирования является равновесием в игре конкуренции $\langle S, F \rangle$ игроков $i = 2$ и $i = 3$ с максимизацией прибыли компании $i = 1$. Сделанные допущения являются искусственными для возможности рассмотрения игрового момента между игроками $i = 2$ и $i = 3$. Оптимальное решение изначальной задачи распределения рейсов является ситуацией равновесия во вспомогательной игре конкуренции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bellman R., “Dynamic Programming”, *Princeton University Press, Princeton, NJ*, (1957).

Quality Estimation of the Geopolitical Actor Development Strategy

Малафеев О.А., Рединских Н.Д.

malafeyeva@mail.ru, redinskikh@yandex.ru

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Университетский просп.35, Санкт-Петербург, Петергоф, 198504, Россия

Оценивание качества стратегии развития геополитического актора

В данной работе решается задача оценивания качества стратегии развития (социально - экономического, военно-политического и т.д.) геополитического актора (геополитического объединения, отдельного геополитического актора, крупной транснациональной компании, оказывающей влияние на геополитическую динамику), на предмет увеличения или уменьшения рыночной стоимости его активов (суммарной капиталоемкости геополитического актора для случая анализа стратегии экономического развития)[1–3]. Результатом использования той или иной стратегии [7–8] геополитического актора является оцениваемый процесс изменения рыночной стоимости его активов (суммарной капиталоемкости). Будем также считать, что значение суммарной капиталоемкости может либо убывать, либо возрастать на 1 единицу (например, 1 млрд. руб.). Предполагается, что процесс изменения суммарной стоимости активов является дискретным марковским случайным процессом, множество состояний которого $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ставится в однозначное соответствие с рядом целых неотрицательных чисел $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Для любого состояния процесса [6] ближайшими состояниями могут быть только те состояния, индексы которых отличаются от индекса выбранного состояния на единицу. Ближайшим состоянием для граничных состояний x_0 и x_n будут

x_1 и x_{n-1} . Для состояния x_k ближайшими состояниями будут состояния x_{k-1} и x_{k+1} , где $k \neq 0, k \neq n$.

Случайный процесс возрастания или убывания рыночной стоимости активов представляется скачкообразно изменяющейся случайной функцией $X(t)$. В различные моменты времени t значения случайной функции могут возрастать или убывать на 1 единицу (1 млрд.руб.), если значения случайной функции отличны от 0 и величины n . Если процесс находится в начальном состоянии $X(t) = 0$, то рыночная стоимость активов может возрастать на 1 единицу. Если процесс находится в конечном состоянии $X(t) = n$, то рыночная стоимость активов может лишь убывать на 1 единицу.

Рассматриваются также идеализированные процессы возрастания или убывания рыночной стоимости активов, для которых не накладываются ограничения на число состояний процесса $n, n \rightarrow \infty$. При изучении процессов возрастания и убывания рыночной стоимости активов геополитического актора ставится задача отыскания характеристик случайной функции $X(t)$: 1)математического ожидания – $M[X(t)] = m_x(t)$; 2)дисперсии – $D[X(t)] = M[X(t^2) - m_x(t^2)] = D_x(t)$; 3)корреляционной функции – $k_x(t, t') = M[(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))]$; 4)первого смешанного начального момента – $\Gamma_x(t, t') = M[X(t)X'(t')]$. Вводится понятие интенсивности потока геополитических эпизодов, приводящей к возрастанию рыночной стоимости активов геополитического актора, которая обозначается λ_k . Также вводится понятие интенсивности потока геополитических эпизодов, приводящей к убыванию рыночной стоимости активов геополитического актора, и оно обозначается μ_k . Следует также отметить, что интенсивности возрастания и убывания рыночной стоимости активов являются, в общем случае, неотрицательными функциями времени [4–5]. Исследуются характеристики идеализированных случайных процессов возрастания и убывания рыночной стоимости активов геополитического актора без ограничений на число состояний процесса для случая, когда интенсивности потоков увеличения и уменьшения рыночной стоимости активов являются постоянными величинами. Также определяется процесс чистого возрастания (процесс чистого развития геополитического актора) рыночной стоимости активов геополитического актора, либо чистого убывания рыночной стоимости активов (процесс деградации геополитического актора) геополитического актора. Процесс чистого возрастания рыночной стоимости – это процесс, для которого функция $X(t)$ является неубывающей функцией времени. Для такого процесса интенсивности, способствующие убыванию рыночной стоимости активов, равны нулю $\mu_k = 0, k = \overline{1, n}$. Процесс чистого возрастания рыночной стоимости имеет место тогда, когда начальное состояние

этого процесса отлично от $n(X(0) < x_n = n)$. Процесс чистого убывания рыночной стоимости активов – это процесс, для которого случайная функция $X(t)$ является невозрастающей функцией времени. Для этого процесса интенсивности, способствующие увеличению рыночной стоимости активов, равны нулю $\lambda_k = 0, k = \overline{1, n}$. Начальное состояние такого процесса должно отличаться от $0(X(0) > x_0 = 0)$. Следует отметить, что все вероятностные характеристики процессов возрастания и убывания рыночной стоимости активов геополитического актора, зависят от следующих параметров: 1) количества состояний процесса возрастания и убывания рыночной стоимости активов $n + 1$; 2) интенсивностей возрастания рыночной стоимости активов $\lambda_k, k = \overline{0, n - 1}$; 3) интенсивностей убывания рыночной стоимости активов $\mu_k, k = \overline{1, n}$. Также в работе рассматривается процесс убывания и возрастания рыночной стоимости активов без ограничений на число состояний процесса и для случая, когда $\lambda_k = \lambda, \mu_k = \mu$. Исследуются характеристики процессов возрастания и убывания рыночной стоимости активов геополитического актора с конечным числом состояний. Для такого случая, наибольшее возможное значение случайной функции $X(t)$ не может превысить некоторое число $n > 0$.

В качестве примера [9], численно иллюстрирующего вышеописанную модель, рассмотрим процесс изменения рыночной стоимости активов (акций) транснациональной компании «A». Процесс изменения рыночной стоимости акций – это марковский случайный процесс с непрерывным временем и дискретным числом состояний. Интенсивность возрастания рыночной стоимости активов компании «A» λ равна 0,0097, интенсивность убывания рыночной стоимости активов компании «A» μ равна 0,01. Вычислим характеристики случайной функции $X(t)$. Формула для расчета значений корреляционной функции $k_x(t, t')$ случайной функции $X(t)$ имеет вид: $k_x(t, t') = n \left[\frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} \right] \frac{\mu}{\mu+\lambda} \left[e^{-(\mu+\lambda)(t'-t)} - e^{-(\mu+\lambda)t'} \right]$. Вычислим значение корреляционной функции компании «A» за период времени [1,13] недель, число состояний n процесса $X(t)$ равно 68. $k_x(1, 13) = 68 \times \left[\frac{0,0097}{0,01+0,0097} + \frac{0,01}{0,01+0,0097} e^{-0,0197} \right] \frac{0,01}{0,01+0,0097} \left[e^{-0,2364} - e^{-0,2561} \right] = 3.77$. Формула для расчета значений дисперсии $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$ имеет вид:

$$D_x(t) = n \left[\frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} \right] \frac{\mu}{\mu+\lambda} \left[1 - e^{-(\mu+\lambda)t} \right].$$

Вычислим значение

дисперсии при $t = 12$ недель:

$$D_x(12) = 68 \left[\frac{0,0097}{0,01 + 0,0097} + \frac{0,01}{0,01 + 0,0097} e^{-0,2364} \right] \frac{0,01}{0,01 + 0,0097} \cdot [1 - e^{-0,2364}] = 3,47.$$

Формула для расчета значений математического ожидания $m_x(t) = n \left[\frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} \right]$. Вычислим значение математического ожидания при $t = 12$ недель: $m_x(12) = 68 \left[\frac{0,0097}{0,01+0,0097} + \frac{0,01}{0,01+0,0097} e^{-0,2364} \right] = 60,2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А., *Теория случайных процессов и ее инженерные приложения*, Высш.шк., (2000).
- [2] Барлоу Р., Прошан Ф., *Статистическая теория надежности и испытания на безотказность*, Наука, (1984).
- [3] Карлин С., *Основы теории случайных процессов*, Мир, (1971).
- [4] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М., *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*, Наука, (1990).
- [5] Тамасян Г.Ш., Чумаков А.А., “Поиск минимального расстояния между эллипсоидом и линейным многообразием”, В сборнике: Устойчивость и процессы управления Материалы III международной конференции, 335-336 (2015).
- [6] Буре В.М., Карелин В.В., Полякова Л.Н., “Вероятностная модель обслуживания терминалов”, Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, №. 3, 32-38 (2016).
- [7] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В., *Теория игр*, БХВ-Петербург, (2012).
- [8] Колокольцов В.Н., Малафеев О.А., *Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации. Теория игр для всех*, Лань, (2012).
- [9] Yahoo finance. [Электронный ресурс]. 2017. URL: <https://finance.yahoo.com>.

On a Problem of Group Pursuit with Phase Constraints and Fractional Derivatives

Петров Н.Н.

kma3@list.ru

Удмуртский университет, ул. Университетская, 1, Ижевск, 426034, Россия

Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями и дробными производными

Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов [1-4], причем, кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работах [5-7] рассматривались задачи преследования двух лиц, описываемые уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В данной работе рассматривается задача о преследовании группой преследователей одного убегающего при условии, что убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества, а движение каждого участника описывается линейной системой с дробным производным и простой матрицей. Получены достаточные условия поимки.

Определение 1. Пусть $f : [0, \infty) \rightarrow R^1$ — абсолютно непрерывная функция, $\alpha \in (0, 1)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$(D^{(\alpha)}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \text{ где } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} ds.$$

В пространстве $R^k (k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n и убегающий E . Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V.$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$D^{(\alpha)}y = ay + v, \quad y(0) = y^0, \quad v \in V.$$

Здесь $x_i, y, u_i, v \in R^k$, V — выпуклый компакт, $a < 0$. Дополнительно предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы множества Ω с непустой внутренностью вида

$$\Omega = \{y \in R^k \mid (p_j, y) \leqslant \mu_j, j = 1, \dots, r\},$$

где p_1, \dots, p_r — единичные векторы R^k , μ_1, \dots, μ_r — вещественные числа.

Пусть $T > 0$ — произвольное число и σ — некоторое конечное разбиение отрезка $[0, T]$ такое, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < \tau_{s+1} = T$.

Определение 2. Кусочно-программной стратегией Q убегающего E , заданной на $[0, T]$, соответствующей разбиению σ , называется семейство отображений b^l , $l = 0, 1, \dots, s$, ставящих в соответствие величинам

$$(\tau_l, x_1(\tau_l), \dots, x_n(\tau_l), y(\tau_l)) \tag{1}$$

измеримую функцию $v_l(t)$, определенную для $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$, и такую, что $v_l(t) \in V$, $y(t) \in \Omega$, $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$.

Определение 3. Кусочно-программной контратратегией U_i преследователя P_i , соответствующей разбиению σ , называется семейство отображений c^l , $l = 0, 1, \dots, s$, ставящих в соответствие величинам (1) и управлению $v_l(t)$ измеримую функцию $u_l^i(t)$, определенную для $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ и такую, что $u_l^i(t) \in V$, $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$.

Определение 4. В игре происходит поимка, если существуют $T_0 > 0$, кусочно-программные контратратегии U_1, \dots, U_n преследователей P_1, \dots, P_n , что для любой кусочно-программной стратегии Q убегающего E найдутся номер l и момент $T \in [0, T_0]$, что $x_l(T) = y(T)$. Обозначим $\text{Int}A, \text{co}A$ — соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества A ,

$$\begin{aligned} z_i^0 &= x_i^0 - y^0, \quad I(l) = \{1, \dots, n+l\}, \quad \lambda_i(v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid \lambda z_i^0 \in V - v\}, \\ \lambda_{n+j}(v) &= (p_j, v), \quad \delta_r = \min_{v \in V} \max_{l \in I(r)} \lambda_l(v), \\ V_1 &= \{v \in V \mid \max_{i \in I(0)} \lambda_i(v) = 0, \quad O_\beta(b) = \{z \in R^k, \mid \|z - b\| \leq \beta\}\}, \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $\Omega = R^k$, $\delta_0 > 0$. Тогда в дифференциальной игре происходит поимка.

Следствие 1. Пусть $\Omega = R^k$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и

$$0 \in \text{Intco}\{z_1^0, \dots, z_n^0\}.$$

Тогда в дифференциальной игре происходит поимка.

Теорема 2. Пусть $r = 1, \delta_1 > 0$. Тогда в дифференциальной игре происходит поимка.

Следствие 2. Пусть $r = 1$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и

$$0 \in \text{Intco}\{z_1^0, \dots, z_n^0, p_1\}.$$

Тогда в дифференциальной игре происходит поимка.

Теорема 3. Пусть $n \geq k$, $V = O_1(0)$ и

$$0 \in \text{Intco}\{z_1^0, \dots, z_n^0, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в дифференциальной игре происходит поимка.

Теорема 4. Пусть $\delta_r > 0$, $\min_{v \in \text{co}V_1} \max_j (p_j, v) > 0$. Тогда в дифференциальной игре происходит поимка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-01-00346 и Минобрнауки в рамках базовой части (проект 2003).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Chikrii A.A. Conflict-controlled processes, *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*, (1997).
- [2] Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами, *М.: Изд-во МГУ*, (1990).
- [3] Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов, *Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та*, (2009).
- [4] Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования, *Л.: Изд-во ЛГУ*, (1977).
- [5] Эйдельман С.Д., Чикрий А.А. Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка, *Украинский математический журнал*, 52. No. 11, 1566-1583 (2000).
- [6] Чикрий А.А., Мачихин И.И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 15. No. 3, 262-278 (2009).
- [7] Чикрий А.А., Мачихин И.И. О линейных конфликтно-управляемых процессах с дробными производными, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 17. No. 2, 256-270 (2011).

Impulse Differential Game with Fixed Time and One-dimensional Aim

Ухоботов В.И., Измельцев И.В.

ukh@csu.ru, j748e8@gmail.com

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных 129,
Челябинск, 454001, Россия

Импульсная дифференциальная игра с фиксированным временем и одномерной целью

Динамические системы с импульсным управлением возникают, например, при синтезе управлений механическими системами переменного состава, движение которых описывается уравнением Мещерского [1]. Если на систему наряду с силами, являющимися известными линейными функциями фазовых переменных, действует помеха, то приходим к задаче импульсного управления линейной динамической системой при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи. При построении управления в таких задачах можно применять принцип оптимального гарантированного результата [2], в основе которого лежит теория дифференциальных игр.

В [1] уравнение движения системы при наличии импульсного управления $u \in \mathbb{R}^l$ первого игрока и управления $v \in \mathbb{R}^s$ второго игрока записано

в дифференциальной форме

$$dx = A(t)xdt + B(t)du + C(t)vdt, \quad t \leq p, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь $A(t), B(t), C(t)$ — непрерывная при $t \leq p$ матрицы соответствующих размерностей, p — заданный момент времени.

Допустимой стратегией второго игрока является произвольная функция $v : [t_0, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow V$, где $V \subset \mathbb{R}^s$ — связный компакт; t_0 — начальный момент времени. *Допустимая стратегия первого игрока* ищется в виде $u = \varphi(t)w(t, x)$, где $w : [t_0, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ — произвольная функция, $U \subset \mathbb{R}^l$ — выпуклый симметричный компакт. При построении функции $\varphi : [t_0, p] \rightarrow \mathbb{R}_+$ в отдельные моменты времени $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_q = p$ осуществляется ее коррекция. Задано число $\mu(t_0) \geq 0$, которое определяет количество ресурсов, которое можно израсходовать при построении функции $\varphi(t)$. В момент времени τ_i , первый игрок, зная реализовавшееся состояние $x(\tau_i)$ и оставшийся запас ресурсов $\mu(\tau_i) \geq 0$, выбирает следующий момент коррекции $\tau_i < \tau_{i+1} \leq p$, неубывающую абсолютнонепрерывную функцию $\varphi_i : [\tau_i, \tau_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ и число $\Delta_i \geq 0$ такие, что

$$\mu(t) = \mu(\tau_i) - \Delta_i - \int_{\tau_i}^t \dot{\varphi}_i(r)dr \geq 0, \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}.$$

Возьмем разбиение $\omega : \tau_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(k+1)} = \tau_{i+1}$ и построим ломаную

$$\begin{aligned} x_\omega(t^{(0)}) &= x(\tau_i) + \Delta_i B(\tau_i) w(\tau_i, x(\tau_i)), \\ \dot{x}_\omega(t) &= A(t)x_\omega(t) + \dot{\varphi}_i(t)B(t)w(t^{(j)}, x_\omega(t^{(j)})) + C(t)v(t^{(j)}, x_\omega(t^{(j)})), \quad (2) \\ t^{(j)} &\leq t \leq t^{(j+1)}. \end{aligned}$$

Семейство ломаных $x_\omega(t)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ удовлетворяют условиям теоремы Арцела [3, С. 104]. Под движением системы (1) при выбранных допустимых стратегиях игроков понимается любой равномерный предел последовательности ломаных (2), у которых диаметр разбиения стремится к нулю.

Зафиксируем вектор $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$, числа $\varepsilon \geq 0$, $C \in \mathbb{R}$ и рассмотрим задачу, в которой первый игрок стремится осуществить неравенство

$$|\langle \psi_0, x(p) \rangle - C| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^n . Цель второго игрока противоположна.

Обозначим через $\psi(t)$ решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t), \quad \psi(p) = \psi_0; \quad t \leq p.$$

Здесь $A^*(t)$ — транспонированная матрица.

