ДВА ПОДХОДА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ АЛЬТЕРНАНСА*

В. Ф. Демьянов — vfd@ad9503.spb.edu

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

24 января 2013 г.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное замкнутое множество и C — его выпуклая оболочка. В задачах негладкой оптимизации условие оптимальности часто записывают в виде

$$\mathbb{O}_n \in C. \tag{1}$$

В докладе приведены две эквивалентные альтернансные формы условия (1). Под *альтернансом* понимается чередование знаков некоторых величин.

1°. Начнём с предварительных сведений.

Векторы $V_1, \ldots, V_m$ из $\mathbb{R}^n$ называются *аффинно независимыми*, если система уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i V_i = \mathbb{O}_n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 0$$

имеет только нулевое решение. Другими словами, система векторов $V_1, \ldots, V_m$ аффинно независима, если векторы $W_i = \begin{pmatrix} V_i \\ 1 \end{pmatrix}$, $i \in 1 : m$, линейно независимы.

Ясно, что в определении аффинной независимости $m \leqslant n + 1$.

ЛЕММА 1. *Пусть $V \in C$. Тогда в G существуют аффинно независимые векторы $V_1, \ldots, V_m$, такие, что*

$$V = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i V_i,$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — *положительные числа, в сумме равные единице.*

Доказательство. По определению выпуклой оболочки вектор V допускает представление
$$V = \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i V'_i, \tag{2}$$
в котором все V'_i принадлежат G и коэффициенты α'_i положительны и в сумме равные единице. Среди всех таких представлений выберем представление с наименьшим p. Покажем, что в этом случае векторы $V'_1, \ldots, V'_p$ будут аффинно независимыми.

При $p = 1$ утверждение очевидно, поскольку система, состоящая из одного (произвольного) вектора, аффинно независима. (Ситуация с $p = 1$ возникает тогда, когда $V \in G$.)

Предположим, что $p \geqslant 2$, и пусть, вопреки утверждению, векторы $V'_1, \ldots, V'_p$ аффинно зависимы. Это значит, что система
$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{p} \beta'_i V'_i = \mathbb{O}_n, \\ \sum_{i=1}^{p} \beta'_i = 0 \end{gathered} \tag{3}$$
имеет ненулевое решение. Так как $p \geqslant 2$, то среди коэффициентов β'_i есть как положительные, так и отрицательные.

В силу (2) и (3) справедливы формулы
$$\begin{gathered} V = \sum_{i=1}^{p} (\alpha'_i - \varepsilon\beta'_i) V'_i, \\ \sum_{i=1}^{p} (\alpha'_i - \varepsilon\beta'_i) = 1. \end{gathered}$$
Положим
$$\varepsilon = \min_i \frac{\alpha'_i}{\beta'_i}, \tag{4}$$
где минимум берётся по тем i, при которых $\beta'_i > 0$. В этом случае коэффициенты $\alpha''_i = \alpha'_i - \varepsilon\beta'_i$ будут неотрицательными и по крайней мере один из них обратится в ноль (при i, на котором в правой части (4) достигается минимум). Отбросив нулевые α''_i, придём к представлению для V вида (2) с меньшим p. Это противоречит определению p. Лемма доказана. □

2°. Обратимся к условию (1). Обозначим $N = 1 : n$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы выполнялось условие $\mathbb{O}_n \in C$, необходимо и достаточно, чтобы в множестве G нашлись $r+1$ векторов $V_i = V_i[N]$, $i \in 0 : r$, где $r = 0 : n$, со свойствами:*

1) *они линейно зависимы;*

2) *существует подмножество $N' \subset N$, состоящее из r индексов, такое, что при всех $i \in 0 : r$ определители r-го порядка Δ_i, составленные из столбцов*
$$V_0[N'], \ \ldots, \ V_{i-1}[N'], \ V_{i+1}[N'], \ \ldots, \ V_r[N'],$$
отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки, то есть
$$\operatorname{sign} \Delta_i = -\operatorname{sign} \Delta_{i-1}, \quad i \in 1 : r.$$

При $r = n$ условие 1) выполняется автоматически, а в условии 2) необходимо $N' = N$.

При $r = 0$ условия 1) и 2) сводятся к одному условию $\mathbb{O}_n \in G$ (система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbb{O}_n \in C$. Если $\mathbb{O}_n \in G$, то следует положить $r = 0$, $V_0 = \mathbb{O}$.

Предположим, что $\mathbb{O}_n \notin G$. Так как $\mathbb{O}_n \in C$, то по лемме 1 в множестве G найдутся аффинно независимые векторы $V_0, \ V_1, \ \ldots, \ V_r$, такие, что система линейных уравнений
$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{r} \alpha_i V_i = \mathbb{O}_n, \\ \sum_{i=0}^{r} \alpha_i = 1, \end{gathered} \tag{5}$$
имеет решение с положительными α_i. В частности, векторы V_i, $i \in 0 : r$, линейно зависимы (условие 1)).

