СПбГУ, ПМ-ПУ
Фоминых
Александр Владимирович

# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ЗАКРЕПЛЁННЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ

# I. Постановка задачи

- Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x,t),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

- Для начала поставим задачу нахождения решения дифференциального включения (1) с начальным условием (2) (задача со свободным правым концом)

# II. Сведение к задаче безусловной оптимизации

- Перепишем дифференциальное включение в виде

$$(\dot{x}, \psi) \leqslant c(F, \psi), \quad t \in [0, T], \ \psi \in R^n, \ ||\psi|| = 1.$$

- Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$ и введём функции

$$\ell(\psi, z, t) = (z, \psi) - c(F, \psi),$$

$$h(z, t) = \max_{\psi \in S} \max\{0, \ell(\psi, z, t)\}.$$

- Составим функционал

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2(z, t) dt. \qquad (3)$$

- Введём множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0,T] \mid \varphi(z) = 0\}.$$

- Нетрудно видеть, что

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \ (z \in \Omega), \text{ если } (\dot{x}, \psi) \leqslant c(F, \psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0,T], \\ \varphi(z) > 0 \ (z \notin \Omega), \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

- Если $z^*$ является точкой глобального минимума ф-ла (3), то

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

является решением задачи (1), (2).

# III. Дифференциальные свойства и условия минимума ф-ла φ(z)

Теорема 1. *Если опорная функция* $c(F, \psi)$ *многозначного отображения* $F(x, t)$ *непрерывно дифференцируема по фазовой переменной* $x$, *то функционал* $\varphi$ *дифференцируем по Гато и его градиент в точке* $z$ *находится по формуле*

$$\nabla\varphi(z) = h(z, t)\psi^*(t) - \int_t^T h(z, \tau)\frac{\partial c(F(x, \tau), \psi^*(\tau))}{\partial x} d\tau. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для того чтобы точка* $x^*$ *удовлетворяла включению (1) и условию (2) необходимо, чтобы*

$$0_n = h(z^*, t)\psi^*(t) - \int_t^T h(z^*, \tau)\frac{\partial c(F(x^*, \tau), \psi^*(\tau))}{\partial x} d\tau, \tag{5}$$

*где* $0_n$ — *нулевой элемент пространства* $P_n[0, T]$. *Если оказалось* $\varphi(z^*) = 0$, *то условие* (5) *также является достаточным.*

# IV. Задача с закреплённым правым концом

- Пусть в исходной задаче (1), (2) помимо начального условия задано также условие на правом конце

$$x(T) = x_T. \tag{6}$$

- Поставим задачу нахождения решения дифференциального включения (1)
с начальным условием (2) и конечным условием (6)

- Составим функционал

$$I(z) = \frac{1}{2}\Big[\int_0^T h^2(z,t)dt + \big(x_0 + \int_0^T z(t)dt - x_T\big)^2\Big] = \\ = \varphi(z) + \chi(z). \tag{7}$$

# V. Дифференциальные свойства и условия минимума ф-ла I(z)

- Если $z^*$ является точкой глобального минимума ф-ла (7), то

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau)d\tau$$

является решением задачи (1), (2), (6)

Теорема 3. *Для того чтобы точка $x^*$ удовлетворяла включению (1) и условиям (2), (6) необходимо, чтобы*

$$0_n = \nabla\varphi(z^*) + \nabla\chi(z^*) = \tag{8}$$

$$h(z^*,t)\psi^*(t) - \int_t^T h(z^*,\tau)\frac{\partial c(F(x^*,\tau),\psi^*(\tau))}{\partial x}d\tau + x_0 + \int_0^T z(t)dt - x_T.$$

*Если оказалось $I(z^*) = 0$, то условие (8) также является достаточным.*

# VI. Алгоритм решения

- Фиксируем произвольную точку $z_1 \in P_n[0,T]$.
- Пусть уже построена точка $z_k \in P_n[0,T]$.
- Если выполнено условие минимума (8), то точка $z_k$ является стационарной точкой функционала I, и процесс прекращается.
- В противном случае положим $z_{k+1} = z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)$.
- Величина $\gamma_k$ является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma > 0} I\big(z_k - \gamma \nabla I(z_k)\big) = I\big(z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)\big).$$

- Тогда $I(z_{k+1}) \leqslant I(z_k)$.
- Алгоритм сходится в следующем смысле

$$\big|\big|\nabla I(z_k)\big|\big|_{L_n^2[0,T]} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

