функцию $g_{r,\rho}: \mathbf{T} \to \mathcal{K}_L$ равенством $(g_{r,\rho}(t))(z) = \frac{f(rz) - f(\rho t)}{\rho t - rz}$ $(r \in \mathbf{D})$. Она непрерывна на $\mathbf{T}$ и при любом $t \in \mathbf{T}$ $\|g_{r,\rho}(t) - g_r(t)\|_{\mathcal{K}} \leqslant \|g_{r,\rho}(t) - g_r(t)\|_{H^1} \underset{\rho \to 1}{\to} 0$. Кроме того, $\|g_{r,\rho}(t) - g_r(t)\|_{\mathcal{K}} \leqslant \frac{4\|f\|_{H^\infty}}{\rho - r}$. Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получим $\int\limits_{\mathbf{T}} \|g_{r,\rho}(t) - g_r(t)\|_{\mathcal{K}} d|\mu|(t) \underset{\rho \to 1}{\to} 0$. Из оценок (16) следует, что $\int\limits_{\mathbf{T}} \|w(t) - g_r(t)\|_{\mathcal{K}} d|\mu|(t) \underset{r \to 1}{\to} 0$, т. е. вектор-функцию w_ε можно найти среди непрерывных вектор-функций $g_{r,\rho}$. Теорема 4 доказана.

Некоторые приложения результатов этой статьи будут опубликованы в одном из следующих номеров «Вестника ЛГУ».

Автор пользуется случаем и благодарит В. П. Хавина, поставившего задачи и предложившего вариант изложения.

Summary

Suppose K^μ and K^ν are the Cauchy transforms of the finite Borel measures on the unit circumference $\mathbf{T}$ μ and ν. Let f be bounded analytic function, such that $fK^\mu = K^\nu$. Under some conditions on f and a subset E of $\mathbf{T}$ is proved to be $\nu(E) = \int\limits_E f d\mu$.

Литература

1. Александров А. Б. Классы Харди H^p, $p \in (0, 1)$. Автореф. канд. дис., 1979. 6 с. — 2. Александров А. Б. Об A-интегрируемости граничных значений гармонических функций. — Мат. заметки, 1981, т. 30, № 1, с. 59—72. — 3. Виноградов С. А., Голузина М. Г., Хавин В. П. Мультипликаторы и делители интегралов типа Коши — Стилтьеса. — Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 1970, т. 19, с. 55—78. — 4. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М., 1950. 336 с. — 5. Виноградов С. А., Хрущев С. В. Свободная интерполяция в пространстве равномерно сходящихся рядов Тейлора. Препринт ЛОМИ АН СССР, 1980, Р-1-80. 52 с. — 6. Виноградов С. А. Свойства мультипликаторов интегралов типа Коши — Стилтьеса и некоторые задачи факторизации аналитических функций. — Труды 7-й зимней школы. Дрогобыч, 1974, с. 5—39. — 7. Hruščev S. V., Vinogradov S. A. Inner functions and multipliers of Cauchy type integrals. — Preprints LOMI. Acad. Sci. USSR, 1980, E-1-80. 30 p. — 8. Бурбаки Н. Интегрирование. М., 1967. 398 с.

Статья поступила в редакцию 22 января 1981 г.

УДК 519.65

Б. П. Дербенева, В. Н. Малоземов

ОПТИМИЗАЦИЯ В ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ НОРМАХ

1°. Пусть $c_1, \ldots, c_p$ — векторы в $\mathbf{R}^m$, такие, что множество

$$V = \{y \in \mathbf{R}^m \mid (c_k, y) \leqslant 1 \ \forall k \in 1:p\}$$

ограничено. Ввведем соответствующую функцию Минковского

$$D(y) = \inf \{\lambda > 0 \mid y/\lambda \in V\}.$$

Как известно, D является несимметричной нормой в $\mathbf{R}^m$. Учитывая определение V, будем называть ее полиэдральной нормой.

Рассмотрим задачу о приближенном решении переопределенной системы нелинейных уравнений

$$f_i(x)=0,\ i\in 1:m, \tag{1}$$

где $f_1, \ldots, f_m$ — непрерывно дифференцируемые на $\mathbf{R}^n$ функции. Предполагается, что $n<m<p$. Введем обозначение $F=(f_1, \ldots, f_m)$. Следуя [1, 2], формализуем задачу (1):

$$D(F(x)) \to \min_{x\in\mathbf{R}^n}. \tag{2}$$

Ниже будет показано, что (2) сводится к минимаксной задаче. Это позволяет получить условия оптимальности первого и второго порядков для задачи (2). Подробно исследуется случай, когда

$$D(F(x))=\sum_{i=1}^m |f_i(x)|.$$

2⁰. Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$D(y)=\max_{k\in 1:p}(c_k,\ y). \tag{3}$$

Доказательство. Если $y=\mathbf{0}$, то утверждение тривиально. Допустим, что $y\neq\mathbf{0}$. Тогда $(c_k,\ y)>0$ хотя бы при одном k. Действительно, иначе $(c_k,\ y)\leqslant 0$ и $(c_k,\ ty)\leqslant 0\leqslant 1$ при всех $k\in 1:p$ и $t>0$, что противоречит ограниченности множества V. Теперь имеем

$$D(y)=\inf\{\lambda>0\,|\,(c_k,\ y)\leqslant\lambda\ \forall k\in 1:p\}=\max_{k\in 1:p}(c_k,\ y).$$

Лемма доказана.

Для справедливости равенства (3) существенна ограниченность множества V. Сформулируем условие ограниченности V в терминах c_k. Предварительно обозначим через V^* выпуклую оболочку, натянутую на векторы $c_1, \ldots, c_p$.

Лемма 2. *Для того чтобы множество V было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{0}\in\operatorname{int} V^*$.

