

**ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ
ПО ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ**

Часть первая

Под редакцией проф. В. Н. Малозёмова

**Санкт-Петербург
2017**

*Посвящается памяти
Владимира Фёдоровича Демьянова
(1938-2014)*

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА	8
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	10
ИНДЕКСНАЯ ТЕХНИКА	11
ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ	
<i>В. Н. Малозёмов</i> ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ . . .	13
<i>В. Н. Малозёмов</i> МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД	15
<i>И. В. Агафонова, В. А. Даугавет</i> ВЫРОЖДЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	25
<i>В. Н. Малозёмов</i> ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	35
<i>И. В. Романовский</i> МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ В МОДИФИЦИРОВАННОМ СИМПЛЕКС-МЕТОДЕ . . .	37
<i>В. Н. Малозёмов</i> МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ . . .	43
<i>Н. И. Наумова, Н. А. Соловьёва</i> ТЕОРЕМА БОНДАРЕВОЙ-ШЕПЛИ	52
<i>В. Н. Малозёмов</i> КОНЕЧНОМЕРНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ	59
<i>В. Н. Малозёмов</i> ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ	65
<i>В. Н. Малозёмов, Е. К. Чернэуцану</i> НАИЛУЧШЕЕ ЛИНЕЙНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ДВУХ МНОЖЕСТВ . . .	69

<i>В. Н. Малозёмов, А. В. Плоткин</i> СТРОГОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ДВУХ МНОЖЕСТВ	78
<i>А. Н. Сергеев, Н. А. Соловьёва, Е. К. Чернэуцану</i> РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СРЕДЕ MATLAB	82

ГЛАВА 2. КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

<i>В. Н. Малозёмов</i> ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	91
<i>В. Н. Малозёмов, Е. К. Чернэуцану</i> О МЕТОДЕ ПЕРЕБОРА ГРАНЕЙ В КВАДРАТИЧНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ	99
<i>В. Н. Малозёмов</i> О МЕТОДЕ СОПРЯЖЁННЫХ ГРАДИЕНТОВ	108
<i>В. Н. Малозёмов</i> ВАРИАНТЫ МЕТОДА СОПРЯЖЁННЫХ ГРАДИЕНТОВ	118
<i>В. Н. Малозёмов</i> ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИЕ В МЕТОДЕ СОПРЯЖЁННЫХ ГРАДИЕНТОВ	125
<i>В. Н. Малозёмов, Е. К. Чернэуцану</i> КВАЗИНЬЮТОНОВСКИЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ	130
<i>В. Н. Малозёмов, Е. К. Чернэуцану</i> МЕТОД СОПРЯЖЁННЫХ ГРАДИЕНТОВ В КВАДРАТИЧНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ	139
<i>В. Н. Малозёмов</i> ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОЧКИ НА ПОДПРОСТРАНСТВО И НА СТАНДАРТНЫЙ СИМПЛЕКС	150
<i>В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян</i> ЕЩЕ ОДИН БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТОЧКИ НА СТАНДАРТНЫЙ СИМПЛЕКС	158
<i>В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян</i> ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОЧКИ НА ТЕЛЕСНЫЙ СИМПЛЕКС	169
<i>В. Н. Малозёмов</i> МДМ-МЕТОДУ — 40 ЛЕТ	172

<i>В. Н. Малозёмов</i> О ЗАДАЧЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НУЛЯ НА МНОГОГРАННИК . . .	182
<i>В. Н. Малозёмов, С. Е. Михеев</i> ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ НА КОНУС НЕОТРИЦАТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ МАТРИЦ И БЛИЗКИЕ ВОПРОСЫ	187
<i>М. А. Кольцов</i> РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИЛЬВЕСТРА В МАТЛАВ	195
<i>Н. А. Соловьёва, Е. К. Чернэуцану</i> РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СРЕДЕ МАТЛАВ	200

ГЛАВА 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

<i>В. Н. Малозёмов</i> ОСНОВНАЯ ЛЕММА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	206
<i>В. Н. Малозёмов</i> ТЕОРЕМА КУНА–ТАККЕРА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ	210
<i>В. Н. Малозёмов</i> ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ТЕОРЕМОЙ КУНА–ТАККЕРА	220
<i>В. Н. Малозёмов</i> УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ	226
<i>А. В. Лазарев</i> О СООТНОШЕНИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ	233
<i>А. В. Лазарев</i> НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ	241
<i>Манлио Гаудиозо, В. Н. Малозёмов</i> ГЛОБАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ	248
<i>Н. И. Наумова</i> О СЕДЛОВЫХ ТОЧКАХ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА	255
<i>А. В. Плоткин</i> СХОДИМОСТЬ МЕТОДА СОПРЯЖЁННЫХ ГРАДИЕНТОВ ДЛЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ	260