# VII. Примеры

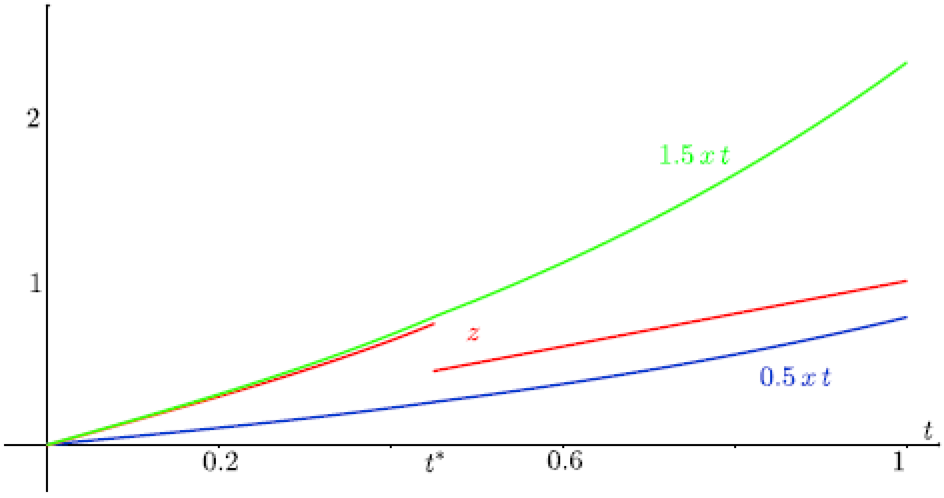
- Пример 1

$$\dot{x} \in F(x,t), \quad F(x,t) = [0.5xt, 1.5xt], \quad t \in [0,1],$$

$$x(0) = 1.$$

$$c(F,\psi) = xt(\psi + 0.5|\psi|),\ \frac{\partial c}{\partial x} = t(\psi + 0.5|\psi|).$$

$z_1 = 1$, тогда $x_1 = t + 1$, количество итераций = 3.



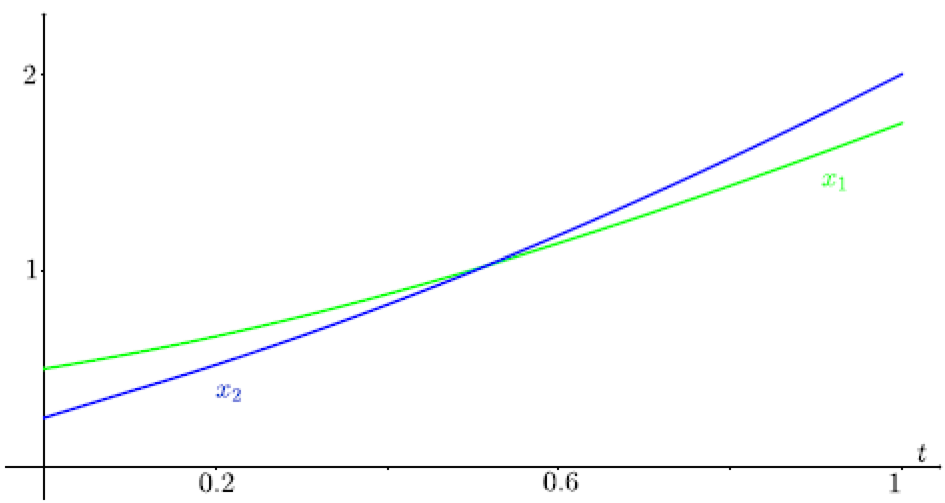
- Пример 2

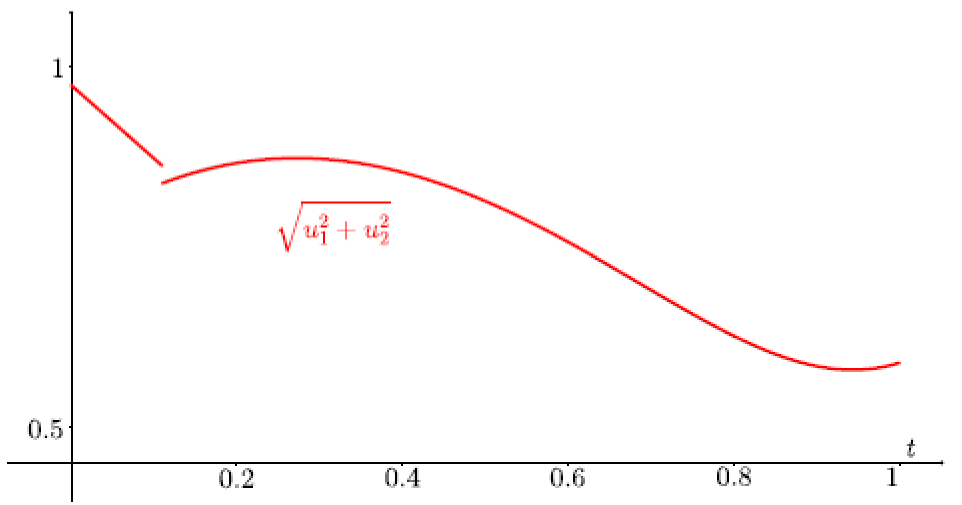
$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B, \quad t \in [0,1],$$

$$x(0) = (0.5, 0.25)', \quad x(1) = (1.75, 2)'. \qquad B = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\}$$

$$c(F,\psi) = x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}, \ \frac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, \psi_1)'.$$