Положим

$$b_+(t) = \max_{v \in V} \langle \psi(t), C(t)v \rangle, \quad b_-(t) = \min_{v \in V} \langle \psi(t), C(t)v \rangle;$$

$$b(t) = \frac{1}{2}(b_+(t) - b_-(t)) \geq 0, \quad m(t) = \max_{t \leq r \leq p} \max_{w \in U} \langle \psi(t), B(t)w \rangle \geq 0;$$

$$t(\varepsilon) = \inf \left\{ t \leq p : \int_t^p b(r) dr \leq \varepsilon \right\},$$

$$G(t, \mu) = \mu m(t) + \varepsilon - \int_t^p b(r) dr \text{ при } t(\varepsilon) \leq t \leq p,$$

$$G(t, \mu) = m(t) \left(\mu - \int_t^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{m(r)} dr \right) \text{ при } t \leq t(\varepsilon).$$

Теорема. Пусть начальное состояние $t_0 < p$, $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t_0) \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$|z(t_0)| \leq G(t_0, \mu(t_0)), \quad (4)$$

где

$$z(t_0) = \langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^p (b_+(r) + b_-(r)) dr - C.$$

Тогда существует стратегия первого игрока такая, что для любой стратегии второго игрока и для любого реализованного движения $x(t)$ будет выполнено неравенство (3). Если неравенство (4) не выполнено, то существует стратегия второго игрока такая, что для любой стратегии первого игрока и для любого реализованного движения $x(t)$ неравенство (3) не выполнено.

При доказательстве теоремы соответствующие стратегии игроков построены в явном виде и допускают численную реализацию.

Аналогичные результаты имеют место и в случаях, когда на выбор управления второго игрока накладываются интегральные, смешанные и импульсные ограничения.

Для случая, когда первый игрок стремится осуществить неравенство

$$0 < \delta \leq |\langle \psi_0, x(p) \rangle - C| \leq \varepsilon, \quad (5)$$

также найдены условия, гарантирующие возможность первого игрока осуществить неравенство (5) из заданного начального состояния. Эти условия имеют вид [4]

$$\hat{g}(t_0, \mu(t_0)) \leq |z(t_0)| \leq \hat{G}(t_0, \mu(t_0)), \quad \mu(t_0) \geq M(t_0).$$

Функции \hat{g} , \hat{G} , M и соответствующие стратегии игроков построены в явном виде.

Приведены примеры, которые иллюстрируют теоретический материал.

Работа выполнена при поддержке гранта Фонда перспективных научных исследований ФГБОУ ВО "Челябинский государственный университет" (2017 г.).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Красовский Н.Н., *Теория управления движением*, М.:Наука, (1968).
- [2] Красовский Н.Н., Субботин А.И., *Позиционные дифференциальные игры*, М.:Наука, (1974).
- [3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*, М.:Наука, (1972).
- [4] Ухоботов В.И., Измельцев И.В. "Однотипная задача импульсной встречи в заданный момент времени с терминальным множеством в форме кольца", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 25, вып. 2, 197–211 (2015).

Section 7

Nonlinear Chebyshev Approximations and Nonsmooth Optimization

Finite Dimensional Chebyshev Subspaces of Classical Banach Spaces II

Kamal A.

akamal@squ.edu.om

Department of Mathematics, Sultan Qaboos University, Al Khoud 123, Muscat,
Oman

The set A of the normed linear space X is said to be proximinal in X if for each $x \in X$ there is $y_0 \in A$ such that the distance $d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\} = \|x - y_0\|$. In this case, y_0 is called a best approximation for x from A . The set A is called a Chebyshev subset of X if for each $x \in X$, the best approximation for x from A is unique.

Finite dimensional Chebyshev subspaces of Banach spaces were the center of attentions of the mathematicians for a long time. In 1956 Mairhuber [6] proved that for any compact Hausdorff space Q , and for any $n \geq 2$, the Banach space $C(Q)$ admits an n dimensional Chebyshev subspaces if and only if Q is homeomorphic to a subset of a circle. In 1962, Ahiezer [1] showed that $L^1[0, 1]$ has no finite dimensional Chebyshev subspaces. His proof is not direct and difficult to conclude. It is easy to show that every finite dimensional subspace of a strictly convex space is a Chebyshev subspace.

In this talk the author studies the existence of the n dimensional Chebyshev subspaces in some classical Banach spaces like $L^\infty[0, 1]$, l^∞ , $L^1[0, 1]$ and l^1 .

It is shown that if $X = L^\infty[0, 1]$, l^∞ , or $L^1[0, 1]$ then for $n \geq 2$, X has no n dimensional Chebyshev subspaces. The method of the proof is direct and easy. For $X = l^1$, the story is different.

In the case when $X = L^\infty[0, 1]$ or $X = l^\infty$, the author uses the fact that X is an abstract M Banach Lattice with a strong order unit to show that X is isometric to $C(Q)$ for some compact Hausdorff space Q , and uses Mairhuber Theorem and the fact that X is not separable to obtain the result. In the case when $X = L^1[0, 1]$ the author uses some version of Hobby Rice Theorem to obtain the result. It is not difficult to show that for any $n \geq 1$, the Banach space $X = l^1$ have a finite dimensional Chebyshev subspace of dimension n . The author has the following conjecture:

Theorem. *For each i , define e_i in l^1 by $e_i = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ with $x_i = 1$ and $x_j = 0$ if $i \neq j$. Let N be an n dimensional subspace of then N*

is Chebyshev subspace iff there are i_1, i_2, \dots, i_n such that N is generated by $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\}$.

References

- [1] N.I Ahiezer, M.G Krein, Some Questions in the Theory of Moments, Transl. Math. Monographs, 2, Amer. Math. Soc, Providence, R.I (1962).
- [2] C. R. Hobby and J. R. Rice, A moment problem in L^1 approximation, Proceedings of the American Mathematical Society. American Mathematical Society. 16, No 4, 665?670 (1965).
- [3] A Kamal, Finite Dimensional Chebyshev subspaces of spaces of discontinuous functions, Jaen J. Approx. 7, No 1, 1-8 (2015).
- [4] Finite Dimensional Chebyshev Subspaces of $L^1[0, 1]$, International Journal of Functional Analysis, Operator Theory and Applications, To appear
- [5] Finite Dimensional Chebyshev Subspaces of , S.Q.U. Journal for Science, 22, No 1, 2017, to appear.
- [6] J. C. Mairhuber, On Haar's theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solution, Proc. Amer. Math. Soc. 7 609-615 (1956)
- [7] Z. Semadeni, "Banach spaces of continuous functions I PWN, Warsaw (1971).
- [8] H. Schaefer, "Banach Lattices and Positive operators Springer-Verlage, Berlin Heidelberg New York, (1974).

Convergence Analysis of Two-dimensional Wavelet for Nonlinear Partial Integro-Differential Equation

Patel V., Singh V.

vijaybhuiit@gmail.com, vksingh.mat@iitbhu.ac.in

Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Technology (Banaras Hindu University), Varanasi-221005, India

In this work, a numerical solution for nonlinear partial integro-differential equation (NPIDE) will be discussed. For the solution of NPIDE, we developed a numerical technique based on two-dimensional wavelet approximation using operational matrices which is proposed for NPIDE. By implementing the wavelets operation matrices on NPIDE, NPIDE converted into system of algebraic equation and then find the solution of this algebraic equation via collocation method. Convergence analysis and error analysis are also discussed. Illustrative examples have been shown that the validity and applicability of the technique.

References

- [1] E. B. Postnikov, A. A. Loskutov, Analysis of small-scale wave structures in the Saturnian A ring based on data from the Cassini interplanetary spacecraft. J. Exp. Theor. Phys. 101 (2005): 646-652.

- [2] E. B. Postnikov, A. A. Loskutov, Wavelete analysis of fine-scale structures in the Saturnian B and C rings using data from the Cassini spacecraft. *J. Exp. Theor. Phys.* 107 (2007): 417-422.
- [3] E. B. Postnikov, V. K. Singh, Local spectral analysis of images via the wavelet transform based on partial differential equations. *Multidim. Syst. Sign. Process.* 25 (2014): 145-155.
- [4] S. A. Yousefi, M. Behroozifar, M. Dehghan, The operational matrices of Bernstein polynomials for solving the parabolic equation subject to specification of the mass *J. Comp. Appl. Math.* 235 (2011): 5272-5283.
- [5] S. Singh, V. K. Patel, V. K. Singh, Operational matrix approach for the solving of partial integro-differential equation, *Appl. Math. Comp.*, 283 (2016), 195-207.
- [6] V.K. Singh, E.B. Postnikov, Operational Matrix Approach for Solution of Integro-Differential Equation Arising in Theory of Anomalous Relaxation Processes in Vicinity of Singular Point, *Appl. Math. Model.* 37(2013) 6609-6616.

Numerical Method Based on Chebyshev polynomial for Solving Non-linear Fractional Variational Problems

Singh H., Pandey R.K.

harendrarsingh@niser.ac.in, rkpandey.mat@iitbhu.ac.in

School of Mathematical Sciences, National Institute of Science Education and Research (NISER), Khurda-752050, Odisha, India; Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi 221005, India

This paper presents a numerical method based on Chebyshev polynomial for solving a class of non- linear fractional variational problems (NLFVPs). The proposed approach converts the NLFVPs into a system of non-linear algebraic equations, and after solving these equations, the approximate solution is obtained. Convergence analysis of the proposed method is also provided. Numerical simulations are performed on the illustrative examples to test the accuracy and applicability of the proposed method. Further, the obtained results presented in form of tables and figures. Results are also compared with some other polynomials.

Application of Chebyshev Wavelet Approximation for Nonlinear Partial Differential Equation Arising From Viscoelasticity

Singh S., Singh V.

rathaurbhu.90@gmail.com, vksingh.mat@iitbhu.ac.in

Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Technology(Banaras Hindu University),Varanasi,221005,India

In this work, we investigated the convergence rate of wavelet collocation method for viscoelasticity problem based on non-liner partial integro-differential equation(PIDE) with non-smooth kernel along with the given initial and boundary conditions. This problem can be found in the mathematical modeling of physical phenomena involving viscoelastic forces. We introduced a matrix formulated algorithm by using Chebyshev wavelet approximation for the proposed PIDE. Some numerical results are presented to simplify applications of operational matrix formulation and reduce the computational cost. Convergence analysis,numerical stability and rate of convergence(C-order) of the proposed method are also investigated by considering a test function. Numerical results confirm the predicted convergence rates and also exhibit optimal accuracy in the L^2 and L^∞ norms. Finally,we compare the proposed Chebyshev wavelet collocation method(CWCM) with well known Crank-Nicolson and Crandall's methods.

References

- [1] V. K. Singh, E. B. Postnikov "Operational matrix approach for solution of integro-differential equations arising in theory of anomalous relaxation processes in vicinity of singular point", *Applied Mathematical Modeling*, 37, 6609–6616 (2013).
- [2] J. C. Lopez-Marcos, "A difference scheme for a nonlinear partial integro-differential equation *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 31, 113-126 (1968).

Application of Wavelets for Complex Partial Differential Equations using Collocation Method

Singh V.

vksingh.mat@iitbhu.ac.in

Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Technology(Banaras Hindu University),Varanasi,221005,India

In this work, I developed an algorithm to obtain approximate numerical solution of complex partial differential equation (CPDE) with a numerical wavelet collocation method (NWCM) using a technique based on two-dimensional Chebyshev wavelet (TDCW) approximation and its operational

matrices. For the solution of CPDE, firstly, I reduced CPDE into system of PDE with real and imaginary variable and then after transformation we split system of PDE into coupled PDE of real and imaginary variable respectively. Finally, I converted the coupled PDE into partial integro-differential equation (PIDE). I used TDCW approximation and its operational matrices to convert both PIDE into system of algebraic equations which is associated with CPDE by using collocation method based on Chebyshev wavelet. Convergence, error analysis and some illustrated examples has been discussed for the validity and applicability of the proposed technique.

References

- [1] E.B. Postnikov, V.K. Singh, Local spectral analysis of images via the wavelet transform based on partial differential equations”, *Multidim Syst Sign Process*, DOI 10.1007/s11045-012-0196-1 (2014).
- [2] V. K. Singh, E. B. Postnikov “Operational matrix approach for solution of integro-differential equations arising in theory of anomalous relaxation processes in vicinity of singular point”, *Applied Mathematical Modeling*, 37, 6609–6616 (2013).

Spline-Approximation in the Task Status Estimation of Nonlinear Dynamic Systems

Бутырский Е.Ю., Васильев В.В., Понкратова К.И.

evgenira88@mail.ru, vasiliev.valeron2016@yandex.ru,
jessy_magg@mail.ru

СПбГУ, г. Петергоф, Университетский проспект, 35, Санкт-Петербург,
198504, Россия; ВМПИ, ВУНЦ, ВМА, г. Петергоф, ул. Разводная, 15,
Санкт-Петербург, 198514, Россия

In the article the estimation problem of the state of nonlinear dynamic system, based on a spline approximation of functions, is examined. Are given examples of application in the tasks of filtration and detecting the signals.

Сплайн-аппроксимация в задаче оценивания состояния нелинейных динамических систем

Существует множество методов решения задачи оценивания нелинейных динамических систем. Каждый из этих методов имеет свои достоинства и недостатки. Большинство из них основываются на разложении в функциональный ряд Тейлора. Такая аппроксимация носит локальный характер и поэтому при больших отклонениях от номинальной траектории ошибки могут оказаться неприемлемыми. В настоящей статье рассматривается подход, основанный на применении сплайнов, что позво-

ляет проводить глобальную аппроксимацию нелинейных функций. Сущность предлагаемого подхода проиллюстрируем на следующем примере.

Предположим, что задана стохастическая динамическая система (ДС) уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + n_1(t) \\ z = x + n_0(t), \end{cases} \quad (1)$$

$\langle n_0(t) \rangle = 0, \langle n_1(t) \rangle = 0, \langle n_1(t)n_1^T(t-\tau) \rangle = N_1\delta(\tau),$
 $\langle n_0(t)n_0^T(t-\tau) \rangle = N_0\delta(\tau)$ – корреляционные функции формирующего и наблюдаемого шумов;

$f(x)$ – известная функция своих аргументов; N_0, N_1 – спектральные плотности шума наблюдения и формирования.

Таким образом 1-ое уравнение описывает динамику состояния, а 2-ое является уравнением наблюдения процесса. Рассмотрим случай, когда (1) является скалярной системой.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + n_1(t), \\ z = x + n_0(t). \end{cases} \quad (2)$$

Аппроксимируем функцию $f(\cdot)$, входящую в уравнение состояния, на полуинтервалах $[x_i, x_{i+1})$ кусочно-линейной функцией, определяющей сплайн первой степени S_1 класса C [1]:

Зададим линейный интерполяционный сплайн между узлами сетки:

$$S_1(x) = (1-u)f_i + uf_{i+1}, \quad u = \frac{(x-x_i)}{\Delta_i}, \quad \Delta_i = x_{i+1} - x_i.$$

Асимптотически наилучшее равномерное приближение сплайном первой степени $S_1(x)$ функции $f(x)$ определяется выражением:

$$S_1 = (1-u) \left[f_i - \frac{1}{16} \max(\Delta_{i-1}^2, \Delta_i^2) f_i \right] + u \left[f_{i+1} - \frac{1}{16} \max(\Delta_i^2, \Delta_{i+1}^2) f_{i+1} \right],$$

$x_i \leq x < x_{i+1}, \quad \Delta_{-1} = \Delta_N = 0, \quad n$ – число интервалов аппроксимации.

Введём функцию прямоугольного окна $h(\cdot)$, которую определим следующим образом

$$h(x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Тогда можно записать: $S_1 = \sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1})(a_i x + b_i)$.

С учетом последнего, стохастическое ДС (1), у которого коэффициент сноса $f(x)$ аппроксимирован кусочно-линейными функциями, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1})(a_i x + b_i) + n_1(t). \quad (3)$$

Уравнение (3) определяет марковский процесс, статистические характеристики которого полностью определяются двумя одномерными распределениями: начальной и переходной плотностями вероятности. Аналитическое выражение для них можно найти, решая соответствующее уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова [2]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1})(a_i x + b_i)p \right].$$

При начальных условиях $p = \delta(x - x_1)$ решением уравнения будет:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R(t)}} \exp \left\{ \frac{[x - m_x(t)]^2}{2R(t)} \right\}, \quad x_0 = 0, \quad m_x(0) = 0, \\ m_x(t) &= x_0 \exp \left[t \sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1}) a_i \right], \\ R(t) &= 0.25 N_0 \sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1}) + a_i \left\{ 1 - \exp \left[2t \sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1}) a_i \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно записать уравнение оценки состояния динамической системы (2):

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = \sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1})(a_i \hat{x} + b_i) + \frac{R}{N_0}(u - \hat{x}), \\ \frac{dR}{dt} = \frac{N_1}{2} - 2 \sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1}) a_i R - \frac{R^2}{N_0}. \end{cases} \quad (4)$$

Учитывая, что на уровне математических моделей система и сигнал неразличимы, уравнения (4) могут быть использованы и при решении задач фильтрации и обнаружения [2].

Имитационное моделирование уравнения показывает, что плотность вероятности $p(x, t)$ процесса $x(t)$ можно представить в виде сочленения отрезков гауссовых плотностей вероятности (каждый из которых соответствует полуинтервалу $[x_i, x_{i+1}]$). При этом могут возникать разрывы 1-го рода. Для того, чтобы этого не было, в дополнение к обычному

условию нормировки плотности вероятности перехода вводится условие ее непрерывности на границе. Можно также ввести сглаживающее окно.

