

**ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ  
ПО ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ**

**Часть вторая**

**Под редакцией проф. В. Н. Малозёмова**

**Санкт-Петербург  
2017**

*Посвящается памяти  
Владимира Фёдоровича Демьянова  
(1938-2014)*

## Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА . . . . .	6
ГЛАВА 6. НЕГЛАДКИЕ ЗАДАЧИ	
<i>В. Н. Малозёмов</i> К ТЕОРЕМЕ О МИНИМАКСЕ . . . . .	8
<i>М. В. Долгополук</i> НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ТЕОРЕМЕ О МИНИМАКСЕ . . . . .	13
<i>В. Н. Малозёмов</i> ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ С.К. МЫШКОВА . . . . .	18
<i>Л. Н. Полякова</i> О МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ МАКСИМУМА СИЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ . . . . .	21
<i>Л. Н. Полякова</i> ГЛАДКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ . . . . .	28
<i>М. В. Долгополук</i> МЕТОД НЕСТЕРОВА МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ . . . . .	43
<i>Т. А. Ангелов</i> ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КУСОЧНО-АФФИННЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ РАЗНОСТИ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ . . . . .	56
<i>Л. Н. Полякова</i> МИНИМИЗАЦИЯ РАЗНОСТИ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ . . . . .	70
<i>Т. А. Ангелов</i> НАХОЖДЕНИЕ КРАЙНИХ ТОЧЕК СУММЫ ДВУХ ПОЛИТОПОВ . . . . .	88
<i>М. В. Долгополук</i> ТОЧНЫЕ ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ В НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ . . . . .	101
<i>М. В. Долгополук</i> ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОЧНЫХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ . . . . .	118
<i>Л. Н. Полякова</i> МЕТОД ТОЧНЫХ ШТРАФОВ: ДРУГОЙ ПОДХОД . . . . .	135

<i>А. А. Чумаков, Г. Ш. Тамасян</i> ПОИСК НАИМЕНЬШЕГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ЭЛЛИПСОИДАМИ . . . . .	150
<i>В. Н. Малозёмов, Е. К. Чернэуцану</i> СТРОГАЯ $h$ -ОТДЕЛИМОСТЬ ДВУХ МНОЖЕСТВ . . . . .	166
<i>Е. К. Чернэуцану</i> ЗАДАЧА $h$ -ОТДЕЛЕНИЯ ДВУХ МНОЖЕСТВ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ . . . . .	172
<i>В. Н. Малозёмов</i> СТАЦИОНАРНЫЕ И ЧЕБЫШЁВСКИЕ ТОЧКИ В МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧАХ . . . . .	182
<i>М. Э. Аббасов</i> ЭКЗОСТЕРЫ: ИСЧИСЛЕНИЕ, УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА, СРАВНЕНИЕ С КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ . . . . .	192
<i>М. Э. Аббасов</i> ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ СОКРАЩЕНИЯ ЭКЗОСТЕРОВ . . . . .	209
<i>М. Э. Аббасов</i> О СЛАБЫХ ЭКЗОСТЕРАХ . . . . .	225
<i>М. В. Долгополук</i> ОБОБЩЁННЫЕ ЯКОБИАНЫ И ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ НЕГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ . . . . .	232

## ГЛАВА 7. ЧЕБЫШЁВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

<i>В. Ф. Демьянов, В. Н. Малозёмов</i> ДВА ПОДХОДА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ АЛЬТЕРНАНСА . . . . .	241
<i>В. Ф. Демьянов, В. Н. Малозёмов</i> ОБ АЛЬТЕРНАНСАХ . . . . .	249
<i>В. Н. Малозёмов</i> О ПОЛНОМ АЛЬТЕРНАНСЕ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ . . . . .	255
<i>В. Н. Малозёмов</i> ЧТО ДАЁТ ИНФОРМАЦИЯ ОБ АЛЬТЕРНАНСЕ? . . . . .	259
<i>В. Н. Малозёмов, М. П. Сукач, Г. Ш. Тамасян</i> ЭТЮД НА ТЕМУ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ ЗОЛОТАРЁВА . . . . .	268
<i>В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян</i> АЛЬТЕРНАНСНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ ЗОЛОТАРЁВА . . . . .	272