Обозначим через A матрицу системы (5). В силу аффинной независимости векторов V_i ранг матрицы A равен $r+1$. Как следствие, у матрицы A найдутся $r+1$ линейно независимых строк, среди которых обязательно будет присутствовать последняя строка (иначе получим противоречие с линейной зависимостью векторов V_i, $i \in 0 : r$). Другими словами, существует подмножество $N' \subset N$, $|N'| = r$, такое, что решение системы (5) будет удовлетворять также системе

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i V_i[N'] = \mathbb{O}[N'],$$
$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i = 1 \tag{6}$$

с квадратной невырожденной матрицей B.

Обозначим через Δ определитель матрицы B и через Δ_i определители подматриц, составленных из столбцов

$$V_0[N'],\ \ldots,\ V_{i-1}[N'],\ V_{i+1}[N'],\ \ldots,\ V_r[N'].$$

По формуле Крамера

$$\alpha_i = (-1)^{i+r}\frac{\Delta_i}{\Delta}\,, \quad i \in 0:r. \tag{7}$$

В силу положительности α_i определители Δ_i отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки (условие 2)).
Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2). Покажем, что $\mathbb{O}_n \in C$. При $r = 0$ имеем $\mathbb{O}_n \in G$ и тем более $\mathbb{O}_n \in C$.

Предположим, что $r \geqslant 1$. Рассмотрим систему линейных уравнений (6). Для определителя Δ этой системы справедлява формула

$$\Delta = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{i+r}\Delta_i.$$

В силу условия 2) определитель Δ отличен от нуля, поэтому система (6) имеет единственное решение. Его можно записать в виде (7). Согласно условию 2) все α_i имеют одинаковый знак. Учитывая, что сумма α_i равна единице, заключаем, что все α_i положительны.

Итак, система (6) имеет положительное решение. Покажем, что те же α_i удовлетворяют системе (5). Этим будет установлено, что $\mathbb{O}_n \in C$.

Напомним, что через A и B обозначены матрицы систем (5) и (6) соответственно. По определению

$$B[N',\ R] = A[N',\ R], \tag{8}$$

где $R = 0:r$. Возьмём $k \in N \setminus N'$. Нужно проверить, что

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i\, A[k,\ i] = 0.$$

Обозначим $N'' = N' \cup \{k\}$. Ясно, что $|N''| = r+1$. Обратим внимание на два факта. С одной стороны, в силу условия 1) строки матрицы $A[N'',\ R]$ линейно зависимы. С другой стороны, матрица B обратима, поэтому строки подматрицы $B[N',\ R]$ линейно независимы. Согласно (8) линейно независимыми будут строки подматрицы $A[N',\ R]$. Из этих фактов (с учётом определения N'') следует, что строка $A[k,\ R]$ может быть представлена в виде линейной комбинации строк подматрицы $A[N',\ R]$, то есть

$$A[k,\ R] = \sum_{s \in N'} u_{ks}\, A[s,\ R]. \tag{9}$$

Далее, согласно (6)

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i\, A[N',\ i] = \mathbb{O}[N']. \tag{10}$$

На основании (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r} \alpha_i\, A[k,\ i] &= \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \sum_{s \in N'} u_{ks}\, A[s,\ i] = \\ &= \sum_{s \in N'} u_{ks} \sum_{i=0}^{r} \alpha_i\, A[s,\ i] = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Более общий результат установлен в [1, с. 338–342].

3°. Возможен другой, независимый, подход к определению альтернансной формы условия (1). Обозначим через G' произвольный набор, состоящий из n линейно независисмых векторов пространства $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы выполнялось включение $\mathbb{O}_n \in C$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись векторы $V_0,\ V_1,\ \dots,\ V_n$, такие, что*

$$V_i \in G \quad \textit{при} \quad i \in 0:r; \quad V_i \in G' \quad \textit{при} \quad i \in r+1:n,$$

со следующим свойством: определители n-го порядка Δ_i матриц, составленных из столбцов $V_0,\ \dots,\ V_{i-1},\ V_{i+1}, \dots,\ V_n$, удовлетворяют условиям

$$\Delta_i \neq 0, \quad i \in 0:r; \qquad \operatorname{sign} \Delta_i = -\operatorname{sign} \Delta_{i-1}, \quad i \in 1:r;$$
$$\Delta_i = 0, \quad i \in r+1:n.$$

При $r = 0$ требуется, чтобы $\Delta_0 \neq 0$ и $\Delta_i = 0$ при $i \in 1:n$.

Предварительно напомним один известный результат. Пусть K — выпуклая коническая оболочка векторов $V_0,\ V_1,\ \dots,\ V_p$ из $\mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 2. *Любой ненулевой элемент $V \in K$ допускает представление*

$$V = \sum_{i \in I} \lambda_i V_i, \tag{11}$$

в котором векторы V_i линейно независимы и коэффициенты λ_i положительны.