В случае, когда $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ можно записать:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_1}{dt} = A_1\hat{x}_1 + B_1 + K_1z_1 \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} = A_2\hat{x}_2 + B_2 + K_2z_2 \\ \vdots \\ \frac{d\hat{x}_m}{dt} = A_m\hat{x}_m + B_m + K_mz_m, \end{cases} \quad \begin{aligned} A_i &= \sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1})a_i - K_i, \\ B_i &= \sum_{i=1}^n h(x_i, x_{i+1})b. \end{aligned}$$

С учетом последнего, уравнение оценивания для (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + B + Kz, & K = RN_0^{-1}, \\ \frac{dR}{dt} = N_1 - AR + RA - RN_0^{-1}R, \end{cases} \quad (5)$$

A – диагональные матрицы ($m \times m$) ; B, z – вектор-столбцы ($m \times 1$); K – матричный коэффициент усиления ($m \times m$); R – корреляционная матрица ошибок фильтрации ($m \times m$).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бурова И.Г., Демьянович Ю.К. *Теория минимальных сплайнов*. СПбГУ, (2001).
- [2] Казаков В.А. *Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи*. М., Сов. радио, (1973).

Stability of Best Approximation of Convex Body by a Ball of Fixed Radius

Дудов С.И., Осипцев М.А.

DudovSI@info.sgu.ru, Osipcevm@gmail.com

Саратовский национальный исследовательский государственный университет,
Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

Об устойчивости решения некоторых задач по шаровым оценкам выпуклых тел

1. Пусть D заданное выпуклое тело из \mathbb{R}^p , а $n(x)$ – некоторая норма на \mathbb{R}^p . На предмет устойчивости решения рассматривается задача

$$\varphi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (1)$$

Здесь $Bn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ – шар с радиусом r и центром в точке x , $h(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} n(a - b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} n(a - b)\}$ – расстояние Хаусдорфа, индуцированное нормой $n(\cdot)$.

Задача (1) является канонической для некоторого класса задач по шаровым оценкам выпуклых тел [3]. А именно, своими решениями она способна выражать решения той или иной задачи из этого класса в зависимости от значения параметра $r \geq 0$. Например, задачи о вписанном и описанном шарах, минимальной шаровой оболочке границы тела D , задачи об асферичности и др. ([1]-[3]).

Пусть D_ε некоторое выпуклое тело, такое что

$$h(D, D_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Наряду с «точной» задачей (1) далее рассматриваем и «приближенную» задачу

$$\varphi_\varepsilon(x, r) \equiv h(D_\varepsilon, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (2)$$

Для решений «точной» и «приближенной» задач введем обозначения

$$f(r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x, r), \quad C(r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, r) = f(r)\},$$

$$f_\varepsilon(r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi_\varepsilon(x, r), \quad C_\varepsilon(r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi_\varepsilon(y, r) = f_\varepsilon(r)\}.$$

Теорема 1. Для любых $r \geq 0, \varepsilon \geq 0$ выполняется

$$|f(r) - f_\varepsilon(r)| \leq \varepsilon.$$

Теорема 2. Для всякого $r \geq 0$ имеет место

$$\sup_{y \in C_\varepsilon(r)} \inf_{x \in C(r)} n(x - y) \rightarrow 0, \text{ при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Отметим, как показывают примеры, возможны случаи, когда $h(C(r), C_\varepsilon(r)) \not\rightarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

2. Будем полагать, что нам известны решения задач о внешней и внутренней оценке тела D шаром:

$$R(x, D) \equiv \max_{y \in D} n(x - y) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (3)$$

$$\rho(x, D) \equiv \min_{y \in \Omega} n(x - y) \rightarrow \max_{x \in D}, \quad (4)$$

где $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$ и далее $P(x, D) = \rho(x, D) - \rho(x, \Omega)$.

Введем для решений этих задач обозначения

$$R^* = \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x, D), \quad C_R = \{y \in \mathbb{R}^p : R(y, D) = R^*\},$$

$$\rho^* = \max_{x \in D} \rho(x, \Omega), \quad C_\rho = \{y \in \mathbb{R}^p : \rho(y, \Omega) = \rho^*\},$$

В случае единственности решения этих задач, $C_R = \{x_R\}$, $C_\rho = \{x_\rho\}$, обозначим через

$$r_R = \frac{R^* - P(x_R, D)}{2}, \quad r_P = \frac{R(x_\rho, D) + \rho^*}{2}.$$

Пусть далее константа $C_1 > 0$ такая, что $\|x\| \leq C_1 n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$.

Теорема 3. Пусть норма $n(\cdot)$ является λ_n -сильно квазивыпуклой (ее единичный шар является λ_n -сильно выпуклым [4]) Тогда решение задачи (1) является единственным, причём $C(r) = C_R = \{x_R\}$, при любом $r \in [0, r_R]$ и при всех достаточно малых $\varepsilon \geq 0$ выполняется

$$\sup_{x \in C_\varepsilon(r)} \|x - x_R\| \leq 2\sqrt{C_1 \lambda_n(R^* + 2\varepsilon)\varepsilon}.$$

Теорема 4. Пусть тело D является λ_D -сильно выпуклым множеством. Тогда решение задачи (1) является единственным, причём $C(r) = C_\rho = \{x_\rho\}$, при любом $r \geq r_P$ и при всех достаточно малых $\varepsilon \geq 0$ выполняется

$$\sup_{x \in C_\varepsilon} \|x - x_\rho\| \leq 2\sqrt{C_1 \lambda_D \varepsilon}.$$

Теорема 5. Пусть $C_R \cap C_\rho = \emptyset$, $n(\cdot)$ является λ_n -сильно квазивыпуклой нормой, D - λ_D -сильно выпуклым множеством. Тогда при любом $r \geq 0$ задача (1) имеет единственное решение: $C(r) = \{x(r)\}$ и для любого $\tau \in (0, (r_P - r_R)/2)$ при всех достаточно малых $\varepsilon \geq 0$ выполняется

$$\sup_{r \in [r_R + \tau, r_P - \tau]} \sup_{x \in C_\varepsilon(r)} \|x - x(r)\| \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{b(\tau)} \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{b(\tau)} \right)},$$

где

$$b(\tau) = \sqrt{\frac{\min \{R(x(r_R + \tau), D) - R^*, P(x(r_P - \tau), D) + \rho^*\}}{2C_1 \lambda}},$$

$$\lambda = \lambda_D + d\lambda_n, \quad d = \max_{x, y \in D} n(x - y).$$

Обозначим через C_R^ε и C_ρ^ε множества решений задач (3) и (4) (о внешней и внутренней оценках тела D_ε шаром).

Следствие 1. Если $n(\cdot)$ — λ_n -сильно кавазивыпуклая норма, то решение задачи (3) единствено: $C_R = \{x_R\}$ и для всех достаточно малых $\varepsilon \geq 0$ выполняется

$$\sup_{x \in C_R^\varepsilon} \|x - x_R\| \leq 2\sqrt{C_1 \lambda_n(R^* + 2\varepsilon)\varepsilon}.$$

2. Если D — λ_D -сильно выпуклое множество, то решение задачи (4) единствено: $C_\rho = \{x_\rho\}$ и для всех достаточно малых $\varepsilon \geq 0$ выполняется

$$\sup_{x \in C_\rho^\varepsilon} \|x - x_\rho\| \leq 2\sqrt{C_1 \lambda_D \varepsilon}.$$

Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ, проект №1.1520.2014К.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боннезен Т., Фенхель В. *Теория выпуклых тел*, М.: Фазис, (2002).
- [2] Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. *Недифференцируемая оптимизация*, М.: Наука, (1981)
- [3] Дудов С. И. «Систематизация задач по шаровым оценкам выпуклого компакта», *Математический сборник*, 206, № 9, С. 99-118 (2015).
- [4] Половинкин Е. С., Балашов М. В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, М.: Физматлит, (2004).
- [5] Дудов С.И., Осищев М.А.б «Об устойчивости решения задачи о равномерной оценке выпуклого тела шаром фиксированного радиуса», *ЖВМ и МФ*, 56, №4, 535-550, (2016).

Duality in Problems of Best Rational Approximation

Гхашим М.М., Малозёмов В.Н.

mohgh110@yahoo.com, v.malozemov@spbu.ru

Севастопольский государственный университет, Университетская улица, дом 33, Севастополь, 299053, Россия; Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский проспект, дом 28, Старый Петергоф, 198504, Россия

Двойственность в задачах наилучшего дробно-рационального приближения

Пусть m, n — натуральные числа и

$$H(X, t) = \frac{P(A, t)}{Q(B, t)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i u_i(t)}{\sum_{i=1}^m b_i v_i(t)}. \quad (1)$$

Здесь $X = (A, B) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$. Функции $u_i(t), v_i(t)$ определены на некотором множестве $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$. Введём на \mathcal{D} конечную сетку $\{t_j\}_{j \in N}$, состоящую не менее чем из $n+m$ точек, $|N| \geq n+m$, и рассмотрим дискретную задачу наилучшего равномерного приближения заданной функции $y(t)$ дробями вида (1):

$$\varphi(X) := \max_{j \in N} |H(X, t_j) - y(t_j)| \rightarrow \inf. \quad (2)$$

На коэффициенты X накладывается ограничение

$$\sigma_j Q(B, t_j) > 0 \quad \forall j \in N, \quad (3)$$

где $\sigma = \{\sigma_j\}_{j \in N}$ — фиксированный вектор, компоненты которого равны ± 1 . Вектор σ определяет знаки знаменателя $Q(B, t)$ дроби $H(X, t)$ в узлах сетки t_j . Простейший случай — когда все σ_j равны единице. Множество векторов X , удовлетворяющих ограничению (3) задачи (2), обозначим $\mathcal{U}(\sigma)$. В дальнейшем считаем, что $\mathcal{U}(\sigma) \neq \emptyset$.

Назовём *базисом* любое подмножество $J \subset N$, состоящее из $n+m$ индексов, и введём частные задачи наилучшего приближения

$$\varphi(X, J) := \max_{j \in J} |H(X, t_j) - y(t_j)| \rightarrow \inf \quad (4)$$

при согласованном ограничении

$$\sigma_j Q(B, t_j) > 0 \quad \forall j \in J. \quad (5)$$

Множество векторов X , удовлетворяющих ограничению (5) задачи (4), обозначим $\mathcal{U}(\sigma, J)$.

Теорема. Справедливо соотношение двойственности

$$\inf_{X \in \mathcal{U}(\sigma)} \varphi(X) = \max_{J \subset N} \inf_{X \in \mathcal{U}(\sigma, J)} \varphi(X, J). \quad (6)$$

Аналогичную теорему для задачи наилучшего полиномиального приближения доказал Л.Г. Шнирельман [1]. Он опирался на теорему Хелли о пересечении выпуклых множеств. Мы используем обобщение теоремы Хелли на случай пересечения выпуклых конусов [2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шнирельман Л. Г. *О равномерных приближениях* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. Т. 2. № 1. С. 53–59.
- [2] Гхашим М., Малозёмов В. Н. *Теорема Хелли для конусов и двойственность в наилучших дробно-рациональных приближениях* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1998. Вып. 4 (№ 22). С. 17–21.

Estimates of the Best Approximations of Periodic Functions
Жук В.В.

С.-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7-9,
 Санкт-Петербург, 199034, Россия

Об оценках наилучших приближений периодических функций

Идея, которая лежит в основе излагаемых результатов, очень проста и удивительно почему она не была реализована ещё в то время, когда начала развиваться теория аппроксимации. Она имеет многие приложения и, в частности, наряду с новыми результатами позволяет получать и хорошо известные старые, но которые устанавливались весьма нетривиально.

Пусть C – пространство 2π -периодических функций с равномерной нормой, $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве C , $\omega_r(f, h)$ – модуль непрерывности функции f порядка r в пространстве C .

Хорошо известно, что для любой $f \in C$ при $n \in \mathbb{Z}_+, \gamma > 0$ справедливо неравенство

$$E_n(f) \leq C(r, \gamma) \omega_r(f, \frac{\gamma\pi}{n+1}), \quad (1)$$

где постоянная $C(r, \gamma)$ зависит только от выписанных аргументов. Неравенства типа (1) играют важную роль в теории аппроксимации и их изучению (в различных направлениях) посвящено большое количество работ многих авторов. Утверждения аналогичные соотношению (1) принято называть прямыми теоремами теории аппроксимации или обобщенными неравенствами Джексона.

Известен ряд подходов к установлению неравенств такого типа (см. [1, с. 202 - 211; 2, с. 202 - 205; 3, с. 272 - 275; 4, с. 251 - 253; 5, с. 157 - 159; 7, с. 57; 8, с. 195 - 203; 9 - 13]). В настоящем докладе я хочу обратить внимание на очень простой и вместе с тем имеющий широкие приложения метод установления неравенств для наилучших приближений аналогичных обобщенной теореме Джексона. Ограничусь рассмотрением только простой ситуации, связанной с неравенством (1). Более подробно вопрос рассмотрен в статьях [14 - 16].

Пусть

$$S_{h,1}(f, x) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x+t) dt, \quad S_{h,2}(f, x) = S_{h,1}(S_{h,1}(f), x)$$

– функция Б. А. Стеклова первого и второго порядка соответственно.

Хорошо известно, что для любой $f \in C^{(2)}$

$$E_n(f) \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)^2} E_n(f'').$$

Для $f \in C$ имеем

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq E_n(f - S_{h,2}(f)) + E_n(S_{h,2}(f)) \leq \\ &\leq E_n(f - S_{h,2}(f)) + \frac{\pi^2}{8(n+1)^2} E_n(S''_{h,2}(f)), \\ E_n(S''_{h,2}(f)) &= \frac{E_n(\delta_h^2(f))}{h^2}, \end{aligned}$$

где

$$\delta_h^2(f, x) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$$

– конечная симметрическая разность второго порядка функции f .

Это рассуждение проводилось много раз.

Положим $h = \frac{\gamma\pi}{n+1}$. Ясно, что

$$E_n(\delta_h^2(f)) \leq 4E_n(f).$$

Следовательно

$$E_n(f) \leq E_n(f - S_{h,2}(f)) + \frac{\pi^2 4E_n(f)}{8(n+1)^2 h^2} = E_n(f - S_{h,2}(f)) + \frac{1}{2\gamma^2} E_n(f).$$

А теперь замечание. Подчеркнутый член переносится в левую часть (вместо того, чтобы его оценивать сверху)

$$E_n(f)\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \leq E_n(f - S_{h,2}(f)).$$

Таким образом, если $2\gamma^2 - 1 > 0$, то

$$E_n(f) \leq \frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 - 1} E_n(f - S_{h,2}(f)).$$

Эта известная оценка ранее получалась далеко не тривиальным образом.

В частности из нее следует, что

$$E_n(f) \leq \frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 - 1} E_n(f - S_{h,2}(f)) \leq \frac{\gamma^2}{2\gamma^2 - 1} \omega_2(f, h),$$

т.е. неравенство Джексона для модуля непрерывности второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дзядык В. К., *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, М., Наука (1977).
- [2] De Vore R. A., Lorentz G. G., *Constructive Approximation*, Berlin, New York, Springer (1993).
- [3] Тиман А. Ф., *Теория приближения функций действительного переменного*, М., Физматгиз (1960).
- [4] Ахиезер Н. И., *Лекции по теории аппроксимации*, М., Наука (1965).
- [5] Брудный Ю. А., “Об одной теореме локальных наилучших приближений” - В кн.: *Функциональный анализ и теория функций*, Сб. 2. Казань, 43-49, (1964).
- [6] Жук В. В., *Аппроксимация периодических функций*, Л., Изд. ЛГУ (1982).
- [7] Жук В. В., *Структурные свойства функций и точность аппроксимации*, Л., Изд. РИО ЛГУ (1984).
- [8] Жук В. В., Кузютин В. Ф., *Аппроксимация функций и численное интегрирование*, С.-Петербург, Изд. СПбГУ (1995).
- [9] Foucart S., Kryakin V., Shadrin A., “On the exact constant on the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric”, - Constr. Approx. 29, 157-179 (2009).
- [10] Виноградов О. Л., Жук В. В., “Оценки функционалов с известной последовательностью моментов через отклонения средних типа Стеклова”, Зап. научн. семинаров ПОМИ 383, 5-32 (2010).
- [11] Виноградов О. Л., Жук В. В., “Скорость убывания констант в неравенствах типа Джексона в зависимости от порядка модуля непрерывности”, Зап. научн. семинаров ПОМИ 383, 33-52 (2010).
- [12] Виноградов О. Л., Жук В. В., “Оценка функционалов с известным конечным набором моментов через отклонения операторов, построенных на основе средних Стеклова и конечных разностей”, Зап. научн. семинаров ПОМИ 352 , 32-66 (2011).
- [13] Виноградов О. Л., Жук В. В., “Оценка функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности и поведение констант в неравенствах типа Джексона”, Алгебра и анализ 24, №. 5, 32-66 (2012).
- [14] Жук В. В., “Неравенства для наилучших приближений типа обобщенной теоремы Джексона”, Зап. научн. семинаров ПОМИ 404, 135-156 (2012).

- [15] Жук В. В., “Оценки наилучших приближений периодической функции посредством линейных комбинаций значений самой функции и её первообразных”, Зап. научн. семинаров ПОМИ 404, 157-174, (2012).
- [16] Жук В. В., “О неравенствах типа Джексона для наилучших приближений периодических функций”, Проблемы мат. анализа 82, 89-98, (2015).

Some Exact Estimates for the Derivatives of Trigonometric Polynomials

Жук В.В., Тумка О.А.