<i>И. В. Агафонова, В. Н. Малозёмов</i> ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ПОЛИНОМАМИ ЗОЛОТАРЁВА . . . . .	282
<i>Г. Ш. Тамасян</i> ЭТЮД НА ТЕМУ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРОВОЙ ЗАДАЧИ ( $n = 1, 2$ ) . . . . .	294
<i>В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян</i> ЭТЮД НА ТЕМУ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРОВОЙ ЗАДАЧИ ( $n = 3$ ) . . . . .	305
<i>В. Н. Малозёмов</i> НАИЛУЧШАЯ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ . . . . .	316
<i>В. Н. Малозёмов</i> ПРИЛОЖЕНИЕ АЛЬТЕРНАНСНОЙ ТЕОРИИ: НАИЛУЧШИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ . . .	326
<i>М. М. Гхашим, В. Н. Малозёмов</i> ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ ДЛЯ КОНУСОВ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ НАИЛУЧШЕГО ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ . . . . .	339
<i>М. А. Кольцов</i> НАИЛУЧШЕЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ . . . . .	346
<i>В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян</i> О ЗАДАЧЕ АХИЕЗЕРА–ЗОЛОТАРЁВА . . . . .	351
<i>М. М. Гхашим, В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян</i> ДРОБИ ЗОЛОТАРЁВА . . . . .	362
<i>В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян</i> СИНТЕЗ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОГО ФИЛЬТРА . . . . .	371
<i>В. Н. Малозёмов</i> ПРИМЕР ДВУМЕРНОГО АЛЬТЕРНАНСА . . . . .	384
<i>В. Н. Малозёмов, А. В. Плоткин</i> ПРИМЕР НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ . . . . .	388
<i>В. Н. Малозёмов</i> СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ЛИНЕАРИЗАЦИИ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ . . . . .	401
СПИСОК АВТОРОВ КНИГИ . . . . .	408

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Основу данной книги составили общий и специальные курсы лекций по экстремальным задачам, которые читались мной в разные годы (в течение пятидесяти лет) на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского (Ленинградского) государственного университета. Общий курс «Экстремальные задачи» слушали студенты 3-го курса отделения прикладной математики и информатики, специальные курсы читались студентам старших курсов кафедры исследования операций. Чаще всего специальные курсы имели такие названия:

- «Численные методы нелинейного программирования»,
- «Чебышёвские приближения»,
- «Численные методы нелинейных чебышёвских приближений»,
- «Элементарные методы в экстремальных задачах».

К указанным источникам добавлены избранные доклады семинара по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации («CNSA & NDO») и некоторые доклады семинара по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию («DNA & CAGD»). В целом затронут широкий круг экстремальных задач как классического, так и неклассического типа.

Книга состоит из двух частей. Первая часть (главы 1–5) связана с общим курсом «Экстремальные задачи». Рассматриваются классические экстремальные задачи — линейные, квадратичные, нелинейные и вариационные. Вторая часть (главы 6, 7) посвящена негладким экстремальным задачам и чебышёвским приближениям.

Книга оформлена в виде отдельных лекций (докладов), которые можно читать практически независимо. Такой стиль поможет читателям, интересующимся конкретными вопросами, и студентам, готовящимся к экзаменам.

Список использованной литературы имеется в конце каждой лекции. Часто цитируемая книга

- Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

содержит основы теории экстремальных задач. В качестве общего источника информации по экстремальным задачам можно рекомендовать замечательный двухтомник:

- Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Часть первая: Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. М.: Изд-во МЦНМО, 2011. 620 с.
- Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Часть вторая: Оптимизация в функциональных пространствах. Регуляризация. Аппроксимация. М.: Изд-во МЦНМО, 2011. 433 с.

Большую работу по подготовке данной книги к печати выполнил доц. Г. Ш. Тамасян. Приношу ему свою искреннюю благодарность. Благодарю также всех соавторов книги, которые помогли мне реализовать давно задуманную идею.

Январь 2017 г.

*В. Н. Малозёмов*