ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2007, том 47, № 4, с. 587–601

УДК 519.612

МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ПАРЫ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© 2007 г. **В. И. Ерохин**

(397160 Борисоглебск, Воронежская обл., ул. Народная, 43, Борисоглебский гос. пед. ин-т)

e-mail: erohin_v_i@mail.ru

Поступила в редакцию 21.09.2006 г.
Переработанный вариант 09.10.2006 г.

Получены необходимые и достаточные условия существования решения и его вид для задачи нахождения неизвестной матрицы, разрешающей сопряженную пару систем линейных алгебраических уравнений. Указан вид решения с минимальной евклидовой нормой, исследованы условия, при которых данное решение является одноранговой матрицей. С использованием указанных результатов исследованы две проблемы: проблема коррекции матрицы коэффициентов двойственной пары (возможно, несобственных) задач линейного программирования, обеспечивающей существование заданных решений указанных задач, и проблема коррекции матрицы коэффициентов двойственной пары несобственных задач линейного программирования по минимуму евклидовой нормы. Для первой проблемы указаны необходимые и достаточные условия существования решения и его вид. Для второй проблемы указаны редукция к задаче нелинейной условной минимизации, необходимые и достаточные условия существования решения и его вид. Приведены числовые примеры. Библ. 18.

Ключевые слова: методы решения систем линейных алгебраических уравнений, задачи линейного программирования, проблема коррекции матриц коэффициентов.

1. ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ МАТРИЦЫ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ РЕШЕНИЕМ СОПРЯЖЕННОЙ ПАРЫ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим (относительно неизвестной матрицы) систему

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ u^{\mathrm{T}}A &= v^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x, v \in \mathbb{R}^n$, $b, u \in \mathbb{R}^m$ – заданные векторы, $x \neq 0$, $u \neq 0$. Нас будут интересовать вопросы существования решения системы (1), его вид, вид матрицы, являющейся решением системы (1) с минимальной евклидовой нормой, и ее возможный ранг. Основу для ответа на указанные вопросы закладывает следующая

Теорема 1. *Система* (1) *разрешима относительно неизвестной матрицы* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$u^{\mathrm{T}}b = v^{\mathrm{T}}x = \alpha. \tag{2}$$

Решение $\hat{A}$ *указанной системы, минимальное по евклидовой норме, единственно и дается формулой*

$$\hat{A} = \frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}. \tag{3}$$

При этом

$$\|\hat{A}\|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2\|u\|^2}, \tag{4}$$

где, в зависимости от контекста, $\|\cdot\|$ *– евклидова векторная или матричная норма.*

Доказательство. 1. Покажем необходимость условия (2). Действительно, пусть при заданных x, v, b, u существует матрица A, являющаяся решением системы (1). Умножим обе части первого уравнения системы (1) слева на u^{T} и обе части второго уравнения (1) справа на x, что и даст соотношение (2):

$$u^{\mathrm{T}}Ax = u^{\mathrm{T}}b = v^{\mathrm{T}}x = \alpha.$$

2. Покажем достаточность условия (2). Для этого покажем, что в случае выполнения указанного условия матрица $\hat{A}$, задаваемая формулой (3), действительно является решением системы (1). Вначале заметим, что, в силу условий $x \neq 0$, $v \neq 0$, матрица $\hat{A}$ существует. Проверим выполнение условий $\hat{A}x = b$, $u^{\mathrm{T}}\hat{A} = v^{\mathrm{T}}$. Действительно, в силу (2) и (3),

$$\hat{A}x = \left(\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \frac{v^{\mathrm{T}}xux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right)x = b + \left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \frac{v^{\mathrm{T}}xux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right)x = b + u\frac{v^{\mathrm{T}}x}{u^{\mathrm{T}}u} - u\frac{v^{\mathrm{T}}x}{u^{\mathrm{T}}u} = b,$$

$$u^{\mathrm{T}}\hat{A} = u^{\mathrm{T}}\left(\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \frac{ux^{\mathrm{T}}u^{\mathrm{T}}b}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right) = \frac{u^{\mathrm{T}}b}{x^{\mathrm{T}}x}x^{\mathrm{T}} + v^{\mathrm{T}} - \frac{u^{\mathrm{T}}b}{x^{\mathrm{T}}x}x^{\mathrm{T}} = v^{\mathrm{T}}.$$

3. Покажем, что квадрат евклидовой нормы матрицы $\hat{A}$ действительно может быть вычислен по формуле (4). Заметим, что строки матрицы $bx^{\mathrm{T}}/x^{\mathrm{T}}x$ ортогональны строкам матрицы $\left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right)$, что следует из условия $\left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \frac{v^{\mathrm{T}}xux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right)x = 0$. Отсюда, по теореме Пифагора, получаем

$$\|\hat{A}\|^2 = \left\|\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|^2 + \left\|\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right\|^2.$$

Заметим, что матрицы $\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}$ и $\left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right) = \frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\left(v - \alpha\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right)^{\mathrm{T}}$ являются одноранговыми. Несложно показать, что евклидова норма произвольной одноранговой матрицы pq^{T}, где $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^n$, может быть вычислена по формуле $\|pq^{\mathrm{T}}\| = \|p\|\|q\|$. Поэтому имеем

$$\left\|\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\| = \|b\|\left\|\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right\| = \frac{\|b\|}{\|x\|},$$

$$\left\|\frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\left(v - \alpha\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right)^{\mathrm{T}}\right\| = \left\|\frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\right\|\left\|v - \alpha\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|,$$

а также

$$\left\|\frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\right\| = \frac{1}{\|u\|},$$

$$\left\|v - \alpha\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|^2 = v^{\mathrm{T}}v - 2\alpha\frac{v^{\mathrm{T}}a}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{\alpha^2}{x^{\mathrm{T}}x} = v^{\mathrm{T}}v - \frac{\alpha^2}{x^{\mathrm{T}}x} = \|v\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2},$$

откуда и получаем формулу (4).