С.-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7-9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

О некоторых точных оценках для производных тригонометрических полиномов

1. В дальнейшем \mathbb{R} , \mathbb{R}_+ , \mathbb{N} суть соответственно множества вещественных, неотрицательных, натуральных чисел; все функции предполагаются вещественными. Через H_n обозначаем множество тригонометрических полиномов порядка не выше n , C – пространство непрерывных 2π -периодических функций f с нормой $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Полагаем

$$\delta_t^2(f, x) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x),$$

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} (1 - \cos nt) \Psi(t) dt.$$

Через W обозначаем множество функционалов $\Phi : C \rightarrow \mathbb{R}_+$ таких, что $\Phi(f + g) \leq \Phi(f) + \Phi(g)$ для любых $f, g \in C$. Символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Полагаем

$$M(\Phi) = \sup_{f \in C} \frac{\Phi(f)}{\|f\|}, \quad m(\Phi) = \sup_{T \in H_n} \frac{\Phi(T)}{\|T''\|}.$$

2. **Теорема 1.** Пусть $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, функция $\Psi : [0, \frac{\pi}{n}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ суммируема на $[0, \frac{\pi}{n}]$, точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что $|T''(x_0)| = \|T''\|$. Тогда

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \delta_t^2(T, x_0) \Psi(t) dt \right| \geq \frac{2 \alpha_n}{n^2} \|T''\|.$$

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, функция $\Psi : [0, \frac{\pi}{n}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ суммируема на $[0, \frac{\pi}{n}]$, $\alpha_n > 0$. Тогда

$$\|T''\| \leq \frac{n^2}{2\alpha_n} \left\| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \delta_t^2(T, x) \Psi(t) dt \right\|.$$

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на утверждение (см. [1, с. 43-45; 2, с. 15-17]): если $T \in H_n$, $T(x_0) = \|T\|$, то при $|t| \leq \frac{\pi}{n}$ справедливо неравенство

$$T(x_0 + t) \geq \|T\| \cos nt.$$

В связи с теоремой 1 и следствием 1 уместно упомянуть работы [3; 4].

3. Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\Phi \in W$, $M(\Phi) = M < +\infty$, $m(\Phi) = m < +\infty$, функция $\Psi \in H_n$ удовлетворяет условиям: $\Psi(t) \geq 0$, $\Psi(-t) = \Psi(t)$ при $t \in \mathbb{R}$, $\int_{-\pi}^{\pi} \Psi = 1$, $\alpha_n > 0$. Положим

$$U(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \Psi(t) dt.$$

Тогда для $f \in C$

$$\Phi(f) \leq \left(M + \frac{2mn^2}{\alpha_n} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi(t) dt \right) \|f - U(f)\| + \frac{mn^2}{2\alpha_n} \left\| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \delta_t^2(f, x) \Psi(t) dt \right\|.$$

Доказательство. Для любой $f \in C$ будет $U(f) \in H_n$. Поэтому в силу следствия 1

$$\begin{aligned} \|U''(f)\| &\leq \frac{n^2}{2\alpha_n} \left\| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \delta_t^2(U(f), x) \Psi(t) dt \right\| \leq \\ &\leq \frac{n^2}{2\alpha_n} \left(4\|f - U(f)\| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi(t) dt + \left\| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \delta_t^2(f, x) \Psi(t) dt \right\| \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Phi(f) \leq \Phi(f - U(f)) + \Phi(U(f)) \leq M\|f - U(f)\| +$$

$$\begin{aligned}
+m\|U''(f)\| &\leq M\|f - U(f)\| + \frac{mn^2}{2\alpha_n} \left(4\|f - U(f)\| \times \right. \\
&\quad \times \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi(t) dt + \left. \left\| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \delta_t^2(f, x) \Psi(t) dt \right\| \right) = \\
&= \left(M + \frac{2mn^2}{\alpha_n} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi(t) dt \right) \|f - U(f)\| + \frac{mn^2}{2\alpha_n} \left\| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \delta_t^2(f, x) \Psi(t) dt \right\|.
\end{aligned}$$

Следствие 2. В условиях теоремы 2

$$\Phi(f) \leq \left(M + \frac{mn^2}{2\alpha_n} \left(4 \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi(t) dt + 1 \right) \right) \left\| \int_0^{\pi} |\delta_t^2(f, x)| \Psi(t) dt \right\|.$$

Предполагается подробно остановиться на приложениях приведенных выше результатов к вопросам аппроксимации функций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бари Н.К., *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М.(1961).
- [2] Стечкин С.Б., *Избранные труды: Математика*, Наука, Физматлит, М.(1989).
- [3] Жук В.В., Пуеров Г.Ю., "Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и коэффициентов Фурье", *Зап. научн. семинаров ПОМИ*, 429, 64-81 (2014).
- [4] Vinogradov O.L. and Zhuk V.V. "Sharp estimates for errors of numerical differentiation type formulas on trigonometric polynomials", *Journal of mathematical sciences*, 105, No. 5, 2347-2376 (2001).

Chebyshev and Others Projections of Point on Polyhedron

Зоркальцев В.И.

zork@isem.irk.ru

ИСЭМ СО РАН, ул. Лермонтова 130, Иркутск, 664033, Россия

Чебышевские и другие проекции точки на полиэдр

В методах вычислений, в математическом моделировании часто возникают задачи поиска векторов линейного многообразия и, в более общем случае, полиэдра, наименее удаленных от заданной точки. При этом могут применяться разные способы конкретизации понятия "близость". В том числе с использованием расстояний, порождаемых октаэдральными, евклидовыми, гёльдеровскими, чебышевскими нормами. В этих

нормах возможно введение весовых коэффициентов, а в гёльдеровских – варьирование степенного коэффициента. Поэтому каждая из этих норм представлена здесь во множественном числе.

Как связаны между собой решения указанной геометрической проблемы при различных определениях понятия "близость"? Какими свойствами, достоинствами и недостатками обладают разные способы "конкретизации" понятия "близость"? Как влияет на решение выбор и варьирование весов в указанных выше нормах?

В докладе планируется представить результаты исследований этих вопросов, опираясь на предшествующие работы [1, 2]. При этом особое внимание будет уделено чебышевским проекциям, что обусловлено основной тематикой конференции и большой ролью минимакса в разных разделах исследования операций [3].

Заданы матрица A размера $m \times n$, вектор $b \in R^m$. Определим полиэдр

$$X = \{x \in R^n : Ax \geq b\}. \quad (1)$$

Считаем, что $0 \notin X$, $X \neq \emptyset$.

Обозначим Q множество Парето-оптимальных решений многокритериальной задачи:

$$|x_j| \rightarrow \min, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in X. \quad (2)$$

То есть вектор $x \in X$ входит в Q , если не существует $y \in X$ такого, что

$$\sum_{j=1}^n |y_j| < \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad |y_j| \leq |x_j|, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Обозначим $J_0(x)$, $J_+(x)$, $J_-(x)$, $J(x)$ – множества номеров компонент вектора x с нулевыми, положительными, отрицательными и ненулевыми значениями. Пусть

$$I_0(x) = J_0(Ax - b), \quad I(x) = J(Ax - b). \quad (4)$$

Обозначим D множество векторов $x \in X$ таких, что не существует $y \in X$, при котором

$$J_0(y) \subseteq J_0(x), \quad I_0(y) \subseteq I_0(x) \quad (5)$$

и хотя бы одно из этих выражений строгое. Пусть

$$B = D \cap Q. \quad (6)$$

Векторы из B будем называть *особыми*. Число векторов в D и, следовательно, в B , конечно. Согласно (6)

$$B \subseteq Q. \quad (7)$$

Замечание. Если X линейное многообразие, то $B = D$. В случае линейного многообразия множество B можно определить (см.[1]) как набор векторов из X с максимальными (нерасширяемыми) носителями. Нет необходимости в (6) и тогда соотношение (7) уже не будет триевиальным следствием из (6).

Множество Q связное, замкнутое, ограниченное и во многих случаях невыпуклое (даже, если X – линейное многообразие, при $n \geq 4$). Справедливо соотношение

$$coB = coQ, \quad (8)$$

где co – выпуклая оболочка.

Множество Q состоит из конечного числа политопов

$$Q = \bigcup_{i=1, \dots, k} Q_i \quad (9)$$

при некотором k . Относительная внутренность $ri\ Q_i$ каждого политопа Q_i состоит из векторов с одинаковыми значениями знаков компонент и одинаковыми наборами неактивных ограничений: для любых x, y из riQ_i

$$J_+(x) = J_+(y), J_-(x) = J_-(y), I(x) = I(y). \quad (10)$$

Пусть $y \in ri\ Q_i$. Тогда для всех $x \in Q_i$

$$J_+(x) \subseteq J_+(y), J_-(x) \subseteq J_-(y), I(x) \subseteq I(y) \quad (11)$$

и не существует $x \in Q$ такого, что

$$J_+(y) \subseteq J_+(x), J_-(y) \subseteq J_-(x), I(y) \subseteq I(x), \quad (12)$$

где хотя бы одно из включений выполняется в строгой форме. Векторы из B служат вершинами политопов Q_i .

Обозначим F множество дифференцируемых функций от векторов R^n , каждая из которых $f \in F$ в результате некоторого возрастающего дифференцируемого преобразования переходит в строго выпуклую функцию и обладает свойством

$$\text{sign}(\nabla_j f(x)) = \text{sign}(x_j), j = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Доказано [2], что для любой функции $f \in F$ существует и единственный вектор

$$x(f) = \arg \min\{f(x) : x \in X\}. \quad (14)$$

Множество таких векторов обозначим

$$PF = \{x(f) : f \in F\}. \quad (15)$$

Множеству F принадлежат гёльдеровские нормы, каждая из которых в результате монотонных преобразований (возвведения в степень p) переходит в функцию

$$\varphi_p^h(x) = \sum_{j=1}^n h_j(|x|)^p. \quad (16)$$

Здесь $h_j > 0$ весовые коэффициенты, $p > 1$ степенной коэффициент. Частным случаем при $p = 2$ будут квадраты евклидовых норм. В этом случае задача (14) решается методом наименьших квадратов. Полученное решение будет евклидовой проекцией начала координат на полиэдр.

Введем множества гёльдеровских при фиксированном степенном коэффициенте и всех гёльдеровских проекций начала координат на полиэдр: при $p > 1$

$$P_p = \{x(\varphi_p^h) : h \in R^n, h > 0\}, \quad (17)$$

$$P = \bigcup_{p>1} P_p. \quad (18)$$

Справедливы [2] соотношения: при любом $p > 1$

$$P_p = P = PF, \quad (19)$$

$$P_2 \subseteq Q, \text{ cl } P_2 = Q, \quad (20)$$

где cl – замыкание множества. Первое из этих соотношений при $p = 2$ означает, что, за счет выбора весовых коэффициентов, методом наименьших квадратов можно получать любую гёльдеровскую проекцию начала координат на полиэдр. Более того, согласно (20) метод наименьших квадратов позволяет, за счет варьирования весовых коэффициентов, получать решение задачи (14) минимизации штрафной функции на полиэдре для функций из широкого класса F .

Согласно (7), (19), (20) методом наименьших квадратов можно получать с любой точностью любое решение из B и Q . В этом плане "старый друг" метод наименьших квадратов не хуже "новых трех" – постановки проблемы поиска ближайших к началу координат точек полиэдра: 1) в виде задачи вычисления особых векторов из B ; 2) в виде задачи поиска векторов полиэдра с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент; 3) в виде задачи (14) минимизации штрафных функций из широкого класса F .

Кроме известных вычислительных удобств метода наименьших квадратов, следует отметить и такое его преимущество: евклидова проекция $x(\varphi_2^h)$ является непрерывной вектор-функцией от вектора весовых коэффициентов $h > 0$.

Имеются расширения класса штрафных функций F на недифференцируемые функции. Рассмотрим два таких расширения: октаэдральные (октаэдрические) и чебышевские проекции начала координат на полиэдр.

Октаэдральные (октаэдрические) проекции. Задача поиска векторов из X с минимальной октаэдральной (октаэдрической) нормой может иметь неединственное решение. Обозначим

$$P_1^h = \operatorname{Arg} \min \sum_{j=1}^n h_j |x_j|, \quad x \in X$$

множество решений этой задачи при заданном векторе весовых коэффициентов $h > 0$ в октаэдральной норме. Анонсируем две теоремы

Теорема 1. $P_1 = Q$, где $P_1 = \bigcup_{h>0} P_1^h$.

Теорема 2. При любом $h > 0$, если $x \in P_1^h$, то $y \in P_1^h$ при любом $y \in X$ таком, что

$$J_+(y) \subseteq J_+(x), J_-(y) \subseteq J_-(x), I(y) \subseteq I(x).$$

Следствие 1. При любом $h > 0$

$$P_1^h \cap B \neq \emptyset.$$

Следствие 2. Если при данном $h > 0$ октаэдральная проекция единственная (множество P_1^h состоит из одного вектора), то это будет особый вектор (т.е. принадлежащий B).

Согласно теореме 1 любой вектор из Q может быть получен как октаэдральная проекция начала координат на X . Казалось бы, этот факт означает такую же эффективность метода минимизации суммы модулей, как и у метода наименьших квадратов. Теорема 2, возможная неоднозначность октаэдральных проекций, вносит большую "ложку дегтя".

Многие векторы из Q могут быть октаэдральными проекциями при некотором h в том и только том случае, если таких проекций при этом h много, некий полигон в Q .

Нет непрерывности в изменениях октаэдральных проекций от изменений вектора весовых коэффициентов. Возможна ситуация, когда сколь угодно малое изменение вектора весовых коэффициентов h может приводить к переходу от проекций, содержащих только один вектор из B , к проекциям, содержащим также только один, но уже другой вектор из B .

Чебышевские проекции. Задача минимизации на X чебышевской нормы

$$\|x\|_\infty^h = \max_j h_j |x_j|$$

при заданном $h > 0$ также может иметь неединственное решение. Среди ее решений обязательно будет вектор из Q . Могут оказаться среди решений и векторы, не принадлежащие Q , которые не годятся на роль ближайших к началу координат точек полиэдра из содержательных соображений.

Предлагается в качестве чебышевской проекции начала координат на полиэдр X рассматривать вектор

$$y(h) = \arg \min_{x \in X} \max_{j=1, \dots, n} h_j |x_j|,$$

где выражение $\arg \min$ означает, что применяется следующая процедура лексикографической (последовательной) оптимизации.

На первом этапе решается задача минимизации чебышевской нормы на X . В результате решения этой задачи определяется одно из оптимальных решений (если их несколько) и осуществляется разбиение множества номеров $j = 1, \dots, n$ на два подмножества I_1, J_1 . В набор I_1 входят те номера компонент вектора x , которые имеют одно и то же значение для любого оптимального решения. В набор J_1 входят номера переменных x_j , которые могут принимать разные значения для оптимальных решений задачи первого этапа.

Переменные с номерами из I_1 фиксируются и решается задача минимизации той же функции на полиэдре X по оставшимся переменным (с номерами из J_1). Получаем оптимальное решение и разбиение множества номеров J_1 на два подмножества I_2, J_2 . В набор I_2 входят номера переменных x_j , которые в результате решения задачи оптимизации второго этапа идентифицируются как имеющие одно и тоже значение для всех оптимальных решений. Эти переменные фиксируются на достигнутом оптимальном уровне при переходе к задаче следующего этапа.

Процедура перехода к следующему этапу повторяется до тех пор, пока на очередном этапе t не окажется, что $J_t = \emptyset$. Так как на всех этапах множество I_k , $k = 1, 2, \dots$, не пусто, то через конечное число этапов будет однозначно определен вектор $y(h)$.

Указанную процедуру последовательного решения задач оптимизации (они представляются в виде задач линейного программирования) и, что особенно важно, разделения переменных на указанные выше два подмножества естественным образом, можно организовать на базе алгоритмов, приводящих к относительно внутренним точкам оптимальных решений. Таким свойством обладают алгоритмы метода внутренних точек.

Анонсируем два утверждения.

Теорема 3. $\text{cl } P_\infty = Q$, где $P_\infty = \{y(h) : h \in R^n, h > 0\}$.

Теорема 4. Чебышевская проекция $y(h)$ является непрерывной вектор-функцией от вектора h .

Можно резюмировать, что определенные здесь чебышевские проекции вполне конкурентоспособны с евклидовыми проекциями. Вычислительные проблемы, связанные с необходимостью поиска относительно внутренних точек оптимальных решений задач линейного программирования, легко преодолимы. При этом в некоторых случаях чебышевские проекции могут иметь содержательные преимущества.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-07-07412а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зоркальцев В.И., “Октаэдрические и евклидовы проекции точки на линейное многообразие”, *Труды института математики и механики УрО РАН*, 18, No. 3, 106–118 (2012).
- [2] Зоркальцев В.И., “Проекции точки на полиэдр”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, 53, No. 1, 4–19 (2013).
- [3] Демьянов В.Ф., Малоземцов В.Н. *Введение в минимакс*, Наука, (1982).

The Example of Best Uniform Approximation in Multidimensional Space

Малозёмов В.Н., Плоткин А.В.

v.malozemov@spbu.ru, avplotkin@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский
проспект, дом 28, Старый Петергоф, 198504, Россия

Пример наилучшего равномерного приближения в многомерном случае

Пусть $n \geq 2$ — фиксированное натуральное число, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор с положительными компонентами и

$$H(x) = n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^{-1}$$

— функция, значение которой равно среднему гармоническому её аргументов. Доопределим $H(x)$ на множестве \mathbb{R}_+^n векторов с неотрицательными компонентами, положив по непрерывности $H(x) = 0$, если хотя бы одна компонента вектора x равна нулю.

Обозначим через Ω телесный симплекс, состоящий из векторов $x \in \mathbb{R}_+^n$, у которых $\sum_{k=1}^n x_k \leq 1$, и рассмотрим задачу наилучшего равномерного приближения:

$$\varphi(c) := \max_{x \in \Omega} |H(x) - \langle c, x \rangle| \rightarrow \min_{c \in \mathbb{R}^n}. \quad (*)$$

Доказаны следующие утверждения:

- задача (*) имеет единственное решение $c_* = (\frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n})$, обладающее полным алльтернансом;
- выполняется условие сильной единственности

$$\varphi(c) - \varphi(c_*) \geq r \|x - x_*\|,$$

$$c r = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3n}};$$

- при каждом n константа сильной единственности r асимптотически точна.

Section 8

Polyhedral Analysis and Polyhedral Optimization

Polyhedral Approximations in \mathbb{R}^n

Balashov M.

balashov73@mail.ru

Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskii pereulok 9, Dolgoprudny,
141707, Russia

Let \mathbb{R}^n be a real n-dimensional Euclidean space with the inner product (x, y) .