$z_1 = (2,1)'$, тогда $x_1 = (0.5 + 2t, 0.25 + t)'$, количество итераций = 4.




$$u_1(t) = z_1(t) - x_2(t), \ u_2(t) = z_2(t) - x_1(t).$$

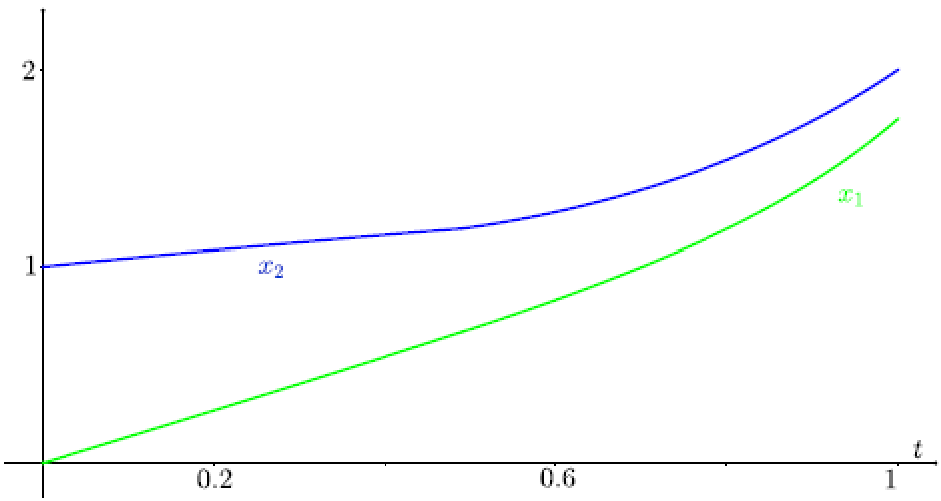
- Пример 3

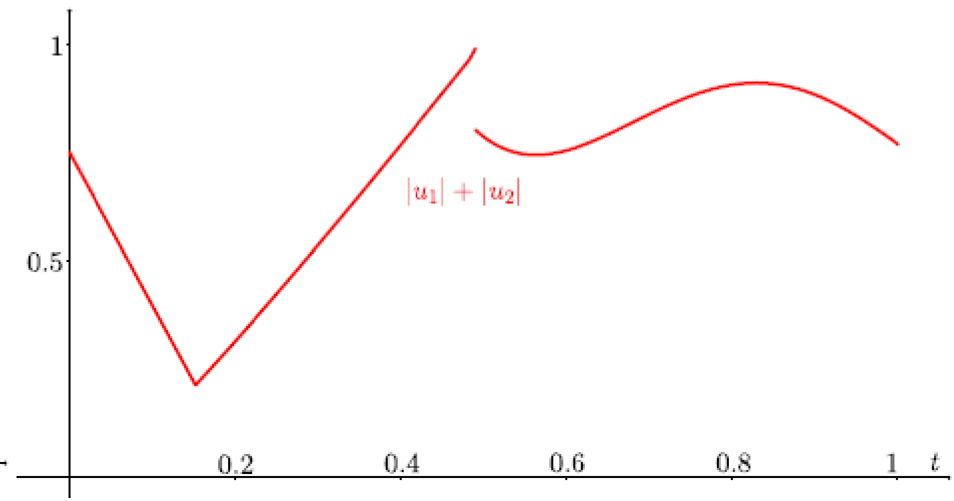
$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + R, \quad t \in [0,1],$$

$$x(0) = (0,1)', \quad x(1) = (1.75, 2)'. \qquad R = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant 1\}$$

$$c(F, \psi) = x_2^2\psi_1 + 2x_1\psi_2 + \max\{|\psi_1|, |\psi_2|\}, \ \frac{\partial c}{\partial x} = (2\psi_2, 2x_2\psi_1)'.$$

$z_1 = (1,1)'$, тогда $x_1 = (t, 1+t)'$, количество итераций = 13.




$$u_1(t) = z_1(t) - x_2^2(t), \ u_2(t) = z_2(t) - 2x_1(t).$$

# Спасибо за внимание!

# Литература


1. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.

2. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.

3. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высш. шк., 2005. 335 с.

4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.