4. Покажем, что среди всех возможных решений системы (1) матрица $\hat{A}$, и только она, имеет минимальную евклидову норму. Если матрица $\hat{A}$ – единственное решение системы (1), то указанное утверждение тривиально. Предположим, что матрица $\hat{A} + \Delta A$, где $\Delta A \neq 0$, также является решением системы (1). Очевидно, что в этом случае строки матрицы ΔA должны быть ортогональны вектору x, а столбцы матрицы ΔA – вектору u. Кроме того, $\Delta A \neq 0 \Rightarrow \|\Delta A\| > 0$. Но тогда,

в силу теоремы Пифагора, имеем

$$\|\hat{A}+\Delta A\|^2 = \left\|\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|^2 + \left\|\left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right) + \Delta A\right\|^2 = \left\|\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|^2 + \left\|\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right\|^2 + \|\Delta\hat{A}\|^2 =$$

$$= \|\hat{A}\|^2 + \|\Delta A\|^2 \Rightarrow \|\hat{A}\|^2 < \|\hat{A}+\Delta A\|^2.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если система (1) разрешима относительно неизвестной матрицы A, то семейство указанных матриц описывается формулой

$$A = \hat{A} + \Delta A, \tag{5}$$

где $\hat{A}$ – матрица с минимальной евклидовой нормой, задаваемая формулами (2), (3), $\Delta A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – произвольная матрица такая, что

$$u^{\mathrm{T}}\Delta A = 0, \quad \Delta Ax = 0. \tag{6}$$

Следствие 2. Справедливо неравенство

$$\mathrm{rank}\hat{A} \le 2. \tag{7}$$

Доказательство. Утверждение (7) следует из того, что матрицу $\hat{A}$ можно представить в виде суммы двух одноранговых матриц:

$$\hat{A} = \left(b - \frac{\alpha}{u^{\mathrm{T}}u}u\right)\frac{x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} = \frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\left(v^{\mathrm{T}} - \frac{\alpha}{x^{\mathrm{T}}x}x^{\mathrm{T}}\right).$$

В то же время известно (см., например, [1]), что $\mathrm{rank}(A + B) \le \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$. Утверждение (7) доказано.

Следствие 3. Если матрица $\hat{A}$ существует и выполняются условия

$$b = 0, \quad v \ne 0 \tag{8}$$

или

$$b \ne 0, \quad v = 0, \tag{9}$$

то справедливо равенство

$$\mathrm{rank}\hat{A} = 1. \tag{10}$$

Доказательство. Поскольку матрица $\hat{A}$ существует, то выполняется условие (2). Из (2) и (8) или (9) следует, что $\alpha = 0$. Поэтому, в силу (3) и (8), имеем

$$\hat{A} = \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} \ne 0,$$

а в силу (3) и (9) получаем

$$\hat{A} = \frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} \ne 0.$$

В обоих случаях матрица $\hat{A}$ отвечает условию (10).

Следствие 4. Если $b = 0$ и $v = 0$, то матрица $\hat{A}$ существует и является нулевой.

Теорема 2. *Если $b \ne 0$ и $v \ne 0$, то для того чтобы матрица $\hat{A}$ (решение системы (1) с минимальной евклидовой нормой) существовала и была одноранговой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий*:

$$v = \frac{u^{\mathrm{T}}b}{x^{\mathrm{T}}x}x \tag{11}$$

или

$$b = \frac{v^{\mathrm{T}}x}{u^{\mathrm{T}}u}u. \tag{12}$$

При этом

$$\hat{A} = \frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}, \quad \|\hat{A}\| = \frac{\|b\|}{\|x\|}, \ \textit{если} \ v = \frac{u^{\mathrm{T}}b}{x^{\mathrm{T}}x}x,$$

$$\hat{A} = \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u}, \quad \|\hat{A}\| = \frac{\|v\|}{\|u\|}, \ \textit{если} \ b = \frac{v^{\mathrm{T}}x}{u^{\mathrm{T}}u}u, \tag{13}$$

$$\hat{A} = \frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} = \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u}, \quad \|\hat{A}\| = \frac{\|b\|}{\|x\|} = \frac{\|v\|}{\|u\|}, \ \textit{если} \ v = \frac{u^{\mathrm{T}}b}{x^{\mathrm{T}}x}x \ \textit{и} \ b = \frac{v^{\mathrm{T}}x}{u^{\mathrm{T}}u}u.$$

Доказательство. 1. Покажем, что множество одноранговых матриц, являющихся решением системы (1) при условии $b \neq 0$ и $v \neq 0$, состоит из единственной матрицы

$$\tilde{A} = \frac{1}{\alpha}bv^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

Действительно, пусть матрица вида pq^{T}, где $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^n$ – некоторые векторы, является решением системы (1). Тогда выполняются условия $pq^{\mathrm{T}}x = b$ и $u^{\mathrm{T}}pq^{\mathrm{T}} = v^{\mathrm{T}}$ и, в силу теоремы 1, условие (2). Но $b \neq 0 \Rightarrow q^{\mathrm{T}}x \neq 0$, $v \neq 0 \Rightarrow u^{\mathrm{T}}p \neq 0$, в силу чего

$$pq^{\mathrm{T}} = \frac{1}{q^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}p}bv^{\mathrm{T}} = \beta bv^{\mathrm{T}}, \quad \beta \neq 0.$$

Но тогда выполняются условия $\beta v^{\mathrm{T}}xb = b$ и $\beta u^{\mathrm{T}}bv^{\mathrm{T}} = v^{\mathrm{T}}$, откуда следует, что $v^{\mathrm{T}}x \neq 0$ и $u^{\mathrm{T}}b \neq 0$. Но тогда, в силу (2), $\alpha \neq 0$, и, с учетом приведенных выше выкладок,

$$\beta = \frac{1}{v^{\mathrm{T}}x} = \frac{1}{u^{\mathrm{T}}b} = \frac{1}{\alpha},$$

что и завершает обоснование формулы (14).

2. Покажем, что матрицы $\hat{A}$ и $\tilde{A}$ совпадают тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий (11) или (12). Как уже упоминалось выше, в силу теоремы 1, необходимым и достаточным условием существования как матрицы $\hat{A}$, так и матрицы $\tilde{A}$, является условие (2). Несложно заметить, что при выполнении хотя бы одного из условий (11) или (12) условие (2) выполняется, т.е. матрицы $\hat{A}$ и $\tilde{A}$ существуют. Исследуем выполнение условия $\hat{A} - \tilde{A} = 0$. В силу (3) и (14) имеем

$$\hat{A} - \tilde{A} = 0 \Leftrightarrow \frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u} - \frac{1}{\alpha}bv^{\mathrm{T}} = 0 \Leftrightarrow \left(b - \alpha\frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\right)\left(\frac{x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} - \frac{1}{\alpha}v^{\mathrm{T}}\right) = 0.$$

Полученное соотношение позволяет утверждать, что матрицы $\hat{A}$ и $\tilde{A}$ совпадают тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

$$b - \alpha\frac{u}{u^{\mathrm{T}}u} = 0 \tag{15}$$

или

$$\frac{x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} - \frac{1}{\alpha}v^{\mathrm{T}} = 0. \tag{16}$$

Но, в силу соотношения (2), условие (15) равносильно условию (12), а условие (16) – условию (11).

3. Обоснуем соотношения (13). Истинность формул для $\hat{A}$ проверяется непосредственной подстановкой соотношений (2), (11) и (12) в формулу (3). Истинность формул для $\|\hat{A}\|$ вытекает из формул для $\hat{A}$ и уже упоминавшегося при доказательстве теоремы 1 равенства $\|pq^{\mathrm{T}}\| = \|p\|\|q\|$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Можно показать, что в совокупности теорема 2 и следствие 3 теоремы 1 исчерпывающе описывают все возможные случаи, когда решение системы с минимальной евклидовой нормой представляет собой одноранговую матрицу.