Let E be a Banach space and let a subset $A \subset E$ be convex and closed. *The modulus of convexity* $\delta_A : [0, \text{diam } A) \rightarrow [0, +\infty)$ (was introduced in [1], see also [2]) is the function

$$\delta_A(\varepsilon) = \sup \left\{ \delta \geq 0 \mid B_\delta \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \subset A, \forall x_1, x_2 \in A : \|x_1 - x_2\| = \varepsilon \right\}.$$

We shall consider the standard polyhedral approximation of a closed convex compactum $A \subset \mathbb{R}^n$ on a grid $\mathbb{G} = \{p_k\}_{k=1}^N$ of unit vectors from \mathbb{R}^n with step $\Delta \in (0, \frac{1}{2})$ in the sense of [3]:

$$\hat{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_k, x) \leq s(p_k, A), \forall k, 1 \leq k \leq N\}.$$

Here $s(p, A)$ is the supporting function of the set A , i.e.

$$s(p, A) = \sup_{x \in A} (p, x).$$

The main result of the paper [4] is that

$$h(A, \hat{A}) \leq \frac{8}{7} \varepsilon(\Delta) \Delta,$$

where $\varepsilon(\Delta)$ is a solution of the equation $\frac{\delta_A(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\Delta}{4 - \Delta^2}$ and

$$h(A, \hat{A}) = \max_{\|p\|=1} |s(p, \hat{A}) - s(p, A)|$$

is the standard Hausdorff distance between the sets A and \hat{A} .

The main result of the talk (see [5] for details) is an estimate of the error for polyhedral approximation of a convex compactum from \mathbb{R}^n when the compactum is given with the help of the presupporting function.

For a positively uniform function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ define the set

$$O_f = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| = 1, \operatorname{conv} f(p) = f(p)\}.$$

We shall postulate that $\operatorname{conv} f(p)$ is a proper function (and $f(p)$ itself is not necessarily convex).

Let $R \geq r > 0$ be such constants that $r\|p\| \leq f(p) \leq R\|p\|$ for all p . Suppose also that there exists $\delta > 0$ such that for any $p \in O_f$ and for all $q \in B_\delta(p) \cap \partial B_1(0)$ we have

$$f(q) - f(p) - (f'(p), q - p) \leq w(\|q - p\|),$$

where $f'(p)$ is some subgradient, $w(t) > 0$ for $t \in (0, \delta)$ and $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{w(t)}{t} = 0$.

Let

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p, x) \leq f(p), \forall p \in \mathbb{R}^n\}, \\ \tilde{A} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p, x) \leq f(p), \forall p \in \mathbb{G}\}. \end{aligned}$$

Then for sufficiently small step Δ we have the estimate

$$h(A, \tilde{A}) \leq \frac{R}{r} \frac{w(\Delta)}{1 - \frac{\Delta^2}{2}}.$$

The order (on Δ) of the right side in the previous formula is the best possible.

The work was supported by grant RFBR 16-01-00259-a.

References

- [1] B. T. Polyak, “Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions,” *Soviet Math*, 7, 72-75 (1966).
- [2] M. V. Balashov, D. Repovš, “Uniform convexity and the splitting problem for selections,” *J. Math. Anal. Appl.* 360, No.1, 307-316 (2009).
- [3] E. S. Polovinkin, “Strongly convex analysis”, *Sbornik: Mathematics*, 187, No. 2, 259-286 (1996).
- [4] M. V. Balashov, D. Repovš, “Polyhedral approximations of strictly convex compacta”, *J. Math. Anal. Appl.* 374, 529-537 (2011).
- [5] M. V. Balashov, “On Polyhedral Approximations in an n -Dimensional Space”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 56, No. 10, 1679-1685 (2016).

An Algorithm for Data Analysis via Polyhedral Optimization

Gabidullina Z.

Zgabid@mail.ru

Kazan Federal University, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, 35, Kremljovskaja street, Kazan, 420008, Russia

For a long time, from both theoretical and practical points of view, the different aspects of linear separability of sets are of increasing interest due to a broad range of applications, most notably in data analysis. Actually, as a fundamental topic of mathematics, linear separability has a large literature. Let us focus the attention on only some of recent sources of leading authorities in the field, that are most relevant and helpful for our question of concern, such as [1]–[3].

In respect to this paper, it represents a continuation of our previous work on theoretical issues of linear separability of sets and its practical applications. Our preceding results used in the study have been published in a series of papers [4]–[10]. In this talk, we consider the m arbitrary nonempty pattern sets in the n -dimensional Euclidean space \mathbb{R}^n denoted by Φ_i , $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$. By classical definition, a pattern is an entity that can be represented by a feature vector (a collection of properties and variables). As examples of patterns can be enumerated a patient with the results of the medical tests; an audio signal with its frequency spectral components; or a digitized image formed by pixels or color samples. Some more words about our notation now. Each of pattern sets Φ_i , $i \in I$ is a polyhedron given as the convex hull of finite number of vectors. Let us note that, owing to its boundedness, such type of a convex polyhedron is frequently (but not always) called a polytope. Let Φ be the intersection of the considered finite collection of polyhedra Φ_i , i.e. $\Phi := \cap_{i \in I} \Phi_i$. Let $\Phi \neq \emptyset$. Let $B - q$ stand for the Minkowski difference for some set B and point $q \in \mathbb{R}^n$, i.e.

$$B - q := \{x \in \mathbb{R}^n : x = b - q, b \in B\}.$$

For the case when $B := \text{conv}_{k \in K} \{b_k\}$, there was proved in [5] the following useful property:

$$B - q = \text{conv}_{k \in K} \{b_k - q\}.$$

In data analysis, a nontrivial important question arising in many scientific areas such as computer science, engineering, biology, and medicine, among others is whether or not, for some arbitrary pattern p , it holds $p \in \Phi = \cap_{i \in I} \Phi_i$? For answering such a question for one polygon (but not for the intersection of some ones) in the two-dimensional case, for instance, there can be utilized the so-called point-in-polygon algorithm [11]. For the same purpose, in the three-dimensional case, there may be used the point-

in-polyhedron algorithm [12]–[13]. In [14], using parallel projection, this algorithm reduces the dimensionality of the problem in concern to the solvable two-dimensional case. Then one applies the point-in-polygon algorithm to explore whether the test point lies outside the image of a projected face or not. The objective of this paper is to develop the algorithm for solving the problem under study in the n -dimensional case, i.e. for the arbitrary dimensionality. Moreover, we investigate the more complex case when the structure of the considered set Φ is defined as an intersection of the finite collection of pattern sets. Among other things, our approach is differed from the above-mentioned ones in respect to the tools (such as parallel computing with its advantages) operating in our investigation. Necessary and sufficient conditions for emptiness of the cones of generalized support vectors and a linear separability criterion for sets of Euclidean space from [6]–[7] provide the useful background for the current treatment. Let us further note that the problem in consideration is closely relevant to the best approximation problem (BAP) which is to find the projection of a given point p onto Φ . We refer the interested reader to [15], [16] for a very helpful systematic survey of existing results on iterative projection algorithms which are (and, in some cases, are not) appropriate for solving of BAP.

Here, we apply the concept of “linear separability”, so we have to remind at least briefly the meaning of this term for concreteness. The point q and pattern set B are said to be linearly separable, if and only if there exists some non-zero vector $c \in \mathbb{R}^n$ such that:

$$\langle c, q \rangle \leq \min_{b \in B} \langle c, b \rangle. \quad (1)$$

To define the strong separability of the objects in concern, the inequality (1) should be fulfilled strictly (for definitions and more details see, e.g., [6]).

As is already known from mathematical theory, the point p belongs to Φ if and only if the origin of \mathbb{R}^n belongs to the Minkowski difference $\Phi - p$. For this reason, our goal is finding out whether or not the origin belongs to $(\cap_{i \in I} \Phi_i) - p$. For the purpose, we will have to clarify whether or not the origin belongs to $\cap_{i \in I} (\Phi_i - p)$. Due to well-known connectedness of the problem in concern with the linear separation problem, our further task is to separate linearly the origin of \mathbb{R}^n from the set $\cap_{i \in I} (\Phi_i - p)$. Taking into account a special structure of $\cap_{i \in I} (\Phi_i - p)$, we can naturally decouple the above-mentioned separation problem into the independent subproblems of separating the origin from the individual sets $\Phi_i - p$, $i \in I$. By the way, we note that, in particular, there can be used here a decomposition and coordination framework for linear separability criterion proposed in [7]. The next our task is to solve separately the afore-mentioned subproblems using the linear separation framework. To serve this purpose, for instance, one

can use the different types of a reduction of the projection problem from [8]. In particular, we may as well apply the so-called MDM-algorithm [17] in the case when there is not required to recognize precisely the origin as the interior or boundary point after we have been found out already that the origin belongs to the set $\Phi_i - p$, $i \in I$. However, in practice one often is faced with the necessity of exact identifying the given point as exterior, interior, or boundary. For such more deep analysis, the maximin setting of the projection problem (see, e.g., [8]) is most suitable to solve the subproblems. Further, we coordinate the solutions of individual subproblems in order to arrive now at a complete answer to our original question about position of the point p relatively to the set Φ . Namely, whether a given point lies inside, outside, or on the boundary of Φ .

Let us further describe shortly the proposed algorithm which has the three following main stages:

- Reducing the Problem 1 to the Problem 2, where the first one consists in linear separating the given pattern p from the set Φ , and the second one represents the problem of linear separation of the origin of \mathbb{R}^n from $\Phi - p$.
- Decomposing the Problem 2 into the collection of the independent subproblems of linear separating the origin of \mathbb{R}^n from $\Phi_i - p$, $i \in I$. Using the polyhedral optimization for solving the subproblems by sequential or parallel computing.
- Based on a linear separability criterion, coordinating the obtained solutions of the subproblems to determine the interposition of the pattern p and set Φ .

The termination condition for the algorithm are defined based on a linear separability criterion [6].

References

- [1] V.F. Demyanov, Mathematical Diagnostics, *Advances in Convex Analysis and Global Optimization: Honoring the Memory of C. Caratheodory (1873-1950)*, 54,11 (2013).
- [2] G. Pillo, F. Giannessi (ed.), *Nonlinear Optimization and Applications*, Springer Science & Business Media, (2013)
- [3] A. Bagirov, N. Karmitsa, M. M. Mäkelä, *Introduction to Nonsmooth Optimization: theory, practice and software*, Springer, (2014).
- [4] Z.R. Gabidullina, A Theorem on Separability of a Convex Polyhedron from Zero point Of the Space and Its Applications in Optimization, *Izvestiya VUZ. Matematika*, No. 12, 21–26 (2006) (Engl.trasl. *Russian Mathematics (Iz.VUZ)*, 50, No. 12, 18–23 (2006)).

- [5] Z.R. Gabidullina, A Theorem on Strict Separability of Convex Polyhedra and Its Applications in Optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 148, No. 3, 550–570 (2011).
- [6] Z.R. Gabidullina, A Linear Separability Criterion for Sets of Euclidean Space, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 158, No. 1, 145–171 (2013).
- [7] Z.R. Gabidullina, Necessary and Sufficient Conditions for Emptiness of the Cones of Generalized Support Vectors, *Optimization Letters*, 9, No. 4, 693–729 (2015).
- [8] Z.R. Gabidullina, The Problem of Projecting the Origin of Euclidean Space onto the Convex Polyhedron, *arXiv preprint*, arXiv:1605.05351 (2016) <http://arxiv.org/abs/1605.05351>
- [9] Z.R. Gabidullina, Solving of Variational Inequalities by Reducing to the Linear Complementarity Problem, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 158, No. 1, 012033 (2016).
- [10] Z.R. Gabidullina, The Minkowski Difference of Sets with the Constraint Structure. VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016) Moscow, October 17-22 PROCEEDINGS Volume I, 30–33 (2016).
- [11] K. Hormann, A. Agathos, The Point in Polygon Problem for Arbitrary Polygons *Computational Geometry*, 20, No. 3, 131–144 (2001).
- [12] F.R. Feito, J.C. Torres, Inclusion test for general polyhedra, *Computers&Graphics*, 21, No. 1, 23–30 (1997).
- [13] Y.E. Kalay, Determining the Spatial Containment of a Point in General Polyhedra, *Computer Graphics and Image Processing*, 19, No. 4, 303–334 (1982).
- [14] Said A., Parker D. Design and Analysis of a New Point-in-Polyhedron Algorithm, 1st International conference on geocomputation, University of Leeds, United Kingdom, 17–19 (1996).
- [15] H.H. Bauschke and J.M. Borwein, On Projection Algorithms for Solving Convex Feasibility Problems, *SIAM review*, 38, No. 3, 367-426 (1996).
- [16] Y. Censor, Computational Acceleration of Projection Algorithms for the Linear Best Approximation Problem, *Linear Algebra and its Applications*, 416, No. 1, 111-123 (2006).
- [17] V.F. Dem'yanov and V.N. Malozemov, *Introduction to Minimax*, Dover Publications, (1990).

Solving of a Projection Problem for Convex Polyhedra Given by a System of Linear Constraints

Gabidullina Z.

Zgabid@mail.ru

Kazan Federal University, Institute of Computational Mathematics and
Information Technologies, 35, Kremljovskaja street, Kazan, 420008, Russia

In present paper, we propose a novel approach to solving of the so-called polyhedral projection problem (PPP) [1] which serves to project a point onto a polyhedron given by the linear inequality constraints. Our approach is based on an idea of making use of a reduction of PPP to the problem of projecting the origin of Euclidean space onto the Minkowski difference of the considered polyhedron and point. We make use our results related to the concept of the Minkowski difference for the afore-mentioned objects (see, e.g., [2]–[3]). The proposed approach is new (relative to the traditional ones) thanks to further reducing of PPP to the problem of projecting the origin onto the convex hull of some vectors corresponding to the gradients of the constraints [4]. The presented reduction makes wider a spectrum of the powerful tools of mathematical programming which may be operated for solving PPP.

The polyhedral projection problem has a wide range of important applications. As is remarked in [1], in the case when Newton's method is utilized to determine a feasible point of the set defined by a system of equations and inequalities, the constraints are linearized and on each iteration there is solved a polyhedral projection problem. For a polyhedral constrained smooth optimization problem, each iteration of the gradient projection algorithm involves a gradient step followed by a projection onto the polyhedron (see, e.g., [5]). Likewise, in each iteration of solving a polyhedral constrained problem of optimizing the nondifferentiable objective function by the subgradient projection method, the subgradient has to be projected onto the polyhedron (see, e.g., [5]). The polyhedral projection problem may be also used to solve the denoising problem in signal processing [6]. Let us note that PPP has as well a valuable applications in the following areas such as

- best approximation theory (see, e.g., [7]–[8] and references therein),
- image reconstruction (discrete models) (see, e.g., [7]–[8] and references therein),
- variational analysis (more precisely, variational inequalities)([9]– [12], to name only a few),

- theory of minimax (see, e.g., [13] and references therein, see also [14] for details related to interconnection of the problems of maximin and projection),
- theory of the cones of generalized support vectors (see, e.g., [10], [2]),
- theory of linear separation of sets (see, e.g., [15]–[17]).

Finally, let us note that, in the paper, we aim to deal with the problem consisting in projecting a given point $p \in \mathbb{R}^n$ onto the nonempty set defined by a system of the linear constraints as follows

$$\min_{x \in D} \|x - p\|^2, \quad (1)$$

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

References

- [1] W.W. Hager and H. Zhang, Projection onto a Polyhedron that Exploits Sparsity, *SIAM J. OPTIM.*, 26, No. 3, 1773–1798 (2016).
- [2] Z.R. Gabidullina, Necessary and Sufficient Conditions for Emptiness of the Cones of Generalized Support Vectors, *Optimization Letters*, 9, No. 4, 693–729 (2015).
- [3] Z.R. Gabidullina, The Minkowski difference of sets with the constraint structure. VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016) Moscow, October 17–22 PROCEEDINGS Volume I, 30–33 (2016).
- [4] Z.R. Gabidullina, The Problem of Projecting the Origin of Euclidean Space onto the Convex Polyhedron, *arXiv preprint*, arXiv:1605.05351 (2016) <http://arxiv.org/abs/1605.05351>
- [5] F.P. Vasil'ev, *Numerical Methods for Solving Extremum Problems*, Nauka, Moscow (1980).
- [6] S.S. Chen, D.L. Donoho, and M.A. Saunders, Atomic Decomposition by Basis Pursuit, *SIAM J. Sci. Comput.*, 20, 33–61 (1998).
- [7] H.H. Bauschke and J.M. Borwein, On Projection Algorithms for Solving Convex Feasibility Problems, *SIAM review*, 38, No. 3, 367–426 (1996).
- [8] Y. Censor, Computational Acceleration of Projection Algorithms for the Linear Best Approximation Problem, *Linear Algebra and its Applications*, 416, No. 1, 111–123 (2006).
- [9] A.L. Dontchev, R.T. Rockafellar, *Implicit Functions and Solution Mapping. A View from Variational Analysis*, Springer (2009).
- [10] R.T. Rockafellar, R. J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer(3-rd printing)(2009).
- [11] B.S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic theory*, Springer-Verlag (2006) (updated reprinting 2013)

- [12] Z.R. Gabidullina, Solving of variational inequalities by reducing to the linear complementarity problem, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 158, No. 1, 012033 (2016).
- [13] V.F. Dem'yanov and V.N. Malozemov, *Introduction to Minimax*, Dover Publications, (1990).
- [14] Z.R. Gabidullina, A Linear Separability Criterion for Sets of Euclidean Space, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 158, No. 1, 145–171 (2013).
- [15] I.I. Eremin, Fier's Methods of Strict Separability of Convex Polyhedral Sets, *Izvestiya VUZ. Matematika*, 12, 33–43(2006).
- [16] Z.R. Gabidullina, A Theorem on Separability of a Convex Polyhedron from Zero point Of the Space and Its Applications in Optimization, *Izvestiya VUZ. Matematika*, No. 12, 21–26 (2006) (Engl.transl. *Russian Mathematics (Iz.VUZ)*, 50, No. 12, 18–23 (2006)).
- [17] Z.R. Gabidullina, A Theorem on Strict Separability of Convex Polyhedra and Its Applications in Optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 148, No. 3, 550–570 (2011).

