

В. Н. Малозёмов

С. М. Машарский

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ
МЕТОДЫ
В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ
ЗАДАЧАХ**

Санкт-Петербург

2020

УДК 519.85, 372.851

Малозёмов В. Н., Машарский С. М.

Элементарные методы в экстремальных задачах.
— СПб.: Издательство ВВМ, 2020. — 160 с. — 37 рис.

В книге рассматриваются экстремальные задачи (задачи о наибольших и наименьших величинах), решение которых можно получить с помощью неравенств. Интерес представляют не только сами неравенства, но и условия, при которых неравенство выполняется как равенство. Именно эти условия позволяют найти решение экстремальной задачи. Широко используются неравенства между классическими средними величинами и неравенство Йенсена для строго выпуклых функций. От читателя требуется знание основ дифференциального исчисления функций одной переменной до производной второго порядка включительно.

Для учащихся старших классов физико-математических школ и студентов младших курсов математических факультетов университетов и педагогических вузов.

Содержание

Предисловие	5
Основные обозначения	7
1 Классические геометрические задачи	8
Дополнительные задачи	13
2 Параметрическая экстремальная задача	15
3 Экстремальные свойства треугольников	18
Дополнительные задачи	23
4 О центре правильного треугольника	25
5 Экстремальные алгебраические задачи	28
Дополнительные задачи	34
6 Преобразование экстремальной задачи	36
7 Разные задачи	39
8 Гипотеза Шапиро и теорема Дринфельда	46
9 Лемма Гиббса и задача Данскина	55
10 Задача Гермейера	63
Приложение А. Классические неравенства	73
1 Неравенство Коши	73
Задачи	78

2	Неравенство Коши–Буняковского	79
	Задачи	83
Приложение В. Строго выпуклые функции и нера-		
венство Йенсена 86		
1	Строго выпуклые функции	86
2	Дифференцируемые строго выпуклые функции	92
3	Неравенство Йенсена и его обращение	97
4	Взвешенные средние положительного порядка	102
	Задачи	104
Решения задач		107
Список литературы		160

Предисловие

Экстремальные задачи (задачи о наибольших и наименьших величинах) во все времена вызывали живой интерес. Для их решения разрабатывались новые методы, которые способствовали развитию математики. В постепенно формировавшейся общей теории экстремальных задач центральное место занимали необходимые условия оптимальности. Эти условия вместе с теоремой существования обычно позволяют находить решение экстремальной задачи либо в аналитическом виде, либо с помощью численных методов. В частном случае такая схема реализована в разделе 9 данной книги. В разделе 10 получено конструктивное решение экстремальной задачи без использования необходимых условий оптимальности.

Следует иметь в виду, что экстремальные задачи связаны с неравенствами. Интерес представляют не только сами неравенства, но и условия, при которых неравенство выполняется как равенство. Именно эти условия позволяют найти решение экстремальной задачи.

В данной книге рассматриваются экстремальные задачи, решение которых можно получить с помощью классических неравенств. Широко используются неравенства между средними величинами и неравенство Йенсена для строго выпуклых функций одной переменной. Необходимая информация об этих неравенствах (с полными доказательствами) приведена в двух Приложениях. От читателя требуется знание основ дифференциального исчисления функций одной переменной до производной второго порядка включительно.

Книга имеет следующую структуру. Разделы 1–6 посвящены экстремальным свойствам геометрических тел и фигур, а также алгебраических и тригонометрических выражений. В каждом из разделов 1, 3, 5 вначале приводятся решения пяти задач, а затем предлагаются 10 задач для самостоятельного решения. В разделах 2, 4, 6 рассматриваются по одной более сложной задаче. Раздел 7 содержит 40 задач разного уровня для самостоятельного решения. В разделах 8–10 анализируются три современные экстремальные задачи с интригующим содержанием.

В книгу включен раздел «Решения задач». Он содержит много оригинальных решений. Читателю рекомендуется сравнивать свои решения с решениями, предложенными в книге. Впрочем, польза будет и тогда, когда удастся просто разобраться в предложенном решении.

Занятия по элементарным методам в экстремальных задачах проводятся на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского университета с 1989 года. За это время накопился богатый материал, который послужил основой для данной книги. Кроме собственных наработок, использовались различные литературные источники. Их краткий список приведен в конце книги.

Благодарности. Авторы приносят глубокую благодарность Л. Д. Курляндчику, А. А. Третьякову, О. М. Дмитриевой, Е. Э. Ржевской, Е. К. Чернэуцану, А. В. Плоткину и Г. Ш. Тамасяну за помощь, оказанную на разных этапах работы над книгой. В частности, А. В. Плоткиным оформлены все сложные рисунки.

Ноябрь 2020 г.

В. Н. Малозёмов

С. М. Машарский