2. ПРОБЛЕМА КОРРЕКЦИИ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДВОЙСТВЕННОЙ ПАРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЙ СУЩЕСТВОВАНИЕ ЗАДАННЫХ НЕНУЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ

Результаты, полученные в предыдущем разделе, позволяют обратиться к исследованию проблем коррекции матриц коэффициентов двойственных пар задач линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме $L(A, b, c)$:

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad c^{\mathrm{T}}x \longrightarrow \max,$$

и соответствующую двойственную задачу линейного программирования в основной форме $L^*(A, b, c)$:

$$u^{\mathrm{T}}A \geq c^{\mathrm{T}}, \quad b^{\mathrm{T}}u \longrightarrow \min,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – заданная матрица, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ – заданные векторы. Пусть

$$\mathbf{X}(A, b) \triangleq \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \text{ и } \mathbf{U}(A, c) \triangleq \{u \mid u^{\mathrm{T}}A \geq c^{\mathrm{T}}\}$$

суть допустимые множества этих задач,

$$\hat{\mathbf{X}}(A, b, c) \triangleq \operatorname*{Argmax}_{x \in \mathbf{X}(A, b)} c^{\mathrm{T}}x, \quad \hat{\mathbf{U}}(A, b, c) \triangleq \operatorname*{Argmin}_{u \in \mathbf{U}(A, c)} b^{\mathrm{T}}u$$

суть множества решений этих задач.

Предположим, что задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ являются несобственными (род их несобственности специально не оговаривается) или являются собственными, но их решения не устраивают лицо, принимающее решения. Рассмотрим проблему:

$$\begin{gathered}\text{найти } H \text{ такую, что}\\ \hat{x} \in \hat{\mathbf{X}}(A + H, b, c), \quad \hat{u} \in \hat{\mathbf{U}}(A + H, b, c),\\ \hat{x} \neq 0, \quad \hat{u} \neq 0,\end{gathered} \tag{17}$$

т.е. проблему такой коррекции матрицы коэффициентов двойственной пары задач $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$, при которой указанные задачи оказываются собственными и некоторые заданные ненулевые векторы $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ принадлежат множествам их решений.

Заметим, что, в силу классических результатов теории двойственности (см., например, [2]–[4]), задачи $L(A + H, b, c)$ и $L^*(A + H, b, c)$ являются собственными тогда и только тогда, когда не пусты их допустимые области, т.е. когда $\mathbf{X}(A + H, b) \neq \varnothing$ и $\mathbf{U}(A + H, c) \neq \varnothing$. При этом, как известно, для произвольных векторов $x \in \mathbf{X}(A + H, b)$, $u \in \mathbf{U}(A + H, c)$ выполняется условие $c^{\mathrm{T}}x \leq b^{\mathrm{T}}u$, а векторы $\hat{x}$ и $\hat{u}$ являются оптимальными (т.е. $\hat{x} \in \hat{\mathbf{X}}(A + H, b, c)$, $\hat{u} \in \hat{\mathbf{U}}(A + H, b, c)$) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\hat{x} \in \mathbf{X}(A + H, b), \quad \hat{u} \in \mathbf{U}(A + H, c), \quad c^{\mathrm{T}}\hat{x} = b^{\mathrm{T}}\hat{u}.$$

Но из условия $\hat{x} \in \mathbf{X}(A + H, b)$ следует, что система линейных алгебраических уравнений

$$H\hat{x} = b - A\hat{x} \tag{18}$$

разрешима относительно матрицы H. Аналогично, из условия $\hat{u} \in \mathbf{U}(A + H, c)$ следует, что относительно матрицы H разрешима система линейных неравенств $\hat{u}^{\mathrm{T}} H \geq c^{\mathrm{T}} - \hat{u}^{\mathrm{T}} A$. Известным стандартным приемом – введением неотрицательного вектора $d \in \mathbb{R}^n$, указанная система линейных неравенств приводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\hat{u}^{\mathrm{T}} H = c^{\mathrm{T}} + d^{\mathrm{T}} - \hat{u}^{\mathrm{T}} A. \tag{19}$$

Несложно заметить, что системы (18) и (19) являются сопряженными и, таким образом, для решения задачи (17) применима задача нахождения матричного решения сопряженной пары систем линейных алгебраических уравнений, рассмотренная в предыдущем разделе, дополненная рядом условий. В частности, следует учесть условие (2), рассмотренное в теореме 1. В контексте задачи (17) оно принимает вид

$$\hat{u}^{\mathrm{T}}(b - A\hat{x}) = (c^{\mathrm{T}} + d^{\mathrm{T}} - \hat{u}^{\mathrm{T}}A)\hat{x} = \alpha,$$

а с учетом условия $c^{\mathrm{T}}\hat{x} = b^{\mathrm{T}}\hat{u}$ может быть записано в виде

$$\begin{gathered} c^{\mathrm{T}}\hat{x} = b^{\mathrm{T}}\hat{u} = \gamma, \\ d^{\mathrm{T}}\hat{x} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Очевидно, что в силу (20) имеем

$$\alpha = \gamma - \hat{u}^{\mathrm{T}} A \hat{x}. \tag{21}$$

Кроме того, не забываем выписать условия

$$\hat{x} \ge 0, \quad d \ge 0. \tag{22}$$

Теперь, опираясь на теорему 1 и ее следствие (см. (2)–(6)), можно утверждать, что справедлива

Лемма 1. *Решение проблемы* (17) – *матрица* $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – *существует тогда и только тогда, когда выполняются условия* (20)–(22), *и имеет вид*

$$H = \hat{H} + \Delta H, \tag{23}$$

где

$$\hat{H} = (b - A\hat{x})\frac{\hat{x}^{\mathrm{T}}}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}} + \frac{\hat{u}}{\hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u}}(c^{\mathrm{T}} + d^{\mathrm{T}} - \hat{u}^{\mathrm{T}}A) - \alpha\frac{\hat{u}\hat{x}^{\mathrm{T}}}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}\hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u}}, \tag{24}$$

$\Delta H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – *произвольная матрица такая, что*

$$\Delta H\hat{x} = 0, \tag{25}$$

$$\hat{u}^{\mathrm{T}}\Delta H = 0. \tag{26}$$

При этом

$$\|H\|^2 = \|\hat{H}\|^2 + \|\Delta H\|^2, \tag{27}$$

где

$$\|\hat{H}\|^2 = \frac{\|b - A\hat{x}\|^2}{\|\hat{x}\|^2} + \frac{\|c + d - A^{\mathrm{T}}\hat{u}\|^2}{\|\hat{u}\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|\hat{x}\|^2\|\hat{u}\|^2}. \tag{28}$$

Следствие. Если проблема (17) разрешима, а вектор d является решением задачи квадратичного программирования

$$\|c + d - A^{\mathrm{T}}\hat{u}\|^2 \longrightarrow \min_{d \ge 0,\, d^{\mathrm{T}}\hat{x} = 0}, \tag{29}$$

то матрица $\hat{H}$, задаваемая формулой (24), является единственным решением проблемы (17) с минимальной евклидовой нормой.