Efficient Approximability of The Majoritary Polyhedral Separability

Khachay M.

mkhachay@imm.uran.ru

Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, 16 S. Kovalevskoy str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia

We consider the Minimum Affine Separating Committee (MASC) combinatorial optimization problem, which is related to ensemble machine learning techniques on the class of linear weak classifiers combined by the rule of simple majority. Actually, interpretation of the MASC problem is twofold. From the first hand, the MASC problem is a mathematical formalization of the famous Vapnik-Chervonenkis principle of structural risk minimization in the majoritary class of linear classifiers. According to this principle, for each learning dataset, it is required to construct a best performance ensemble classifier belonging to a family of the least possible VC-dimension. From another hand, MASC is closely related to the well known optimal polyhedral separability computation geometry problem coined by N.Megiddo. Here, it is required to find the minimum number of hyperplanes separating some given red-blue-colored finite subset according to some majoritary Boolean formula.

It is known that the MASC problem is *NP*-hard and remains intractable in Euclidean spaces of any fixed dimension $d > 1$ even under an additional constraint on the separated sets to be in general position. This special case

of the MASC problem called MASC-GP(d) is the main subject of interest of the present paper.

To design polynomial-time approximation algorithms for a class of combinatorial optimization problems containing the MASC problem, we propose a new framework, adjusting the well-known Multiplicative Weights Update method. Following this approach, we construct polynomial-time approximation algorithms with state-of-the-art approximation guarantee for the MASC-GP(d) problem. The results obtained provide a theoretical framework for learning a high-performance ensembles of affine classifiers.

According to the classic linear setting of the two-class classification problem, for a finite (training) labeled sample

$$(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m), \quad (1)$$

where x_i are points in an d -dimensional Euclidean feature space E , and the labels $y_i \in \{-1, 1\}$, it is required to construct (learn) a *committee* piecewise linear classifier

$$h(x) = \text{sign} \sum_{j=1}^k \alpha_j \text{sign}(w_j^T x - b_j) \quad (2)$$

for some integers $\alpha_j \geq 0$. Since any partial classifier $\text{sign}(w_j^T x - b_j)$ is just a composition of an *affine* and threshold functions, it is called *affine classifier*. Meanwhile, the classifier h is called *affine separating committee* since it aggregates the partial decisions according to the simple majority voting rule.

In the context of Vapnik-Chervonenkis structural risk minimization framework, it is significant to design learning algorithms, which, given sample (1), construct perfect committee classifiers of form (2) belonging to a family of the minimum VC-dimension.

The main our motivation is based on the following two facts:

- (i) for any non-contradictory sample (1) (i.e., a sample, for which inequality $y_{i_1} \neq y_{i_2}$ implies $x_{i_1} \neq x_{i_2}$), there exists a committee classifier h , which is perfect w.r.t. this sample [1];
- (ii) the family of classifiers (2) defined on the d -dimensional space E and sharing the property $\sum_{j=1}^k \alpha_j = q$ has VC-dimension $O(qd)$ [2].

In the MASC problem, the goal is to search for perfect committee (2) w.r.t. sample (1) having the minimum value (which is also called *committee length*) of the total weight $\sum_{j=1}^k \alpha_j$. Therefore, the MASC problem can be considered as a mathematical formalization of the structural risk minimization principle in the class of committee classifiers. Any optimal (or even a good approximate) solution of this problem produces a classifier with

a high generalization performance and a good polyhedral separation rule for the appropriate set of points.

Unfortunately, the MASC problem is strongly NP-hard and remains intractable even in a fixed-dimensional space (for any dimension $d > 1$) and under the additional constraint of general position for a training pointset. This special case denoted by MASC-GP(d) is the main subject of interest of this paper. Since this problem is intractable, the question of its effective approximability remains still open. Up to 2015, the best (state-of-the-art) known [2] ratio for polynomial-time approximation algorithms for the MASC-GP(d) problem is $O(m/d)$ (in the general case) and $O(\ln m)$ for some special instances, we call them *nice*.

We develop [3] a new approximation framework generalizing the well known Multiplicative Weights Update technique (see, e.g. [4]) and the famous boosting by sampling [5] learning strategy. As a consequence, we construct new polynomial-time approximation algorithms for the MASC problem with significantly improved accuracy bounds. In particular, we present an algorithm with a general approximation ratio of $O((\frac{m \ln m}{d})^{1/2})$ and a ratio of $O(\ln m)$ for the same nice instances, where m is the length of the training sample.

References

- [1] M. Mazurov, “Committees of inequalities systems and the pattern recognition problem.”, *Kibernetika*, No. 3, 140–146 (1971).
- [2] M. Khachay and M. Poberii, “Complexity and approximability of committee polyhedral separability of sets in general position.”, *Informatica*, 20, No. 2, 217–234 (2009).
- [3] M. Khachay, “Committee polyhedral separability: complexity and polynomial approximation”, *Machine Learning*, 101. No. 1, 131–151 (2015)
- [4] S. Arora, E. Hazan, and S. Kale, “The multiplicative weights update method: a meta-algorithm and applications”. *Theory of Computing*, 8. No. 1, 121–164 (2012)
- [5] R. Schapire and Y. Freund, *Boosting: Foundations and algorithms*, MIT Press, (2012).

About Constructing a Dual Polyhedral Cone in Three Dimensional Space

Polyakova L., Popova M.

lnpol07@mail.ru, mar3756@yandex.ru

Saint Petersburg State University, 7-9, University emb., 199034 St. Petersburg,
Russia

The problem of constructing a dual cone of a convex polyhedral cone arises in many mathematical problems. Consider a convex polyhedral cone

$$Q = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{i=1}^m a_i \bigcup 0 \right\}, \quad a_i \in \mathbb{R}^3, \quad \|a_i\| \neq 0, \quad m \geq 3.$$

We denote by $\text{co}A$ the convex hull of A and by $\text{cone}A$ the cone hull of A . Assume that among the vectors a_i , $i \in I = 1, \dots, m$, there are not proportional ones. Vectors a_i , $i \in I$, are called generating vectors of Q . The cone Q is closed.

Let the convex cone Q be solid (with nonempty interior) and acute. For an acute polyhedral cone there is a unique (up to a positive scalar) generating set of extremal rays. In three dimensional space each face of a convex polyhedral cone is a plane convex polyhedral cone. It is necessary to construct the dual cone for Q

$$Q^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a_i, x \rangle \geq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}^3, \quad i \in I \right\}. \quad (1)$$

In order to determine a set of points which are solutions of homogeneous system of linear inequalities (1), it is necessary to find the skeleton of Q°

$$Q^\circ = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{j=1}^p b_j \right\}, \quad b_j \in \mathbb{R}^3,$$

here b_i , $j \in J = 1, \dots, p$, are extremal rays of Q° .

At first, rotate Q such that it is completely in the half-space $z \geq 0$ and the intersection of the resulting cone with the coordinate plane Oxy consists only from the zero point. It is possible because Q is acute. For this find a non-zero vector $v \in \text{int } Q$ for which

$$\langle v, x \rangle > 0 \quad \forall x \in Q.$$

There exists such vector. Then by using the Householder transformation we rotate the vector v so that it is lying on the axis Oz , i. e., it takes the following form $v' = (0, 0, z)^T$, $z > 0$. It is known that under the action of

an orthogonal operator to a vector, its length does not change. Therefore the angle between each of these vectors a'_i , $i \in I$, and $v' = (0, 0, z)^T$ will remain the same. Consequently all vectors also lie in the upper half-space, i. e. their third coordinate is positive. Denote it by

$$Q' = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{i=1}^m a'_i \right\}, \quad a'_i \in R^3.$$

Let $e = (0, 0, 1)^T$. Obviously, the direction of the vector e coincides with the direction of the vector v' . Consequently, the vector e belongs to the interior of the cone Q' . Divide all vectors a'_i by their third coordinate to get $\bar{a}_i = \frac{a'_i}{\|a'_i\|}$, $i \in I$. The vectors \bar{a}_i , $i \in I$, and e , lie in the plane $z = 1$ and have coordinates $\bar{a}_i = (\bar{a}_{1i}, \bar{a}_{2i}, 1)^T$. Construct the convex hull of these vectors

$$M = \text{co} \left\{ \bigcup_{i \in I} \bar{a}_i \right\}.$$

Obviously, the polyhedron M also lies in the plane $z = 1$. By construction, the vector e is in the relative interior of this polyhedron. Note also that

$$Q' = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{i=1}^m \bar{a}_i \right\}.$$

In order to construct the dual cone of the cone Q' it is necessary to find the vertices of M and to determine the order in which they are located. First of all, it is necessary to eliminate the vectors \bar{a}_i , $i \in I$, which lie in the interior of Q' and accordingly in the relative interior of M .

Using the Graham algorithm we find all vertices of the convex hull and them the order along its boundary. As a result of the algorithm a lot of \mathcal{E} consisting of the vertices of the convex hull in the counterclockwise order will be constructed. If we construct rays from the zero point and each point of \mathcal{E} , then these rays are extreme rays of Q' . Let

$$\mathcal{E} = \bigcup_{i \in I_1} a'_i, \quad I_1 = 1, \dots, p, \quad m_1 \geq 3, \quad Q' = \text{cone co} (\mathcal{E}).$$

Each face of the cone Q' is a plane spanned by two extreme vectors of the constructed convex hull. Ranking faces are known from its construction. In order to find the extreme rays of the polar cone of the cone Q' , it is necessary to find the projection of point $t = (0, 0, 1)^T$ onto each face of the cone. It is possible to do by using an algorithm of orthogonal projecting onto the

face spanned by extreme rays. After that we apply again the Householder transformation to Q'^o .

References

- [1] . S. N. Chernikov, *Linejnye Neravenstva*. M.: Nauka, (1968).
- [2] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1997).
- [3] S. L. Lawson, R. J. Hanson , *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1995).
- [4] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*. 3rd. ed. MIT Press,(2009).
- [5] F. R. Preparata, M. I. Shamos , *Computational Geometry: An Introduction*. New York: Springer-Verlag, (1985).

Polyhedral Estimation of the Controllability Region of a Nonlinear System

Ponomarev A.

anton.pon.math@gmail.com

Saint Petersburg State University, Universitetskii prospekt 35, Peterhof, Saint Petersburg 198504, Russia

Notation. $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm. Given a set of points x^1, x^2, \dots, x^N , $\text{conv}(x^1, x^2, \dots, x^N)$ is their convex hull. Given a polyhedron $X = \text{conv}(x^1, x^2, \dots, x^N)$, $r(X)$ is its “radius”, i. e.,

$$r(X) = \max_{x \in X} \min_{i=1,2,\dots,N} \|x - x^i\|. \quad (1)$$

Given a set X and a point x , $\rho(x, X)$ is the distance from x to X , i. e.,

$$\rho(x, X) = \min_{\xi \in X} \|x - \xi\|. \quad (2)$$

Given a set X , $\mathcal{O}_\varepsilon(X)$ is its open ε -neighborhood, i. e.,

$$\mathcal{O}_\varepsilon(X) = \{x : \rho(x, X) < \varepsilon\}. \quad (3)$$

Problem statement. Consider the discrete-time nonlinear control system

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad k = 0, 1, \dots, T-1 \quad (4)$$

under state and input constraints

$$x_k \in \mathcal{X}, \quad k = 1, 2, \dots, T-1, \quad (5)$$

$$x_T \in \mathcal{X}_T \subset X, \quad (6)$$

$$u_k \in \mathcal{U}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1. \quad (7)$$

Assume the following.

1. The system is invertible in time, i. e., there exists function $f^{-1}(x, u)$ such that

$$f(f^{-1}(x, u), u) = x \quad \forall x, u. \quad (8)$$

2. $f(x, u)$ and $f^{-1}(x, u)$ are globally linearizable Lipschitz functions, i. e.,

$$f(x, u) = f_\ell(x, u, \bar{x}, \bar{u}) + f_{n\ell}(x, u, \bar{x}, \bar{u}), \quad (9)$$

$$f^{-1}(x, u) = f_\ell^{-1}(x, u, \bar{x}, \bar{u}) + f_{n\ell}^{-1}(x, u, \bar{x}, \bar{u}), \quad (10)$$

$$\|f(x, u) - f(\bar{x}, \bar{u})\| \leq L_f(\|x - \bar{x}\| + \|u - \bar{u}\|) \quad (11)$$

$$\|f^{-1}(x, u) - f^{-1}(\bar{x}, \bar{u})\| \leq L_{f^{-1}}(\|x - \bar{x}\| + \|u - \bar{u}\|) \quad (12)$$

$$\forall x, u, \bar{x}, \bar{u} \quad (13)$$

where $f_\ell(x, u, \bar{x}, \bar{u})$ and $f_\ell^{-1}(\dots)$ are affine in $x - \bar{x}$ and $u - \bar{u}$ and

$$\|f_{n\ell}(x, u, \bar{x}, \bar{u})\| \leq M_f(\|x - \bar{x}\|^2 + \|u - \bar{u}\|^2), \quad (14)$$

$$\|f_{n\ell}^{-1}(x, u, \bar{x}, \bar{u})\| \leq M_{f^{-1}}(\|x - \bar{x}\|^2 + \|u - \bar{u}\|^2) \quad (15)$$

for some constants M_f and $M_{f^{-1}}$.

3. Sets \mathcal{X} , \mathcal{X}_T , and \mathcal{U} are connected, compact, and contain the origin in the interior.

Definition. The *controllability region* of the system (4) under constraints (5)–(7) is the set of the initial states x_0 for which there is a control sequence admissible with respect to the constraints.

The problem addressed by this paper is to estimate the controllability region numerically.

The problem of controllability region estimation is related to estimation of the basin of attraction (when the system is without control) and the reachable set (when time is reversed). These topics have been studied extensively in the past and still attract considerable attention. For linear systems with convex constraints there is an effective approach that approximates the region by finding tangent hyperplanes. Development of this approach can even yield explicit formulation of the region's border [1]. For nonlinear systems, the region is sometimes estimated by a level surface of a quadratic or higher-order Lyapunov function [2]. However, this approach is usually quite conservative, in particular when the set in question is non-convex.

The algorithm. The proposed algorithm approximates the controllability region by a set of convex polyhedra. It is based on the simple observation that a linearizable function maps a “small enough” convex polyhedron into a set which is “almost equal” to the convex hull of the images of the original polyhedron's vertices. The following lemma quantifies this statement.

Lemma. Let

$$X = \text{conv}(x^1, x^2, \dots, x^p) \subset \mathcal{X}, \quad (16)$$

$$U = \text{conv}(u^1, u^2, \dots, u^q) \subset \mathcal{U}, \quad (17)$$

$$\tilde{X} = \text{conv}\{f^{-1}(x^i, u^j), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q\}. \quad (18)$$

Under assumptions about the function $f(x, u)$ made above,

$$\forall x \in \mathcal{O}_\varepsilon(\tilde{X}) \quad \exists u \in U : \quad f(x, u) \in \mathcal{O}_\delta(X) \quad (19)$$

where $\delta = 3M_f(L_f^2 r(X)^2 + r(U)^2) + L_f \varepsilon$.

Consider a positive number δ and a polyhedron $U = \cup_i U_i \subset \mathcal{U}$ where $U_i = \text{conv}(u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^{q_i})$ such that $r(U_i) \leq \delta$ and $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_\delta(U)$.

Given a polyhedron $X \subset \mathcal{X}$, let $\mathcal{P}(X)$ be a new polyhedron defined by the following procedure.

1. Split X into convex polyhedra as $X = \cup_i X_i$ where $X_i = \text{conv}(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{p_i})$ and $r(X_i) \leq \delta$.
2. Let $Y_{ij} = \text{conv}\{f^{-1}(x_r, u_s) : r = 1, 2, \dots, p_i, s = 1, 2, \dots, q_j\}$.
3. Let $\mathcal{P}(X) = \cup_{i,j} Y_{ij}$.

The following is the main result.

Theorem. Consider a polyhedron $X_T \subset \mathcal{X}_T$ such that $\mathcal{X}_T \subset \mathcal{O}_\varepsilon(X_T)$ and define a sequence of polyhedra X_0, X_1, \dots, X_{T-1} by

$$X_k = \mathcal{P}(X_{k+1}). \quad (20)$$

Then X_0 is an estimation of the controllability region \mathcal{C} of the system (4) under constraints (5)–(7) in the sense that

$$X_0 \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(X_0) \quad (21)$$

where

$$\varepsilon = L_f^T (L_f^T - 1) (L_f - 1)^{-1} (3M_f(L_f^2 + 1)\delta^2 + L_f \delta). \quad (22)$$

The theorem gives an explicit finite algorithm to construct a lower estimation of the controllability region with any given accuracy ε . It has been verified numerically in two-dimensional examples.

References

- [1] T. Hu, Z. Lin, L. Qiu, “An explicit description of null controllable regions of linear systems with saturating actuators”, *Systems & Control Letters*, 47, 65–78 (2002).
- [2] R. Genesio, M. Tartaglia, A. Vicino, “On the Estimation of Asymptotic Stability Regions: State of the Art and New Proposals”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30, No. 8, 747–755 (1985).

