Международная конференция CNSA-2017
(Санкт-Петербург, 22–27 мая 2017 г.)

М. Гхашим, В. Малозёмов

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ НАИЛУЧШЕГО ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Вначале рассмотрим случай наилучшего линейного приближения.
Пусть $u_1, \dots, u_n, f$ — функции, заданные и непрерывные на некотором компактном множестве $D \subset \mathbb{R}^d$. Введём обобщённый полином

$$P(x,t) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k(t)$$

и рассмотрим задачу наилучшего приближения функции f:

$$\max_{t \in D} \bigl| P(x,t) - f(t) \bigr| \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} . \qquad (1)$$

Чтобы избежать лишних технических трудностей, перейдём к дискретному варианту задачи (1). Для этого введём на множестве D сетку $\{t_j\}_{j=1}^{N}$, $N \geqslant n+1$, и перейдём к сеточной задаче

$$\max_{j\in 1:N}\left|P(x,t_j)-f(t_j)\right| \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}. \qquad (2)$$

Обозначив $u_{kj}=u_k(t_j)$, $f_j=f(t_j)$, перепишем задачу (2) в виде

$$\varphi(x) := \max_{j\in 1:N}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k u_{kj} - f_j\right| \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}. \qquad (3)$$

Именно эту задачу мы и будем рассматривать.

Назовём базисом любое подмножество $J \subset 1:N$, состоящее из $n+1$ индексов, и рассмотрим частные задачи

$$\varphi(x;J) := \max_{j\in J}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k u_{kj} - f_j\right| \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}. \qquad (4)$$

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

Справедливо равенство

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\varphi(x) = \max_{J\subset 1:N}\min_{x\in\mathbb{R}^n}\varphi(x;J). \qquad (5)$$

Наибольшая трудность возникает при доказательстве неравенства

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) \leqslant \max_{J \subset 1:N} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x; J) \tag{6}$$

(обратное неравенство тривиально). Блестящее доказательство неравенства (6), опирающееся на теорему Хелли о пересечении выпуклых множеств, предложил Л. Г. Шнирельман (1938).

Напомним формулировку теоремы Хелли.
Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана конечная совокупность выпуклых множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, из которых любые $n+1$ множеств имеют общую точку. Тогда

$$\bigcap_{j=1}^{N} \Omega_j \neq \varnothing.$$

Обратимся к доказательству неравенства (6). Прежде всего, отметим, что задача наилучшего приближения на любом базисе J имеет решение. Обозначим

$$\mu = \max_{J \subset 1:N} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x, J)$$

и введём в $\mathbb{R}^n$ выпуклые множества

$$\Omega_j = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \Big| \sum_{k=1}^{n} x_k u_{kj} - f_j \Big| \leqslant \mu \Big\}, \quad j \in 1:N.$$

Любые $n+1$ из них имеют общую точку, так как каждому базису J можно сопоставить вектор x со свойством

$$\max_{j\in J}\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k u_{kj} - f_j\Big| = \min_{x\in\mathbb{R}^n}\varphi(x, J) \leqslant \mu.$$

По теореме Хелли существует общая точка x^* для всех Ω_j, т. е.

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k^* u_{kj} - f_j\Big| \leqslant \mu \quad \forall j \in 1:N.$$

Отсюда следует, что $\varphi(x^*) \leqslant \mu$ и $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\varphi(x) \leqslant \mu$.

Теорема двойственности служит основой для численных методов решения задач наилучшего линейного приближения, в частности, для знаменитого алгоритма Ремеза.

Перейдём к задаче наилучшего дробно-рационального приближения. Пусть m, n — натуральные числа,

$$u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m, f$$

— функции, заданные и непрерывные на некотором компактном множестве $D \subset \mathbb{R}^d$, и

$$H(X,t) = \frac{P(A,t)}{Q(B,t)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(t)}{\sum_{i=1}^{m} b_i v_i(t)},$$

где $X = (A, B) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$. Рассмотрим сеточную задачу наилучшего приближения функции f:

$$\varphi(X) := \max_{j \in 1:N} \left| H(X, t_j) - f(t_j) \right| \to \inf_{X \in \mathbb{R}^{n+m}}. \qquad (7)$$

На коэффициенты X накладывается ограничение

$$\sigma_j Q(B, t_j) > 0, \quad j \in 1 : N, \tag{8}$$

где $\sigma = \{\sigma_j\}_{j=1}^N$ — фиксированный вектор, компоненты которого равны ± 1. Вектор σ определяет знаки знаменателя $Q(B, t)$ дроби $H(X, t)$ в узлах сетки t_j.
Множество векторов X, удовлетворяющих условию (8), обозначим $U(\sigma)$. Считаем, что $U(\sigma) \neq \varnothing$.

Назовём базисом любое подмножество $J \subset 1:N$, состоящее из $n+m$ индексов, и введём частные задачи наилучшего приближения

$$\varphi(X;J) := \max_{j\in J}\left|H(X,t_j) - f(t_j)\right| \to \inf \qquad (9)$$

при согласованном ограничении

$$\sigma_j Q(B,t_j) > 0, \quad j \in J. \qquad (10)$$

Множество векторов X, удовлетворяющих ограничению (10) задачи (9) обозначим $U(\sigma;J)$. Оно непусто.

ТЕОРЕМА

Справедливо соотношение двойственности

$$\inf_{x \in U(\sigma)} \varphi(x) = \max_{J \subset N} \inf_{x \in U(\sigma; J)} \varphi(x; J).$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в линейном случае, только вместо теоремы Хелли о пересечении выпуклых множеств используется теорема о пересечении выпуклых конусов. Приведём её формулировку.

Имеется система выпуклых конусов $\{K_j\}_{j=1}^N$, содержащихся в множестве

$$U = \Big\{ X = (A, B) \mid A \in \mathbb{R}^n, B \in \mathbb{R}^m, B \neq \mathbb{O} \Big\}.$$

Считаем, что $N \geqslant n + m$.

ТЕОРЕМА

Если любые $n + m$ конусов из системы $\{K_j\}_{j=1}^N$ имеют общую точку, то и все конусы этой системы имеют общую точку.