Доказательство. Из формул (20)–(22), (24) и (28) следует, что при фиксированных A, b, c, $\hat{x}$ и $\hat{u}$ матрица $\hat{H}$ определена единственным образом с точностью до вектора d, а задача минимизации ее евклидовой нормы сводится к задаче (29). В свою очередь, задача (29) имеет единственное решение в силу выпуклости своей допустимой области и строгой выпуклости целевой функции.

Замечание 2. Очевидно, что к проблеме (17) применимы не только теорема 1 и ее следствие, но и теорема 2. Т.е., $\operatorname{rank}\hat{H} \le 2$ и $\operatorname{rank}\hat{H} = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

$$c + d - A^{\mathrm{T}}\hat{u} = \frac{\hat{u}^{\mathrm{T}}(b - A\hat{x})}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}}\hat{x} \tag{30}$$

или

$$b - A\hat{x} = \frac{(c^{\mathrm{T}} + d^{\mathrm{T}} - \hat{u}^{\mathrm{T}}A)}{\hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u}}\hat{u} = \frac{(c^{\mathrm{T}} - \hat{u}^{\mathrm{T}}A)}{\hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u}}\hat{u}. \tag{31}$$

При этом

$$\begin{gathered}
\hat{H} = \frac{(b - A\hat{x})\hat{x}^{\mathrm{T}}}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}}, \quad \|\hat{H}\| = \frac{\|b - A\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}, \quad \text{если выполняется (30),} \\
\hat{H} = \frac{\hat{u}(c^{\mathrm{T}} + d^{\mathrm{T}} - \hat{u}^{\mathrm{T}}A)}{\hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u}}, \quad \|\hat{H}\| = \frac{\|c + d - A\hat{u}\|}{\|\hat{u}\|}, \quad \text{если выполняется (31),} \\
\hat{H} = \frac{(b - A\hat{x})\hat{x}^{\mathrm{T}}}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}} = \frac{\hat{u}(c^{\mathrm{T}} + d^{\mathrm{T}} - \hat{u}^{\mathrm{T}}A)}{\hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u}}, \quad \|\hat{H}\| = \frac{\|b - A\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} = \frac{\|c + d - A\hat{u}\|}{\|\hat{u}\|}, \\
\text{если (30) и (31) выполняются одновременно.}
\end{gathered} \tag{32}$$

3. ПРОБЛЕМА КОРРЕКЦИИ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДВОЙСТВЕННОЙ ПАРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО МИНИМУМУ ЕВКЛИДОВОЙ НОРМЫ

Рассмотрим проблему

$$\begin{gathered}
\|H\| \longrightarrow \min, \\
\text{задачи } L(A + H, b, c),\ L^*(A + H, b, c) \text{ собственные.}
\end{gathered} \tag{33}$$

Способ решения данной проблемы указывает приведенная ниже теорема, вытекающая из рассмотренной в предыдущем разделе леммы 1.

Теорема 3. *Проблема* (33) *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача математического программирования*

$$\begin{gathered}
f(x, d, u) = \frac{\|b - Ax\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|c + d - A^{\mathrm{T}}u\|^2}{\|u\|^2} - \frac{(\gamma - u^{\mathrm{T}}Ax)^2}{\|x\|^2\|u\|^2} \longrightarrow \min, \\
c^{\mathrm{T}}x = b^{\mathrm{T}}u = \gamma, \quad d^{\mathrm{T}}x = 0, \quad x \ge 0, \quad d \ge 0.
\end{gathered} \tag{34}$$

Если задача (34) имеет непустое множество решений, к которому принадлежат векторы x^*, d^* и u^*, то единственное (при фиксированных x^*, d^* и u^*) решение проблемы (33) выражается формулой

$$H^* = (b - Ax^*)\frac{x^*}{x^{*\mathrm{T}}x^*} + \frac{u^*}{u^{*\mathrm{T}}u}(c^{\mathrm{T}} + d^{*\mathrm{T}} - u^{*\mathrm{T}}A) - \alpha^*\frac{u^*x^{*\mathrm{T}}}{x^{*\mathrm{T}}x^*u^{*\mathrm{T}}u^*},$$

где

$$\alpha^* = \gamma^* - u^{*\mathrm{T}}Ax^*, \quad \gamma^* = c^{\mathrm{T}}x^* = b^{\mathrm{T}}u^*.$$

При этом

$$\|H^*\|^2 = f(x^*, d^*, u^*),$$

$$x^* \in \hat{\mathbf{X}}(A + H^*, b, c), \quad u^* \in \hat{\mathbf{U}}(A + H^*, b, c).$$

Задача (34) является невыпуклой задачей математического программирования. По этой причине ее детальное изучение может быть предметом отдельного исследования. В настоящей работе мы ограничимся тремя теоремами, характеризующими ряд важных для практических приложений и сравнительно легко проверяемых по исходным данным *необходимых* условий существования решения задачи (34).

Теорема 4. *Если* $\mathbf{X}(A, b) \neq \varnothing$, $b \neq 0$, $\mathbf{U}(A, c) \neq \varnothing$, *то для существования решения проблемы* (33) *необходимо, чтобы система*

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{T}}A &= 0, \\ u^{\mathrm{T}}b &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

имела только тривиальное решение.

Доказательство. В силу условий теоремы, задача $L(A, b, c)$ является несобственной задачей II рода, а задача $L^*(A, b, c)$ – несобственной задачей I рода (см. [2]). По этой причине нулевая матрица не может принадлежать множеству решений проблемы (33). Таким образом, если проблема (33) разрешима и матрица $\breve{H}$ – ее решение, то $\breve{H} \neq 0$, и, соответственно, $\|\breve{H}\| > 0$. Предположим теперь, что система (35) имеет нетривиальное решение $\bar{u}$. Очевидно, что общность рассуждений не пострадает, если считать, что $\|\bar{u}\| = 1$. Пусть $x \in \mathbf{X}(A, b) \Leftrightarrow b - Ax = 0$. Заметим, что $x \neq 0$ в силу условия $b \neq 0$. Пусть $d = 0 \in \mathbb{R}^n$, u – некоторый вектор такой, что $c^{\mathrm{T}}x = b^{\mathrm{T}}u = \gamma$. Построим матрицу $H(\theta)$:

$$H(\theta) = \frac{(b - Ax)x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{(u + \theta\bar{u})(c + d - A^{\mathrm{T}}(u + \theta\bar{u}))^{\mathrm{T}}}{(u + \theta\bar{u})^{\mathrm{T}}(u + \theta\bar{u})} - \frac{\alpha(u + \theta\bar{u})x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x(u + \theta\bar{u})^{\mathrm{T}}(u + \theta\bar{u})} =$$

$$= \frac{(u + \theta\bar{u})(c - A^{\mathrm{T}}u)^{\mathrm{T}}}{(u + \theta\bar{u})^{\mathrm{T}}(u + \theta\bar{u})} - \frac{\alpha(u + \theta\bar{u})x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x(u + \theta\bar{u})^{\mathrm{T}}(u + \theta\bar{u})} = \frac{(u + \theta\bar{u})\left(c - A^{\mathrm{T}}u - \dfrac{\alpha x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right)^{\mathrm{T}}}{(u + \theta\bar{u})^{\mathrm{T}}(u + \theta\bar{u})},$$