Zonotopes, linear inequalities and polyhedral projection

Деменков М.Н.

max.demenkov@gmail.com

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Профсоюзная ул. 65,
Москва, 117997, Россия

Зонотопы, линейные неравенства и проектирование полиэдров

Зонотопы — выпуклые многогранники, являющиеся проекциями многомерного куба [1]:

$$\mathbf{Z}(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^n : z = z_0 + Hw, \|w\|_\infty \leq 1\}, w \in \mathbb{R}^m, n \leq m. \quad (1)$$

Матрица $H = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ содержит столбцы-генераторы $h_i \in \mathbb{R}^n$. Будем предполагать что H содержит базис \mathbb{R}^n . Условимся также, что по отношению к полигону “проекция” означает геометрическое место всех его точек при действии на них некоторого аффинного оператора, а по отношению к точке — ближайшую к ней точку в пределах некоторого полигонов. Все векторы по умолчанию предполагаются столбцовыми, а скалярное произведение x и y записывается как $x^T y$.

Зонотоп может быть определен также как сумма Минковского конечного числа отрезков на прямых, заданных векторами h_i , $i = \overline{1, m}$. Ребра зонотопа оказываются параллельны векторам h_i , а нормали к граням максимальной размерности — ортогональны набору из $n - 1$ векторов h_i , образующих базис \mathbb{R}^{n-1} . Можно записать систему неравенств, описывающих $\mathbf{Z}(0)$ (см. [2,3]):

$$\pm d_j^T z \leq \sum_{i=1}^m d_j^T h_i \text{sign}(d_j^T h_i), \quad j = \overline{1, N}, \quad N = \binom{m}{n-1}, \quad (2)$$

для ее построения выполняется перебор всех возможных комбинаций $n - 1$ векторов h_i и поиск ортогональных им векторов d_j (для корректного описания симметричного относительно начала координат зонотопа необходимо включить противоположные по направлению вектора d_j). Если записать систему (2) в виде $Dz \leq g$, вполне очевидно что $\mathbf{Z}(z_0) = \{z : Dz \leq g + z_0 D\}$.

Все вершины зонотопа являются образами каких-либо вершин исходного куба (некоторые из них при этом будут отображаться внутрь зонотопа). При наличии нормали к грани d_j инцидентные этой грани вершины z_{0jk} зонотопа $\mathbf{Z}(0)$ можно определить по следующей формуле:

$$z_{0jk} = \sum_{i=1}^m h_i s_{ij}, \quad s_{ij} = \begin{cases} \text{sign}(d_j^T h_i), & d_j^T h_i \neq 0, \\ \pm 1, & d_j^T h_i = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В данной формуле для h_i , ортогональных d_j , необходимо перебрать все возможные комбинации как $+1$, так и -1 в качестве значений s_{ij} , поэтому $k \leq 2^M$, где M — количество h_i таких, что $d_j^T h_i = 0$. Очевидно, что вершины $\mathbf{Z}(z_0)$ вычисляются простой трансляцией вершин $\mathbf{Z}(0)$: $z_{jk} = z_0 + z_{0jk}$.

Таким образом, в отличие от многогранника общего вида для двойного описания зонотопа (т.е. как с помощью набора вершин, так и системой линейных неравенств [4]) можно применять специфические для этого случая алгоритмы. Так, можно вычислять вектора d_j с помощью аналитических формул [5] с участием миноров матрицы, составленной из набора $n - 1$ векторов h_i . Отметим, что вычисления d_j могут быть легко распараллелены. Двойное описание в данном случае необходимо для исключения избыточных неравенств в (2) и вершин в (3). К приложениям зонотопов относятся, например, задачи оценки областей достижимости и управляемости динамических систем [3,6] и областей распределения моментов в системах управления полетом [2].

В [7] Фуджисиге и др. предложен новый проекционный метод решения задачи линейного программирования (ЛП) вида

$$\min c^T x \text{ при } Ax = b, \|x\|_\infty \leq 1. \quad (4)$$

Данную задачу можно переформулировать с учетом (1) как

$$\min \gamma : l(\gamma) = \begin{bmatrix} b \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbf{Z}(0), \quad H = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Теперь мы ищем минимальную по γ точку пересечения прямой $l(\gamma)$ и зонотопа \mathbf{Z} . Алгоритм LP-Newton, предложенный в [7], решает задачу за конечное число шагов. Весьма похожий алгоритм предложен позднее также в [8] для другой задачи, а в [9] метод [7] был распространен на общий случай ЛП с проекцией на конус. В начале работы алгоритма выполняется проекция произвольной внешней по отношению к зонотопу точки, принадлежащей прямой $l(\gamma)$, на зонотоп. Затем ищется точка пересечения прямой с плоскостью, касательной к поверхности уровня квадратичной функции расстояния в точке проекции (авторы работы [7] проводят аналогии с методом Ньютона для поиска корней системы уравнений, отсюда название метода). Затем все операции повторяются с новой точкой.

В работах С.Н. Черникова [10] предлагался метод решения задачи ЛП, основанный на последовательном исключении переменных из системы ограничений (с добавленным к ним неравенством, соответствующим целевой функции). В дальнейшем решение задачи ЛП может быть полу-

чено обратной подстановкой в неравенства, из которых последовательно исключены различные переменные. Исключение переменных в общем случае выполняется алгоритмом Фурье-Моцкина [11], который по сути является алгоритмом проектирования полиэдра (ПП) на подпространство. В [12] показано что с помощью ПП может быть получено решение задачи ЛП в замкнутой форме (т.е. в виде набора аффинных функций от заданных параметров). В теории автоматического управления ПП использовалось для синтеза регулятора с одновременным поиском полиэдральной функции Ляпунова [13]. В [14,15] исследовался отличный от алгоритма Фурье-Моцкина алгоритм ПП, использующий идею “обертывания” полиэдрального множества гиперплоскостью. В [16] показано, что задачи многокритериального ЛП и ПП эквивалентны, и для решения последней можно использовать алгоритмы для первой, в частности алгоритм Бенсона (основывающийся на методе отсекающих плоскостей, см. <http://bensolve.org>). Алгоритмы ПП [14,15,16] опираются на решение задач ЛП. В последней работе [17] показана эквивалентность ПП и задачи д.с. программирования с полиэдральными функциями. Интересным приложением алгоритмов проектирования полиэдра являются также автоматические методы распараллеливания компьютерных программ [18].

В настоящем докладе на основе комбинации идеи из [6] и представления зонотопа в виде (2) предлагается алгоритм исключения переменных из системы неравенств на основе процедуры явного конструирования зонотопа при наличии интервальных ограничений на все переменные. Рассмотрим систему неравенств вида

$$Ax \leq b, \quad Ax = A_1x_1 + A_2x_2, \quad A = [A_1 \ A_2], \quad x = [x_1^T \ x_2^T]^T, \quad \|x\|_\infty \leq 1, \quad (6)$$

здесь исключаемые переменные содержатся в векторе x_1 . Проекция заданного (6) полиэдра

$$P_{x_2} = \{x_2 : \exists x_1, \quad A_1x_1 + A_2x_2 \leq b, \quad \|x_1\|_\infty \leq 1, \quad \|x_2\|_\infty \leq 1\}, \quad (7)$$

т.е. для любого $x_2 \in P_{x_2}$ найдется x_1 такой, что вместе эти два вектора удовлетворяют системе неравенств (6). Так, например, для любого многоугольника на плоскости его проекция — это отрезок.

Для того, чтобы привести систему ограничений в (6) к виду (1), введем (аналогично приему, использующемуся в симплекс-методе ЛП) дополнительные переменные, собранные в вектор y :

$$Ax + y = b. \quad (8)$$

Обозначим через a_i строку матрицы $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$ с элементами a_{ij} и соответствующие ей компоненты векторов y и b как y_i и b_i . Вначале можем

удалить из (6) все неравенства $a_i^T x \leq b_i$, для которых

$$\max_{\|x\|_\infty \leq 1} a_i^T x \leq b_i, \quad \max_{\|x\|_\infty \leq 1} a_i^T x = \sum_{j=1}^q |a_{ij}|. \quad (9)$$

Для оставшихся неравенств

$$a_i^T x + y_i = b_i, \quad y_i \in [0, b_i - \min_{\|x\|_\infty \leq 1} a_i^T x], \quad \min_{\|x\|_\infty \leq 1} a_i^T x = - \sum_{j=1}^q |a_{ij}|.$$

В результате сможем привести систему (6) к виду

$$A_1 x_1 + C y = -A_2 x_2 + b + y^*, \quad w = [x_1^T \ y^T]^T, \quad \|w\|_\infty \leq 1, \quad (10)$$

здесь C — диагональная матрица с компонентами, соответствующими ширине интервалов для y_i , а y^* — вектор центральных значений интервалов для y_i . Теперь возьмем в (1) $H = [A_1 \ C]$, $z_0 = 0$. Построим систему неравенств (2) в виде $Dz \leq g$ при $z = -A_2 x_2 + b + y^*$. Тогда полиэдр P_{x_2} определен следующей системой неравенств: $-DA_2 x_2^* \leq g - D(b + y^*)$, $\|x_2\|_\infty \leq 1$.

В докладе будет также представлен небольшой пакет в среде Matlab, разработанный автором для работы с зонотопами и доступный по адресу <https://github.com/mdemenkov/zonotopes>.

Автор благодарен Б.Т. Поляку за постановку задачи разработки алгоритма проекции полиэдра на Традиционной молодежной школе по оптимизации и управлению на оз. Сенеж в 2013 г.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Циглер Г.М., *Теория многогранников*, М.: МЦНМО (2014).
- [2] Demenkov M., *Geometric algorithms for input constrained systems with application to flight control*, PhD thesis, De Montfort University (2008). [Электронный ресурс]: URL: <https://www.dora.dmu.ac.uk/handle/2086/4950> (Дата обращения: 15.02.17)
- [3] Althoff M., Stursberg O., Buss M., “Computing reachable sets of hybrid systems using a combination of zonotopes and polytopes”, *Nonlinear analysis: hybrid systems*. 4, 233-249 (2010).
- [4] Золотых Н.Ю., “Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 52, No. 1, 153-163 (2012).
- [5] Acharyya A., Maharata K., Al-Hashimi B.M., “Algorithm and architecture for n-D vector cross-product computation”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 59, No. 2, 812-826 (2011).

- [6] Girard A., Le Guernic C., Maler O., “Efficient computation of reachable sets of linear time-invariant systems with inputs”, *Hybrid Systems: Computation and Control*, Vol. 3927 in LNCS, 257-271 (2006).
- [7] Fujishige S., Hayashi T., Yamashita K., Zimmermann U., “Zonotopes and the LP-Newton method”, *Optimization and engineering*, 10, 193-205 (2009).
- [8] Helmling M., Ruzika S., “Towards combinatorial LP turbo decoding”, *Proc. of IEEE International Symposium on Information Theory*, IEEE Press, 1491-1495 (2013).
- [9] Kitahara T., Mizuno S., Shi J., “The LP-Newton method for standard form linear programming problems”, *Operations Research Letters*, 41, 426-429 (2013).
- [10] Черников С.Н., *Линейные неравенства*, М.: Наука (1968).
- [11] Бастрakov С.И., Золотых Н.Ю., “Быстрый способ проверки правила Черникова в методе исключения Фурье-Моцкина”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 55, No. 1, 165-172 (2015).
- [12] Jones C.N., Kerrigan E.C., Maciejowski J.M., “On polyhedral projection and parametric programming”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 138, No. 2, 207-220 (2008).
- [13] Blanchini F., Miani S., *Set-theoretic methods in control*, Birkhäuser Boston (2008).
- [14] Jones C.N., Kerrigan E.C., Maciejowski J.M., *Equality set projection: a new algorithm for the projection of polytopes in halfspace representation*, Technical Report CUED/F-INFENG/TR.463, ETH Zurich (2004). [Электронный ресурс]: URL: https://infoscience.epfl.ch/record/169768/files/resp_mar_04_15.pdf (Дата обращения: 15.02.17)
- [15] Tiwary H.R., *Complexity of some polyhedral enumeration problems*, Ph.D. Thesis, Saarland University (2008).
- [16] Löhne A., Weißing B., “Equivalence between polyhedral projection, multiple objective linear programming and vector linear programming”, *Mathematical Methods of Operations Research*, 84, No. 2, 411-426 (2016).
- [17] Löhne A., Wagner A., “Solving DC programs with a polyhedral component utilizing a multiple objective linear programming solver”, arXiv:1610.05470 (2017)
- [18] Bastoul C., “Code generation in the polyhedral model is easier than you think”, *Proc. of IEEE Intl. Conf. on Parallel Architectures and Compilation Techniques (PACT'04)*, 7-16 (2004).

Improper Faces of Convex Compact Sets in the Context of Galois Duality

Федотов В.П.

vphedotov@narod.ru

НИУ ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

Face of a face of a convex compact is called improper if it is not a face of this compact. The faces of various ranks form a system of closed sets by Galois. Improper faces are the cause of the instability of the solution of the lexicographic problem in the convex programming.

Несобственные грани выпуклых компактов в контексте двойственности Галуа

Хотя соответствующая классификация типов точек была построена ещё Фаваром [1], термин «грань» в этом контексте впервые появляется в трактате Бурбаки [3]. К великому сожалению, именно в нужном фрагменте трактата допущена серьёзная ошибка, на которую автор указал в статье [4]: введённое Бурбаки отношение сопряжённости граней оказалось несимметричным. По этой же причине классы Бурбаки не всегда совпадают с классами Фавара. Из-за того, что текст давней статьи [4] не выложен в интернете, сам факт ошибки Бурбаки оказался неизвестен молодому поколению математиков, что чревато некорректным использованием.

Десятилетия спустя стали понятны глубинные причины этой ошибки. У Бурбаки [3] под гранями понимаются только грани первого ранга (определение см. ниже). Их совокупность не всегда образует систему замкнутых в смысле Галуа подмножеств, что и послужило причиной ошибки.

Напротив, грани различных рангов такую систему образуют. Самый простой способ убедиться в этом – рассмотреть наряду с выпуклым компактом его поляру. Тогда между их гранями различных рангов удаётся установить взаимно однозначное соответствие.

Трагическая гибель Галуа стала причиной того, что его гениальная работа [2] получила известность и признание только спустя десятилетия. Но если теория Галуа уже заняла достойное место в составе высшей алгебры, то о приоритете Галуа в части понятий замыкания и двойственности до сих пор не знают даже многие профессиональные математики. Между тем, требование замкнутости единиц классификации – непременное условие её корректности. Оно относится не только к задачам классификации в математике, но и далеко за её пределами, в частности, в биологии, гуманитарных и социальных науках. Примером может служить

работа натуралиста в экспедиции. Обнаружив новое для себя растение, он пытается найти его место в каталоге. С этой целью он сверяет признаки найденного растения с представленными в каталоге. Здесь возможны три принципиально различных случая.

Первый, когда найденное растение уже присутствует в каталоге. Учёный находит его и устраняет пробел лишь в собственных знаниях.

Во втором случае наступает момент, когда очередной проверяемый признак может принимать разные значения. При этом несколько из них зафиксированы в каталоге, но все они существенно отличаются от значения этого же признака у найденного растения. Прежде всего, учёный должен убедиться в неслучайности отличия (например, цвет мог резко измениться из-за наличия в почве аномального количества какого-либо металла и т.п.). За этим исключением, скорее всего, речь пойдёт об открытии нового вида.

Интереснее всего третий случай. Он отличается от первого лишь тем, что, найдя нужное место в каталоге, учёный не соглашается с рекомендованным выводом. Тогда учёный сам должен будет сформулировать недостающий в каталоге признак: чем именно найденное растение отличается от представленного в каталоге, с которым оно совпало по всей цепочке признаков.

Рассмотрим теперь множество животных (растений или иных объектов), для которых мы хотим построить «хорошую» классификацию. Выделив какое-либо их подмножество, мы можем составить список всех их общих свойств.

Затем мы можем найти новое множество, содержащее все объекты с выписанными свойствами. Так как все прежние объекты обладали нужными свойствами, то они обязательно войдут в новое множество. Однако, к нему могут добавиться и какие-то другие объекты. Если это случится, то считаем прежнее множество незамкнутым, а новое множество назовём его замыканием. А если ничего не добавилось (т.е. новое множество совпадает с прежним), то считаем прежнее множество замкнутым (так как его замыкание совпадает с ним самим).

Аналогичным образом можно поступить и с множествами свойств. «Чудо» состоит в том, что верна теорема Галуа: двойственное к любому множеству заведомо является замкнутым. Поэтому нет никакого смысла применять переход к двойственному множеству более двух раз подряд, а операцию замыкания – более одного раза.

Переложение оригинальной конструкции Галуа на язык появившейся значительно позднее теории множеств Кантора с примерами, относящимися к линейной алгебре, аффинной геометрии, конусам и теории выпуклых тел, можно найти в статье [5]. Там же обстоятельно детализи-

ровано определение граней различных рангов. Опустив третьюстепенные подробности, повторим здесь его основные шаги.

Границы первого ранга – это пересечения выпуклого компакта с его опорными гиперплоскостями. Только они считаются гранями у Бурбаки [3].

Легко понять, что грань тоже является выпуклым компактом. Поэтому появляется возможность рассматривать грани граней, которые мы назовём гранями второго ранга, а затем аналогично вводим грани более высоких рангов.

Если коразмерность выпуклого компакта конечна, то ранг грани не может превзойти её. В частности, в евклидовом пространстве ранг грани не превышает размерности пространства.

Одно и то же подмножество выпуклого компакта может одновременно оказаться его гранью с разными значениями ранга. Если все эти значения больше 1, то такую грань назовём несобственной.

Рассмотрим теперь одну из задач выпуклого программирования: поиск экстремума линейной целевой функции на выпуклом и компактном множестве допустимых планов. Её решением является соответствующая грань первого ранга. Если найденная грань не сводится к единственной точке, то уместно ввести вторую целевую функцию и искать её экстремум на найденной грани. Если и на втором шаге не будет достигнута единственность оптимального плана, то можно ввести третью целевую функцию и т. д. Такая постановка задачи носит название лексикографической. Ясно, что её решениями станут подходящие грани соответствующих рангов.