Доказательство. Среди возможных представлений вектора V в виде (11) выберем представление с наименьшим $|I|$. В нём все λ_i будут положительными. Проверим линейную независимость векторов V_i, $i \in I$.

В противном случае система линейных уравнений

$$\sum_{i \in I} \beta_i \, V_i = \mathbb{O}_n$$

имеет нетривиальное решение; при этом можно считать, что хотя бы одно β_i положительно. Очевидно, что

$$V = \sum_{i \in I} (\lambda_i - \varepsilon \beta_i) V_i. \tag{12}$$

Положим

$$\varepsilon = \min_i \frac{\lambda_i}{\beta_i} \,, \tag{13}$$

где минимум берется по тем i, при которых $\beta_i > 0$. Коэффициенты $\lambda_i' = \lambda_i - \varepsilon \beta_i$ будут неотрицательными и по крайней мере один из них обратится в ноль (при i, на котором в правой части (13) достигается минимум). Так как $V \neq \mathbb{O}_n$, то не все λ_i' равны нулю. Отбросив в (12) нулевые коэффициенты, придём к представлению вида (11) с меньшим $|I|$. Но это противоречит минимальности $|I|$.

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть $\mathbb{O}_n \in C$. Если $\mathbb{O}_n \in G$, то положим $V_0 = \mathbb{O}$ и к этому вектору добавим все n линейно независимых векторов из G'. Получим требуемую систему $V_0, \ V_1, \ \ldots, \ V_n$. В дальнейшем будем считать, что $\mathbb{O}_n \notin G$.

По определению выпуклой оболочки нулевой вектор допускает представление

$$\mathbb{O}_n = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i V_i,$$

в котором все V_i — ненулевые векторы, принадлежащие G, а α_i — положительные коэффициенты, в сумме равные единице. Перепишем эту формулу в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i = -V_0, \tag{14}$$

где $\lambda_i = \alpha_i/\alpha_0 > 0$. Равенство (14) означает, что вектор $-V_0$ принадлежит выпуклой конической оболочке векторов $V_1, \ldots, V_r$. В силу леммы 2 можно считать, что векторы $V_1, \ldots, V_r$ линейно независимы. В качестве $V_{r+1}, \ldots, V_n$ возьмём векторы из множества G' так, чтобы система $V_1, \ldots, V_n$ была линейно независимой. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i = -V_0, \tag{15}$$

где $\lambda_i > 0$ при $i \in 1:r$ и $\lambda_i = 0$ при $i \in r+1:n$.

Рассмотрим (15) как систему линейных уравнений относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Определитель этой системы, равный Δ_0 (см. формулировку теоремы 2), отличен от нуля. По формуле Крамера

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i'}{\Delta_0}\,, \quad i \in 1:n, \tag{16}$$

где Δ_i' при $i \in 1:n$ есть определитель матрицы, составленной из столбцов

$$V_1,\ \ldots,\ V_{i-1},\ -V_0,\ V_{i+1}, \ldots,\ V_n.$$

Очевидно, что $\Delta_i' = (-1)^i \Delta_i$, поэтому формулу (16) можно переписать в виде

$$\lambda_i = (-1)^i \frac{\Delta_i}{\Delta_0}\,, \quad i \in 1:n. \tag{17}$$

Отсюда и из свойств λ_i следует, что $\Delta_i = 0$ при $i \in r+1:n$, в то время как

$$\Delta_i \neq 0 \quad \text{при} \quad i \in 0:r \quad \text{и} \quad \operatorname{sign}\Delta_i = -\operatorname{sign}\Delta_{i-1} \quad \text{при} \quad i \in 1:r.$$

На основании (15) и (17) приходим, в частности, к равенству

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \Delta_i V_i = \mathbb{O}_n. \tag{18}$$

Достаточность. Рассмотрим систему линейных уравнений (15). Её определитель, равный Δ_0, отличен от нуля, поэтому система (15) имеет единственное решение $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Для λ_i справедлива формула (17). Из (15), (17) и свойств определителей Δ_i следует равенство (18), которое можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{r} |\Delta_i| V_i = \mathbb{O}_n.$$

Здесь все V_i принадлежат G. Положив $\alpha_i = |\Delta_i| / \sum_{i=0}^{r} |\Delta_i|$, придём к соотношению

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i V_i = \mathbb{O}_n.$$

Оно гарантирует, что $\mathbb{O}_n \in C$.

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Даугавет В. А., Малозёмов В. Н. *Нелинейные задачи аппроксимации* // В сб.: Современное состояние теории исследования операций. Под ред. Н. Н. Моисеева. М.: Наука, 1979. С. 336–363.