где $\alpha = \gamma - (u + \theta\bar{u})^{\mathrm{T}}Ax = \gamma - u^{\mathrm{T}}Ax$. Сопоставление с формулой показывает, что матрица $H(\theta)$ является решением проблемы (17) с параметрами $A, b, c, x, u + \theta\bar{u}$. При этом

$$\|H(\theta)\| = \frac{\left\|c - A^{\mathrm{T}}u - \dfrac{\alpha x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|}{\|u + \theta\bar{u}\|}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\theta \to +\infty} \|H(\theta)\| = \left\|c - A^{\mathrm{T}}u - \frac{\alpha x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\| \lim_{\theta \to +\infty} \frac{1}{\|u + \theta\bar{u}\|} = 0.$$

Но тогда существует число $0 < \tilde{\theta} < +\infty$ такое, что $\|H(\tilde{\theta})\| < \|\breve{H}\|$; это противоречит предположению о том, что матрица $\breve{H}$ является решением проблемы (33). Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Если* $\mathbf{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathbf{U}(A, c) \neq \varnothing$, $c \neq 0$, *то для существования решения проблемы* (33) *необходимо, чтобы система*

$$\begin{aligned} Ax &= 0, \\ c^{\mathrm{T}}x &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

имела только тривиальное решение.

Доказательство. В силу условий теоремы, задача $L(A, b, c)$ является несобственной задачей I рода, а задача $L^*(A, b, c)$ – несобственной задачей II рода (см. [2]). По этой причине нулевая матрица не может принадлежать множеству решений проблемы (33). Таким образом, если проблема (33) разрешима и матрица $\breve{H}$ – ее решение, то $\breve{H} \neq 0$ и, соответственно, $\|\breve{H}\| > 0$. Предположим теперь, что система (36) имеет нетривиальное решение $\bar{x}$. Очевидно, что общность рассуждений не пострадает, если считать, что $\|\bar{x}\| = 1$. Пусть

$$u \in \mathbf{U}(A, c) \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}u \geq c \Leftrightarrow \begin{cases} A^{\mathrm{T}}u + d - c = 0, \\ d = A^{\mathrm{T}}u - c \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что $u \neq 0$ в силу условия $c \neq 0$. Пусть x – некоторый вектор такой, что $c^{\mathrm{T}}x = b^{\mathrm{T}}u = \gamma$. Построим матрицу $H(\theta)$:

$$H(\theta) = \frac{[b - A(x + \theta\bar{x})](x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}}{(x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}(x + \theta\bar{x})} + \frac{u(c + d - A^{\mathrm{T}}u)^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \frac{\alpha u(x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}}{(x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}(x + \theta\bar{x})u^{\mathrm{T}}u} =$$

$$= \frac{(b - Ax)(x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}}{(x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}(x + \theta\bar{x})} - \frac{\alpha u(x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}}{(x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}(x + \theta\bar{x})u^{\mathrm{T}}u} = \frac{\left(b - Ax - \frac{\alpha u}{u^{\mathrm{T}}u}\right)(x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}}{(x + \theta\bar{x})^{\mathrm{T}}(x + \theta\bar{x})},$$

где $\alpha = \gamma - u^{\mathrm{T}}A(x + \theta\bar{x}) = \gamma - u^{\mathrm{T}}Ax$. Сопоставление с формулой (24) показывает, что матрица $H(\theta)$ является решением проблемы (17) с параметрами A, b, c, $x + \theta\bar{x}$, u. При этом

$$\|H(\theta)\| = \frac{\left\|b - Ax - \frac{\alpha u}{u^{\mathrm{T}}u}\right\|}{\|x + \theta\bar{x}\|}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\theta \to +\infty} \|H(\theta)\| = \left\|b - Ax - \frac{\alpha u}{u^{\mathrm{T}}u}\right\| \lim_{\theta \to +\infty} \frac{1}{\|x + \theta\bar{x}\|} = 0.$$

Но тогда существует число $0 < \tilde{\theta} < +\infty$ такое, что $\|H(\tilde{\theta})\| < \|\breve{H}\|$, а это противоречит предположению о том, что матрица $\breve{H}$ является решением проблемы (33). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Если* $\mathbf{U}(A, c) = \varnothing$ *и существует вектор* u, *являющийся решением системы*

$$A^{\mathrm{T}}u \geq 0, \quad b^{\mathrm{T}}u > 0, \tag{37}$$

то проблема (33) не имеет решения.

Доказательство. Предположим противное: пусть $\breve{H}$ – некоторое решение проблемы (33). В силу условий теоремы, задача $L(A, b, c)$ является несобственной задачей либо II, либо III рода, а задача $L^*(A, b, c)$ – несобственной задачей либо I, либо III рода [2]. При этом в любом случае нулевая матрица не может принадлежать множеству решений проблемы (33), поэтому $\breve{H} \neq 0$ и, соответственно, $\|\breve{H}\| > 0$.

В силу теоремы Александрова–Фань-Цзи (см., например, [4]), непустота множества $\mathbf{U}(A, c)$ и совместность системы

$$Ax = 0, \quad c^{\mathrm{T}}x > 0, \quad x \geq 0 \tag{38}$$

составляют альтернативу. Поэтому из условия $\mathbf{U}(A, c) \neq \varnothing$ следует существование вектора $\bar{x}$, являющегося решением системы (38). Предположим, что $\bar{u}$ – решение системы (37). Без потери общности можно считать, что $\|\bar{x}\| = \|\bar{u}\| = 1$. Пусть

$$\tilde{u} = \frac{c^{\mathrm{T}}\bar{x}}{b^{\mathrm{T}}\bar{u}}\bar{u}.$$

Как несложно заметить, справедливо условие $c^{\mathrm{T}}\bar{x} = b^{\mathrm{T}}\tilde{u} = \gamma$.