<i>М. В. Долгополук</i>	ОПТИМАЛЬНЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ	267
<i>М. Э. Аббасов</i>	МЕТОД ЗАРЯЖЕННЫХ ШАРИКОВ	278
<i>М. Э. Аббасов</i>	НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ГЛАДКИМИ КРИВЫМИ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ	290
<i>М. А. Кольцов</i>	ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЛИПСОИДА: АЛГОРИТМ ШОРА	297
<i>М. А. Кольцов</i>	ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЛИПСОИДА: АЛГОРИТМ ХАЧИЯНА	306
<i>М. А. Кольцов, А. В. Плоткин</i>	НАХОЖДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В МАТЛАВ	317

ГЛАВА 4. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

<i>В. Н. Малозёмов</i>	КВАДРАТИЧНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ	326
<i>В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян</i>	ОБ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ	346
<i>В. Н. Малозёмов</i>	ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА	357
<i>В. Н. Малозёмов</i>	НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ПРОСТЕЙШЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	364
<i>В. Н. Малозёмов</i>	ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТРОГОГО ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА В КЛАССИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ	375
<i>М. В. Долгополук</i>	ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПО ФРЕШЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА	381

<i>В. Н. Малозёмов</i> О МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ	387
<i>Г. Ш. Тамасян</i> ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ СПУСК В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ	393
<i>М. В. Долгополук</i> СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКА В КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	402

ГЛАВА 5. РАЗНОЕ

<i>В. Н. Малозёмов</i> НЕРАВЕНСТВА И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ	413
<i>В. Н. Малозёмов</i> СТУДЕНТЫ РЕШАЮТ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ...	424
<i>В. Н. Малозёмов</i> ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ . . .	435
<i>А. В. Плоткин</i> МИНИМИЗАЦИЯ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ	445
<i>В. Н. Малозёмов</i> НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОГО МАКСИМУМА	451
<i>В. Г. Малинов, Н. А. Соловьёва</i> ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВАРИАНТЫ НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА	457
<i>В. Н. Малозёмов, А. В. Плоткин</i> ЛИПШИЦЕВА НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ . . .	461
<i>М. Э. Аббасов, В. Н. Малозёмов</i> НЕУЛУЧШАЕМАЯ ЛОКАЛЬНАЯ КОНСТАНТА ЛИПШИЦА ДЛЯ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ	464
СПИСОК АВТОРОВ КНИГИ	468

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Основу данной книги составили общий и специальные курсы лекций по экстремальным задачам, которые читались мной в разные годы (в течение пятидесяти лет) на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского (Ленинградского) государственного университета. Общий курс «Экстремальные задачи» слушали студенты 3-го курса отделения прикладной математики и информатики, специальные курсы читались студентам старших курсов кафедры исследования операций. Чаще всего специальные курсы имели такие названия:

- «Численные методы нелинейного программирования»,
- «Чебышёвские приближения»,
- «Численные методы нелинейных чебышёвских приближений»,
- «Элементарные методы в экстремальных задачах».

К указанным источникам добавлены избранные доклады семинара по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации («CNSA & NDO») и некоторые доклады семинара по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию («DNA & CAGD»). В целом затронут широкий круг экстремальных задач как классического, так и неклассического типа.

Книга состоит из двух частей. Первая часть (главы 1–5) связана с общим курсом «Экстремальные задачи». Рассматриваются классические экстремальные задачи — линейные, квадратичные, нелинейные и вариационные. Вторая часть (главы 6, 7) посвящена негладким экстремальным задачам и чебышёвским приближениям.

Книга оформлена в виде отдельных лекций (докладов), которые можно читать практически независимо. Такой стиль поможет читателям, интересующимся конкретными вопросами, и студентам, готовящимся к экзаменам.

Список использованной литературы имеется в конце каждой лекции. Часто цитируемая книга

- Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

содержит основы теории экстремальных задач. В качестве общего источника информации по экстремальным задачам можно рекомендовать замечательный двухтомник:

- Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Часть первая: Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. М.: Изд-во МЦНМО, 2011. 620 с.
- Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Часть вторая: Оптимизация в функциональных пространствах. Регуляризация. Аппроксимация. М.: Изд-во МЦНМО, 2011. 433 с.

Большую работу по подготовке данной книги к печати выполнил доц. Г. Ш. Тамасян. Приношу ему свою искреннюю благодарность. Благодарю также всех соавторов книги, которые помогли мне реализовать давно задуманную идею.

Январь 2017 г.

В. Н. Малозёмов