Важным свойством экстремальных задач является устойчивость их решений по отношению к “незначительному” изменению исходных данных. Из анализа свойств несобственных граней легко понять, что в лексикографической задаче, как правило, нет никаких оснований ожидать устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Favard J., “Sur les corps convexes”, *Journ. Math. Pures appl.*, 9:12, Paris, (1933), p. 219–282.
- [2] Galois E., Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux (1830). — В сб. Галуа Э., Сочинения. М.-Л.: Гостехиздат, (1936).
- [3] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. — М., ИЛ, (1959).
- [4] Федотов В.П. “Понятие грани выпуклого компакта”, *Украин. Геом. Сб.*, 21 (1978), с. 131–141.

- [5] Федотов В.П. “Двойственность в теории выпуклых тел как частный случай двойственности Галуа”, Современное научное знание: теория, методология, практика, Издательский Центр “Наукосфера”, Смоленск (2017), с. 183–185.

Polyhedral Trend in Modern Control Theory

Филимонов Н.Б.

nbfilimonov@mail.ru

МГУ им. М.В. Ломоносова, ГСП-1, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия

Полиэдральный тренд в современной теории управления

За более чем полувековой период своего существования негладкий анализ (НГА) и возникшая одновременно недифференцируемая оптимизация (НДО) превратились в самостоятельный раздел современной прикладной математики. В последние десятилетия вопросы НГА и НДО привлекают все большее внимание специалистов в области теории автоматического управления, где в постановках задач прогрессирует тенденция к более адекватному описанию управляемых процессов путем освобождения от традиционных предположений о гладкости. В докладе обсуждается генезис, логика становления и особенности методологии одного из перспективных направлений современной теории управления, в основе которого лежат конструкции выпуклого анализа [1] – *полиэдральной оптимизации* (ПО) *процессов управления* [2-4].

1. Генезис методологии полиэдральной оптимизации процессов управления

В современной теории управления доминирует методология квадратичной оптимизации (КО) процессов управления, основанная на интегрально-квадратичных критериях качества. При этом чрезвычайной популярности методологии КО способствовали ее очевидные достоинства: внешняя простота, законченность и аналитичность решения. Однако, основы теории КО часто подвергались резкой критике известными отечественными и зарубежными учеными, включая самих ее основоположников Р. Калмана и А.М. Летова. Данная критика обусловлена, прежде всего, отсутствием у оптимизируемых квадратичных критериев качества процессов управления ясного физического смысла: они играют лишь роль формального инструмента, позволяющего для оптимизации использовать достаточно простой математический аппарат КО.

Интерес к задачам выпуклой негладкой и, частности, полиэдральной, оптимизации возник еще в XVIII-XIX вв. в работах по аналитической механике и теории линейных неравенств. В 1854 г. П.Л. Чебышевым при исследовании преобразования возвратно-поступательного движения во

вращательное в паровой машине Дж. Уатта впервые была выдвинута идея минимаксного критерия качества движения вида

$$\min_p \max_{t \in [0, T]} |f(t) - x(p, t)|,$$

исследовавшегося затем в рамках НДО в работах В.Ф. Демьянова, В.И. Малоземова, А.М. Гупала, Л.В. Васильева, Н.З. Шора, В.И. Норкина, Е.А. Нурминского, Б.Т. Поляка, А.М. Рубинова, И.В. Коннова и др. (см., например, [5]).

Применительно к системам автоматического управления данный критерий имеет смысл максимальной динамической ошибки и именуется *критерием равномерного приближения* или просто *критерием Чебышева*. Впервые, по-видимому, чебышевский критерий был рассмотрен в задаче Б.В. Булгакова о максимальном отклонении линейной системы [6]. В задаче синтеза регулятора он был выдвинут независимо В.В. Соловьевым и А.А. Фельдбаумом [7, 8] как критерий перерегулирования. Применение чебышевского критерия качества к простейшим задачам оптимального управления было рассмотрено в работах Р. Беллмана, И. Гликберга и О. Гросса [9]. Наиболее удачные попытки развития данного критерия были предприняты в работах А.А. Первозванского (см. [10] и [11], стр. 475-478). Впоследствии особую важность критерия Чебышева для прикладных задач управления неоднократно подчеркивали практически все известные отечественные авторы: Е.А. Барбашин, Н.Н. Красовский, Н.Н. Моисеев, А.Б. Куржанский, Ю.С. Осипов, Я.З. Цыпкин, В.А. Якубович, А.И. Пропой, В.Ф. Демьянов, А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин, К.А. Лурье, Р.П. Федоренко, В.А. Троицкий, А.И. Субботин, А.Г. Ченцов, В.М. Кейн, А.Е. Барабанов, О.Н. Граничин, С.Ф. Соколов, Б.Т. Поляк, Э.Я. Рапопорт, А.Ф. Шориков и др. Однако, несмотря на ясный физический смысл и практическую значимость, чебышевский критерий так и не получил широкого применения в автоматике.

2. Основные конструкции полиэдрального формализма

Рассмотрим класс динамических объектов управления, описываемых линейным векторным разностным уравнением состояния:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

где $\mathbf{A} : \mathfrak{I} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ и $\mathbf{B} : \mathfrak{I} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times r}$ — функциональные матрицы, $t \in \mathfrak{I}$ — дискретное время; $\mathfrak{I} = [0, T-1] \subset \mathbf{Z}_+$ — интервал управления, причем $T \geq 1$; $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{P}(t) \subseteq \mathbf{X} = \mathbf{R}^n$ — вектор состояния; $\mathbf{u} = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_r) \in \mathbf{E}(t) \subseteq \mathbf{U} = \mathbf{R}^r$ — вектор управляющих переменных (здесь $\mathbf{P}(t), \mathbf{E}(t)$ — полиэдры); $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ — выход объекта, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$; \mathbf{X} — пространство состояний; \mathbf{Z}_+ — множество неотрицательных целых чисел.

Здесь и далее *полиэдром* [1] будем называть множество решений конечной системы линейных неравенств.

Полиэдральный формализм оптимизации процессов управления охватывает все ключевые элементы в постановке задачи управления: цели управления, критерий оптимальности, фазовые и ресурсные ограничения на управляемые движения. При этом в основе данного формализма лежат полиэдральные функции и полиэдральные нормы.

Полиэдральная функция $f : \mathbf{X} = \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ - это функция, надграфик которой является выпуклым полигоном. Важнейшим конструктивным свойством любой полиэдральной функции $f(\mathbf{x})$ является возможность ее представления в виде функции дискретного максимума:

$$f(\mathbf{x}) = \max \{\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_N(\mathbf{x})\}, \varphi_i(\mathbf{x}) = b_i + \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle,$$

$$b_i \in \mathbf{R}, \mathbf{a}_i \in \mathbf{X}, i = \overline{1, N}.$$

Полиэдральная норма - это норма, являющаяся полиэдральной функцией координат. К классу полиэдральных норм относятся, например, октаэдрическая (равномерная) или кубическая (чебышевская) нормы:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

3. Полиэдральные критерии качества процессов управления

Конструкции критериев качества процессов управления должны комплексно отражать характер движения объекта к целевому полиэдральному множеству \mathbf{X}^* с точки зрения динамического качества управляемых движений и ресурсных затрат. Введем в рассмотрение величины:

$$\varepsilon(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t), \Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}(t), \Delta\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t+1) - \mathbf{u}(t),$$

где $\mathbf{y}^*(t)$ — заданная траектория выхода, и выберем некоторые полиэдральные нормы:

$$H_\varepsilon : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}; H_{\Delta\mathbf{x}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}; H_{\mathbf{u}} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}; H_{\Delta\mathbf{u}} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Тогда свойство процесса управления в текущий момент времени можно характеризовать показателями точности управления $H_\varepsilon(\varepsilon(t)), H_{\Delta\mathbf{x}}(\Delta\mathbf{x}(t))$ и затрат на управление $H_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t)), H_{\Delta\mathbf{u}}(\Delta\mathbf{u}(t))$, имеющими *полиэдральную структуру*. В качестве примера можно взять следующие полиэдральные показатели точности управления $P(t)$ и затрат на управление $E(t)$:

$$P(t) = \max\{\lambda_\varepsilon(t)H_\varepsilon(\varepsilon(t)), \lambda_{\Delta\mathbf{x}}(t)H_{\Delta\mathbf{x}}(\Delta\mathbf{x}(t))\},$$

$$E(t) = \max\{\lambda_{\mathbf{u}}(t)H_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t)), \lambda_{\Delta\mathbf{u}}(t)H_{\Delta\mathbf{u}}(\Delta\mathbf{u}(t))\},$$

где $\lambda_\varepsilon(t) \geq 0, \lambda_{\Delta\mathbf{x}}(t) \geq 0, \lambda_{\mathbf{u}}(t) \geq 0, \lambda_{\Delta\mathbf{u}}(t) \geq 0$ — весовые коэффициенты, которые, в частности, могут иметь вид степенных функций: $C_\nu t^\nu, \nu \in \mathbf{Z}_+, C_\nu = \text{const}$.

Из введенных точностных и ресурсных показателей можно формировать различные *полиэдральные критерии качества процесса управления*, например, следующего вида:

- полиэдральный терминальный критерий (*майеровского* типа):

$$F_M = P(T),$$

- полиэдральные интегральные критерии (*лагранжевого* типа):

$$F_L = \max_{t \in [1, T]} P(t) + \max_{t \in [0, T-1]} E(t),$$

- полиэдральные смешанные критерии (*больцевского* типа):

$$F_B = F_M + F_L.$$

4. Задача полиэдральной оптимизации процессов управления

Общая задача ПО дискретных процессов управления заключается в нахождении управляющего воздействия $\mathbf{u}(t)$, обеспечивающего достижение целевого множества и оптимального по критерию

$$F(X, U) \rightarrow \min, F : \mathbf{X} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R},$$

где $U = \{\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(T-1)\}$ — программа управления и $X = \{\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(T)\}$ — порожденная им фазовая траектория движения объекта.

Специфика задачи ПО процессов управления состоит в том, что все ее компоненты имеют полиэдральную структуру, т.е. функции $H(\mathbf{x}), P(\mathbf{x})$, $E(\mathbf{u})$ и $F(X, U)$ являются полиэдральными функциями, а алгоритмизация управления основана на вычислительных методах линейного программирования. Для организации управления по принципу обратной связи целесообразно воспользоваться стратегией *программно-позиционного управления* — формировать гибкие, циклически обновляемые (в частности, на каждом такте) программы управления, идея которых (использование программной, т.е. разомкнутой стратегии управления для реализации позиционной, т.е. замкнутой стратегии управления) высказывалась еще в работе Дж.Е. Бертрама и Р.Е. Сарачика [12].

На основе полиэдральной методологии удается успешно решать ряд задач оптимизации процессов управления с учетом фазовых и ресурсных ограничений, включая задачи управления и наблюдения в условиях неопределенности в штатных, конфликтных и критических ситуациях [4].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рокафеллар Р., *Выпуклый анализ*, М.: Мир (1973).
- [2] Филимонов Н.Б. “Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы”, *Мехатроника, автоматизация, управление*, №. 12, 2-11 (2010).
- [3] Филимонов Н.Б. “Оптимизация дискретных процессов управления по полиэдральным критериям качества”, *Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение*, №. 1, 20-38 (2000).
- [4] Филимонов Н.Б. “Методы полиэдрального программирования в дискретных задачах управления и наблюдения”, *Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в 5-и тт. Т. 5. Методы современной теории автоматического управления*, Гл. 7, 647-720, М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана (2004).
- [5] Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н., *Введение в минимакс*, М.: Наука (1972).
- [6] Булгаков Б.В. “О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами”, *ДАН СССР*, 51, №. 5, 339–342 (1946).
- [7] Солодовников В.В. “Проблемы качества и динамической точности в теории автоматического регулирования”, *Тр. Второго Всесоюз. совещ. по ТАР. Т. II. Проблема качества и динамической точности в ТАР*, М.-Л.: Изд-во АН СССР, 7-37 (1955).
- [8] Фельдбаум А.А. “К вопросу о синтезе оптимальных систем автоматического регулирования”, *Тр. Второго Всесоюз. совещ. по ТАР. Т. II. Проблема качества и динамической точности в ТАР*, М.-Л.: Изд-во АН СССР, 325-360 (1955).
- [9] Bellman R., Glicksberg I., Gross O. “Some nonclassical problems in the calculus of variations”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7, №. 1, 87-94 (1956).
- [10] Первозванский А.А. “О минимуме максимального отклонения управляемой линейной системы”, *Изв. АН СССР. ОТН. Механика*, №. 2 (1965).
- [11] Первозванский А.А., *Курс теории автоматического управления*, М.: Наука (1986).
- [12] Бергтрам Дж.Е., Сарачик Р.Е. “Об оптимальном управлении с применением вычислительных устройств”, *Тр. Первого междунар. конгр. ИФАК по автоматическому управлению*, М.: Изд-во АН СССР (1960).

AUTHOR INDEX**B**

- Balashov M. 272
 Balykina Yu. 101
 Barbagallo A. 181
 Baskov O. 185
 Bayandina A. 13
 Bianco G. 181
 Bure V. 104, 107

C

- Chistyakov S. 188, 212

D

- Dempe S. 15
 Dinh N. 15
 Dolgopolik M. 17, 21
 Dutta J. 15
 Dvurechensky P. 13

E

- Ershov D. 191

F

- Fradkov A. 21

G

- Gabidullina Z. 274, 278
 Gasnikov A. 13
 Gromova E. 196
 Gubar E. 110
 Gwinner J. 113

K

- Kamal A. 247
 Khachay M. 280
 Konnov I. 23, 199
 Korovkin M. 136
 Kosolap A. 27
 Koulaguin V. 29
 Krylatov A. 116

- Kumacheva S. 110
 Kuzyutin D. 202

L

- Laptin Yu. 31
 Lezhnina E. 101
 Li X. 119
 Liu H. 122

M

- Malakhova A. 196
 Marova E. 196
 Mazalov V. 206
 Michaylov A. 124
 Michaylov V. 124
 Minarchenko I. 44
 Mitrofanova O. 104
 Murzabekova G. 124

N

- Nastych M. 209
 Nikitina M. 202
 Noghin V. 127, 185

O

- Orekhov A. 33

P

- Pandey R.K. 249
 Pandit T. 15
 Pankratova Ya. 212
 Pardalos P. 38
 Parilina E. 206
 Patel V. 248
 Petrosian O. 209
 Petrosyan L. 212
 Polyakova L. 283
 Ponomarev A. 285
 Popova M. 283
 Provorotov V. 129

S

- Sedakov A. 206
 Semenov V. 39
 Senov A. 134
 Shavidze G. 101
 Shen Z. 119, 122
 Shirokolobova A. 116
 Shulgina O. 52
 Singh H. 249
 Singh S. 250
 Singh V. 248, 250
 Sotnikova M. 136
 Staroverova K. 107
 Strekalovsky A. 44

V

- Vasetsov M. 188
 Veremey E. 136
 Vorontsova E. 48

W

- Wang H. 119, 122, 141
 Wang Ya. 141

Y

- Yarullin R. 52
 Yin L. 215

Z

- Zabotin I. 52
 Zakharov V. 116
 Zhadan V. 55
 Zhitkova E. 110
 Zhu X. 141

A

- Аббасов М.Э. 176
 Алферов Г.В. 149
 Атинк Д.К. 158

Б

- Баймурзина Д.Р. 178
 Балыкина Ю.Е. 153

- Булгакова М.А. 220
 Бутырский Е.Ю. 251

В

- Васильев В.В. 251

Г

- Гасников А.В. 178
 Гасникова Е.В. 178
 Головкина А.Г. 144
 Гхашим М.М. 257

Д

- Двуреченский П.Е. 178
 Деменков М.Н. 288
 Добрынин В.Ю. 153
 Дудов С.И. 254

Е

- Ерохин В.И. 60
 Ершов Е.И. 178
 Ефимова П.А. 149

Ж

- Жук В.В. 259, 262
 Жуковский В.И. 224, 229
 Журбенко Н.Г. 63

З

- Заботин И.Я. 66
 Зоркальцев В.И. 68, 264
 Зыкина А.В. 146, 158

И

- Иванов Г.Г. 149
 Измельцев И.В. 243

К

- Казаева К.Е. 66
 Камалов М.В. 153
 Канева О.Н. 146, 158
 Колесин И.Д. 161
 Королев В.С. 168

- Кудинович И.В. 144
Кудрявцев К.Н. 224, 229
- Л**
Лагуновская А.А. 178
Лебедев В.Н. 231
Лебедев П.Д. 163
Ложкин А. 233
- М**
Малафеев О.А. 237
Малозёмов В.Н. 167, 257, 270
Мезенцев Ю.А. 74, 79
Михеев С.Е. 83, 87
- Н**
Новоселов В.С. 168
- О**
Осипцев М.А. 254
- П**
Петров Н.Н. 240
Петросян Л.А. 220
Плоткин А.В. 167, 270
Понкратова К.И. 251
Просолупов Е.В. 99, 176
- Р**
Рединских Н.Д. 237
- С**
Солодуша С.В. 92
Стабулит И.С. 229
Степлюк П.И. 95, 173
- Т**
Тамасян Г.Ш. 99, 176
Тумка О.А. 262
- У**
Успенский А.А. 163
Ухоботов В.И. 243
- Ушаков В.Н. 163
- Ф**
Федотов В.П. 293
Филимонов Н.Б. 296
- Ч**
Чумаков А.А. 99, 176
- Э**
Эстрайх И.В. 79

Научное издание

**КОНСТРУКТИВНЫЙ НЕГЛАДКИЙ АНАЛИЗ
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ**

Тезисы докладов международной конференции

Часть вторая

Компьютерная верстка: Г.Ш. Тамасян

Эмблема конференций CNSA разработана в 2012 году
В. Ф. Демьяновым и Ю. Ю. Пупышевой