Пусть

$$d(\theta) = \theta A^{\mathrm{T}}\tilde{u}, \quad x(\theta) = \theta\bar{x}, \quad u(\theta) = \theta\tilde{u},$$

где $\theta > 0$ – некоторое число. Несложно убедиться, что выполняются условия

$$c^{\mathrm{T}}x(\theta) = b^{\mathrm{T}}u(\theta) = \theta\gamma, \quad d^{\mathrm{T}}(\theta)x(\theta) = 0, \quad x(\theta) \geq 0, \quad d(\theta) \geq 0.$$

Построим матрицу $H(\theta)$:

$$H(\theta) = \frac{[b - Ax(\theta)]x^{\mathrm{T}}(\theta)}{x^{\mathrm{T}}(\theta)x(\theta)} + \frac{u(\theta)[c + d(\theta) - A^{\mathrm{T}}u(\theta)]^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}(\theta)u(\theta)} - \frac{\alpha u(\theta)x^{\mathrm{T}}(\theta)}{x^{\mathrm{T}}(\theta)x(\theta)u^{\mathrm{T}}(\theta)u(\theta)} = \frac{1}{\theta}\left(b\bar{x}^{\mathrm{T}} + \frac{\tilde{u}c^{\mathrm{T}}}{\tilde{u}^{\mathrm{T}}\tilde{u}} - \frac{\gamma\tilde{u}\bar{x}^{\mathrm{T}}}{\tilde{u}^{\mathrm{T}}\tilde{u}}\right),$$

где $\alpha = \theta\gamma - u^{\mathrm{T}}(\theta)Ax(\theta) = \theta\gamma$. Сопоставление с формулой показывает, что матрица $H(\theta)$ является решением проблемы (17) с параметрами A, b, c, $x(\theta)$, $u(\theta)$. При этом

$$\|H(\theta)\| = \frac{1}{\theta}\left\|b\bar{x}^{\mathrm{T}} + \frac{\tilde{u}c^{\mathrm{T}}}{\tilde{u}^{\mathrm{T}}\tilde{u}} - \frac{\gamma\tilde{u}\bar{x}^{\mathrm{T}}}{\tilde{u}^{\mathrm{T}}\tilde{u}}\right\|,$$

$$\lim_{\theta \to +\infty} \|H(\theta)\| = 0.$$

Но тогда существует число $0 < \tilde{\theta} < +\infty$ такое, что $\|H(\tilde{\theta})\| < \|\breve{H}\|$, а это противоречит предположению о том, что матрица $\breve{H}$ является решением проблемы (33). Теорема 6 доказана.

4. ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Ниже рассматриваются три двойственные пары несобственных задач линейного программирования вида $L(A, b, c)$, $L^*(A, b, c)$, иллюстрирующие все три различных случая несобственности. Для каждой пары задач рассматриваются задачи (17) и (33). Для задачи (17), в силу ее относительной простоты, малой размерности и модельного характера рассматриваемых примеров, удается получить точные решения. Решения задачи (33) получены численно (методом сопряженного градиента) средствами нелинейной оптимизации программы MathCAD (в расчетах использовалась версия 11.0a).

Пример 1. Двойственная пара задач $L(A, b, c)$, $L^*(A, b, c)$ характеризуется следующими данными:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\mathbf{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathbf{U}(A, c) \neq \varnothing$, т.е. $L(A, b, c)$ – несобственная задача I рода, $L^*(A, b, c)$ – несобственная задача II рода. В справедливости условия $\mathbf{X}(A, b) = \varnothing$ можно убедиться, используя лемму Минковского–Фаркаша: совместность систем $Ax = b$, $x \geq 0$ и $u^{\mathrm{T}}A \geq 0$, $u^{\mathrm{T}}b < 0$ является альтернативой (см., например, [4]). В данном случае совместна система $u^{\mathrm{T}}A \geq 0$, $u^{\mathrm{T}}b < 0$, поскольку $u = (1\ 1\ 1\ {-1})^{\mathrm{T}}$ – одно из ее решений. Множество $\mathbf{U}(A, c)$ не пусто, поскольку, например, $w = (-1/2\ {-1/4}\ 3/4\ 1/4)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{U}(A, c)$.

Задачу (17) рассмотрим с параметрами

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{u} = w, \quad \hat{d} = \operatorname*{argmin}_{d \geq 0,\, d^{\mathrm{T}}x = 0} \|c + d - A^{\mathrm{T}}\hat{u}\|.$$

Условие $c_{\mathrm{T}}\hat{x} = b^{\mathrm{T}}\hat{u}$ выполняется: $c^{\mathrm{T}}\hat{x} = b^{\mathrm{T}}\hat{u} = 2$. Поэтому $\gamma = 2$, $\alpha = \gamma - \hat{u}^{\mathrm{T}}A\hat{x} = -1/4$. В то же время $\hat{d} = (0\ 0\ 0\ 1/4\ 0)^{\mathrm{T}}$,

$$\hat{H} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -11 & 0 & -17 & 0 & -17 \\ -43 & 0 & -46 & 0 & -46 \\ -36 & 0 & -27 & 0 & -27 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank}\hat{H} = 2, \quad \|\hat{H}\|^2 = \frac{212}{45} \approx 4.71111111,$$

$$\Delta H = \left(I - \frac{\hat{u}\hat{u}^{\mathrm{T}}}{\hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u}}\right)Z\left(I - \frac{\hat{x}\hat{x}^{\mathrm{T}}}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}}\right) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 11 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 14 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 14 \end{pmatrix} Z \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

где $Z \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ – произвольная матрица.

При решении задачи (33) получены следующие результаты:

$$x^* \approx \begin{pmatrix} 0.85038865 \\ 0 \\ 0.95805957 \\ 0 \\ 4.52609778 \end{pmatrix}, \quad d^* \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.10081712 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u^* \approx \begin{pmatrix} -0.96083772 \\ -0.91343037 \\ 0.33888990 \\ 0.78727023 \end{pmatrix}, \quad \gamma^* \approx 5.37648643,$$

$$\alpha^* \approx -1.23351066, \quad H^* \approx \begin{pmatrix} -0.03773530 & 0 & -0.04251310 & 0 & -0.20084186 \\ 0.03655510 & 0 & 0.04118348 & 0 & 0.19453042 \\ -0.20502189 & 0 & -0.23098049 & 0 & -1.09120591 \\ 0.02439511 & 0 & 0.02748387 & 0 & 0.12984024 \end{pmatrix},$$

выполняются условия (30), (32),

$$\operatorname{rank}\hat{H} = 1, \quad \|\hat{H}\|^2 \approx 1.38878015.$$

Пример 2. Двойственная пара задач $L(A, b, c)$, $L^*(A, b, c)$ характеризуется следующими данными:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 9 & 9 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 15 & -7 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 0 \\ -4 & 18 & 14 & 30 & -10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\mathbf{X}(A, b) \neq \varnothing$, $\mathbf{U}(A, c) = \varnothing$, т.е. $L(A, b, c)$ – несобственная задача II рода, $L^*(A, b, c)$ – несобственная задача I рода. В справедливости условия $\mathbf{X}(A, b) \neq \varnothing$ можно убедиться, проверив условие $z = (1/4\ 5/9\ 1/2\ 0\ 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{X}(A, b)$. В справедливости условия $\mathbf{U}(A, c) = \varnothing$ можно убедиться с использованием теоремы Александрова–Фань-Цзи (совместность систем $u^{\mathrm{T}}A \geq c^{\mathrm{T}}$ и $Ax = 0$, $c^{\mathrm{T}}x > 0$, $x \geq 0$ является альтернативой). В данном случае совместна система $Ax = 0$, $c^{\mathrm{T}}x > 0$, $x \geq 0$, поскольку $x = (1\ 0\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$ – одно из ее решений.

Задачу (17) будем рассматривать с параметрами

$$\hat{x} = z, \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{d} = \underset{d \geq 0,\, d^{\mathrm{T}}x = 0}{\operatorname{argmin}} \|c + d - A^{\mathrm{T}}\hat{u}\|.$$

Условие $c^{\mathrm{T}}\hat{x} = b^{\mathrm{T}}\hat{u}$ выполняется: $c^{\mathrm{T}}\hat{x} = b^{\mathrm{T}}\hat{u} = 8/3$. Поэтому $\gamma = 8/3$, $\alpha = \gamma - \hat{u}^{\mathrm{T}}A\hat{x} = 0$. В то же время, $\hat{d} = (0\ 0\ 0\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

выполняются условия (31), (32),

$$\operatorname{rank}\hat{H} = 1, \quad \|\hat{H}\|^2 = 120,$$

$$\Delta H = \left(I - \frac{\hat{u}\hat{u}^{\mathrm{T}}}{\hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u}}\right)Z\left(I - \frac{\hat{x}\hat{x}^{\mathrm{T}}}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} 724/805 & -36/161 & -162/805 & 0 & 0 \\ -36/161 & 81/161 & -72/161 & 0 & 0 \\ -162/805 & -72/161 & 481/805 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $Z \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ – произвольная матрица.

Задача (33) не имеет решения в силу нарушения условий теоремы 4. Действительно, как нетрудно убедиться, вектор $u = (1\ 1\ 1\ {-1})$ является нетривиальным решением системы (35).

Пример 3. Двойственная пара задач $L(A, b, c)$, $L^*(A, b, c)$ характеризуется следующими данными:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 9 & 9 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 15 & -7 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 0 \\ -4 & 18 & 14 & 30 & -10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\mathbf{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathbf{U}(A, c) = \varnothing$, т.е. $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ – несобственные задачи III рода. В справедливости условия $\mathbf{X}(A, b) = \varnothing$ можно убедиться с использованием леммы Минковского–Фаркаша. Для этого достаточно проверить принадлежность вектора $u = (1\ 1\ 2\ {-1})$ множеству решений системы $u^{\mathrm{T}}A \geq 0$, $u^{\mathrm{T}}b < 0$. В справедливости условия $\mathbf{U}(A, c) = \varnothing$ можно убедиться с использованием теоремы Александрова–Фань-Цзи. Для этого достаточно проверить принадлежность вектора $x = (1\ 0\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$ множеству решений системы $Ax = 0$, $c^{\mathrm{T}}x > 0$, $x \geq 0$.

Задачу (17) будем рассматривать с параметрами

$$\hat{x} = x, \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{d} = \underset{d \geq 0,\, d^{\mathrm{T}}x = 0}{\operatorname{argmin}} \|c + d - A^{\mathrm{T}}\hat{u}\|.$$

Условие $c^{\mathrm{T}}\hat{x} = b^{\mathrm{T}}\hat{u}$ выполняется: $c^{\mathrm{T}}\hat{x} = b^{\mathrm{T}}\hat{u} = 4$. Поэтому $\gamma = 4$, $\alpha = \gamma - \hat{u}^{\mathrm{T}}A\hat{x} = 4$. В то же время $\hat{d} = (0\ 15\ 0\ 26\ 0)^{\mathrm{T}}$,

$$\hat{H} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 17 & 0 & -34 & 0 & 35 \\ 14 & 0 & -37 & 0 & 32 \\ 14 & 0 & -37 & 0 & 32 \\ 30 & 0 & 30 & 0 & 30 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank}\hat{H} = 2, \quad \|\hat{H}\|^2 = \frac{1172}{9} \approx 130.22222,$$

$$\Delta H = \left(I - \frac{\hat{u}\hat{u}^{\mathrm{T}}}{\hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u}}\right)Z\left(I - \frac{\hat{x}\hat{x}^{\mathrm{T}}}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Z \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

где $Z \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ – произвольная матрица.

Задача (33) не имеет решения в силу выполнения условий теоремы 6. Действительно, $\mathbf{U}(A, c) = \varnothing$, как было показано выше. Кроме того, как несложно убедиться, вектор $u = (-1\ -1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$ принадлежит множеству решений системы (37).

5. НЕКОТОРЫЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И КОММЕНТАРИИ

Насколько известно автору, задача разрешения спряженной пары систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестной матрицы ранее не рассматривалась. Тем не менее нельзя не упомянуть очень близкую как по постановке, так и по области приложений задачу поиска матрицы с минимальной евклидовой нормой, являющейся решением системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ при заданных векторах x и b. Для краткости последующих ссылок будем называть указанную задачу "задача $Z_0(x, b)$". Данная задача, рассматриваемая вне своего прикладного контекста, привлекает к себе внимание своей нестандартной постановкой. Мы не будем пытаться прослеживать исторический путь задачи $Z_0(x, b)$, а сразу укажем работы [5]–[7], в которых обращение к задаче $Z_0(x, b)$ вызвано вполне утилитарными причинами, поскольку она используется в качестве инструмента для разрешения проблемы построения нормального решения приближенной системы линейных алгебраических уравнений $Z_1(\tilde{A}, \tilde{b}, \mu, \delta)$ (см. [5], [6]), и устойчивого решения задачи линейного программирования с приближенными данными $Z_2(\tilde{A}, \tilde{b}, c, \mu, \delta)$ (см. [7]). Для сравнения с материалом настоящей работы приведем постановки указанных задач:

$$Z_1(\tilde{A}, \tilde{b}, \mu, \delta): \begin{cases} \{A^*, b^*, x^*\} \text{ неизвестно}, \\ \{A^*, b^*, x^*\} \triangleq \operatorname*{Arginf}\limits_{Ax = b,\ \|A - \tilde{A}\| \le \mu,\ \|b - \tilde{b}\| \le \delta} \|x\|, \end{cases}$$

$$Z_2(\tilde{A}, \tilde{b}, c, \mu, \delta, \lambda): \begin{cases} \{A^*, b^*, x^*\} \text{ неизвестно}, \\ \{A^*, b^*, x^*\} \triangleq \operatorname*{Arginf}\limits_{Ax = b,\ x \ge 0,\ \|A - \tilde{A}\| \le \mu,\ \|b - \tilde{b}\| \le \delta} \{c^{\mathrm{T}}x + \lambda\|x\|\}, \end{cases}$$

где $\tilde{A}x = \tilde{b}$ – индивидуальная приближенная система, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mu > 0$, $0 < \delta < \|\tilde{b}\|$ – скалярные параметры, $\lambda > 0$ – параметр регуляризации, а условия $\|A - \tilde{A}\| \le \mu$, $\|b - \tilde{b}\| \le \delta$ задают множество систем, эквивалентных системе $\tilde{A}x = \tilde{b}$ по точности.

Для сравнения с теоремами 1 и 2 настоящей работы приведем также результат решения задачи $Z_0(x, b)$, обозначенный в работах [5], [6] как "основная лемма".

Лемма А.Н. Тихонова. *Система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, рассматриваемая относительно неизвестной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ при заданных векторах $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ne 0$, $b \in \mathbb{R}^m$, разрешима. Решение $\hat{A}$ указанной системы, минимальное по евклидовой норме, единственно и дается формулой $\hat{A} = \dfrac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}$, причем $\|\hat{A}\| = \dfrac{\|b\|}{\|x\|}$.*

Следующий шаг в использовании задачи $Z_0(x, b)$ был сделан в работах А.А. Ватолина (см. [2 § 12], [8]), где, в частности, была рассмотрена задача оптимальной матричной коррекции несовместной системы линейных алгебраических уравнений:

$$Z_3(A, b): \begin{cases} \text{найти } \{H^*, h^*, x^*\}, \\ \text{где } \{H^*, h^*, x^*\} \triangleq \operatorname*{Arginf}\limits_{(A + H)x = b + h} \|[H\ -h]\|, \end{cases}$$

и ее модификация, в которой часть столбцов матрицы A не корректируется.

Можно показать, что представленное в работе [9] решение проблемы матричной коррекции задачи линейного программирования $L(A, b, c)$ с несовместной системой ограничений:

$$Z_4(A, b, c, \gamma): \begin{cases} \text{найти } \{H^*, h^*, x^*\}, \\ \text{где } \{H^*, h^*, x^*\} \triangleq \operatorname*{Arginf}\limits_{\mathbf{X}(A + H,\, b + h) = \varnothing,\ c^{\mathrm{T}}x \ge \gamma} \|[H\ -h]\|, \end{cases}$$

рассмотренное без явного упоминания леммы Тихонова, фактически является ее следствием. Заметим, что полученное решение не гарантирует непустоту допустимой области двойственной задачи и, что эквивалентно, собственность задачи $L(A + H^*, b + h^*, c)$. Указанное замечание справедливо и в отношении решений некоторых других проблем матричной коррекции задач линейного программирования с несовместной системой ограничений (или систем линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности решения), явно или неявно основанных на использовании либо леммы Тихонова (см., например, [10]–[13]), либо ее модификаций [14]–[16], в которых вместо евклидовой нормы используются другие, возможно аддитивные, матричные нормы.

Необходимо также упомянуть исследования близких к предмету настоящей статьи проблем оптимальной (в различных векторных нормах) коррекции коэффициентов вектора правой части системы ограничений некоторой несобственной задачи линейного программирования, а также коэффициентов вектора ее целевой функции (и не затрагивающей матрицу коэффициентов системы ограничений). Указанные исследования, связанные в основном с именем И.И. Ерёмина, а также его коллег и учеников (см. [2], [17], [18]), показали, что соответствующие проблемы коррекции сводятся к выпуклым задачам математического программирования, причем после коррекции соответствующие задачи линейного программирования действительно оказываются собственными.

Заметим, что при использовании полиэдральных векторных норм в роли показателей качества коррекции исходные проблемы коррекции несобственных задач линейного программирования сами сводятся к некоторым вспомогательным задачам линейного программирования, в связи с чем уместно упомянуть книгу [3], содержащую детальное исследование подобных задач и набор соответствующих числовых примеров.

Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту В.А. Горелику, который первым ввел автора в проблематику матричной коррекции задач линейного программирования и привил к ней интерес. Автор благодарен коллективу отдела математического программирования ИММ УрО РАН, и в особенности И.И. Ерёмину, за доброжелательное отношение и поддержку, особенно пригодившиеся на начальном этапе работы автора над исследованием несобственных задач линейного программирования. Автор признателен В.К. Горбунову за ряд ценных замечаний и, в частности, за пожелание учитывать несобственность II и III рода при решении задач коррекции. Особую благодарность автор выражает Ф.П. Васильеву, который произвел переворот в сознании автора, заставив с общих позиций взглянуть на проблемы оптимальной матричной коррекции и регуляризации по Тихонову систем линейных алгебраических уравнений и задач линейного программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
2. *Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.
3. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: "Факториал Пресс", 2003.
4. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
5. *Тихонов А.Н.* О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 3. С. 549–554.
6. *Тихонов А.Н.* О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1373–1383.
7. *Тихонов А.Н., Рютин А.А., Агаян Г.М.* Об устойчивом методе решения задачи линейного программирования с приближенными данными // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С. 1058–1063.
8. *Ватолин А.А.* Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 12. С. 1907–1908.
9. *Горелик В.А.* Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 11. С. 1697–1705.
10. *Горелик В.А., Ерохин В.И., Муравьева О.В.* Некоторые задачи аппроксимации матриц коэффициентов несовместных систем линейных уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамич. процессов. М.: ВЦ РАН, 2001. С. 57–88.
11. *Ерохин В.И.* Свойства оптимальной одноранговой коррекции матриц коэффициентов несовместных неоднородных линейных моделей // Дискретный анализ и иссл. операций. Сер. 2. 2002. Т. 9. № 1. С. 33–60.
12. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Матричная коррекция данных в задачах оптимизации и классификации // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамич. процессов. М.: ВЦ РАН, 2004. С. 94–120.

13. *Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В.* Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Дискретный анализ и иссл. операций. Сер. 2. 2005. Т. 12. № 2. С. 3–23.

14. *Ерохин В.И.* Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей // Дискретный анализ и иссл. операций. Сер. 2. 2002. Т. 9. № 2. С. 41–77.

15. *Горелик В.А., Ерохин В.И.* Оптимальная (по минимуму полиэдральной нормы) матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамич. процессов. М: ВЦ РАН, 2004. С. 35–63.

16. *Ерохин В.И.* Лемма А.Н. Тихонова и ее обобщения // Тихонов и современная математика: Обратные и некорректно поставленные задачи. Тезисы докл. Междунар. конф. М.: МГУ, Вычисл. матем. и кибернетика. 2006. С. 52–53.

17. *Еремин И.И., Астафьев Н.Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976.

18. *Попов Л.Д.* Об одноэтапном методе решения лексикографических вариационных неравенств // Изв. вузов. Математика. 1998. № 12 (439). С. 71–81.