Доказательство. Необходимость. Допустим противное. По теореме отделимости найдется вектор $z\neq 0$, такой, что $(z,\ y)\leqslant 0$ $\forall y\in V^*$. В частности, $(c_k,\ z)\leqslant 0$ $\forall k\in 1:p$. Отсюда следует, что $tz\in V$ при всех $t>0$, что противоречит ограниченности множества V.

Достаточность. Зафиксируем y из V. Имеем $(c_k,\ y)\leqslant 1$ $\forall k\in 1:p$, откуда $(z,\ y)\leqslant 1$ $\forall$ $z\in V^*$. Пусть $B_\delta=\{z\in\mathbf{R}^m\,|\,\|z\|\leqslant\delta\}$, где $\|z\|$ — евклидова норма вектора z. По условию $B_\delta\subset V^*$ при некотором $\delta>0$. Значит, $(z,\ y)\leqslant 1$ $\forall$ $z\in B_\delta$. Подставляя в это неравенство $z=\delta y/\|y\|$, получаем $\|y\|\leqslant 1/\delta$. Лемма доказана.

3⁰. С учетом леммы 1 задачу (2) можно переписать так:

$$\max_{k\in 1:p}(c_k,\ F(x)) \to \min_{x\in\mathbf{R}^n},$$

или, если считать, что $c_k=(c_{k1}, \ldots, c_{km})$,

$$\varphi(x):=\max_{k\in 1:p}\sum_{i=1}^m c_{ki}f_i(x) \to \min_{x\in\mathbf{R}^n}. \tag{4}$$

Введем обозначение

$$R(x)=\{k\in 1:p\,|\,(c_k,\ F(x))=\varphi(x)\}$$

и пусть g — единичный вектор из $\mathbf{R}^n$. На основании [3, с. 71—76]

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}=\max_{k\in R(x)}\left(\sum_{i=1}^m c_{ki}f_i'(x),\ g\right). \tag{5}$$

Положим далее

$$R_2(x,\ g)=\{k\in R(x)\,|\,(c_kF'(x),\ g)=\partial\varphi(x)/\partial g\}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial g^2}=\max_{k\in R_2(x,\,g)}\sum\nolimits_{i=1}^{m}c_{ki}(f_i''(x)\,g,\ g) \tag{6}$$

при условии, что функции f_i дважды непрерывно дифференцируемы.

Формулы (5), (6) позволяют записать условия оптимальности первого и второго порядков для задачи (4).

Предложение 1.

1. *Если x^* — точка локального минимума функции φ, то*

$$\psi(x^*):=\min_{g\in S}\frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial g}\geqslant 0, \tag{7}$$

где $S=\{g\in\mathbf{R}^n\mid \|g\|=1\}$.

2. *Из неравенства*

$$\psi(x_0)>0 \tag{8}$$

следует, что x_0 — точка строгого локального минимума функции φ.

3. *Пусть x^* — точка локального минимума функции φ и $\psi(x^*)=0$. Тогда*

$$\min_{\{g\in S\,|\,\partial\varphi(x^*)/\partial g=0\}}\frac{\partial^2\varphi(x^*)}{\partial g^2}\geqslant 0.$$

4. *Если $\psi(x_0)=0$ и при некотором $\gamma>0$*

$$\min_{\{g\in S\,|\,0\leqslant\partial\varphi(x_0)/\partial g\leqslant\gamma\}}\frac{\partial^2\varphi(x_0)}{\partial g^2}>0, \tag{9}$$

то x_0 — точка строгого локального минимума функции φ. В общем случае γ в (9) нельзя заменить нулем (см. [3, с. 90—92]).

Введем обозначение

$$L(x)=\operatorname{conv}\left\{z_k=\sum\nolimits_{i=1}^{m}c_{ki}f_i'(x)\,|\,k\in R(x)\right\}.$$

Тогда неравенства (7), (8) эквивалентны соответственно следующим условиям: $0\in L(x^*)$, $0\in\operatorname{int}L(x_0)$.

4⁰. В случае $c_{ki}=\pm 1$, $i\in 1:m$, $k\in 1:2^m$, задача (4) примет вид

$$\varphi(x):=\sum\nolimits_{i=1}^{m}|f_i(x)|\to\min_{x\in\mathbf{R}^n}.$$

Допустим, что $\inf\{\varphi(x)\,|\,x\in\mathbf{R}^n\}>0$. Введем два множества:

$$J(x)=\{i\in 1:m\,|\,f_i(x)\neq 0\},\quad J_0(x)=\{i\in 1:m\,|\,f_i(x)=0\}.$$

Согласно (5) получаем

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}=\sum_{i\in J(x)}\xi_i(f_i'(x),\ g)+\sum_{i\in J_0(x)}|(f_i'(x),\ g)|,$$

где $\xi_i=\operatorname{sign}f_i(x)$. Если $J_0(x)=\varnothing$, то функция φ дифференцируема в точке x и

$$\varphi'(x)=\sum\nolimits_{i=1}^{m}\xi_i f_i'(x).$$

В дальнейшем считаем, что $J_0(x)\neq\varnothing$.

Введем обозначения

$$z(x) = \sum\nolimits_{i\in J(x)} \xi_i f_i'(x),$$
$$P(x) = \left\{ z = \sum\nolimits_{i\in J_0(x)} \beta_i f_i'(x) \,\middle|\, -1 \leqslant \beta_i \leqslant 1 \ \forall i \in J_0(x) \right\}.$$

Лемма 3. *В рассматриваемом случае неравенства* $\psi(x^*) \geqslant 0$, $\psi(x_0) > 0$ *эквивалентны включениям* $z(x^*) \in P(x^*)$, $z(x_0) \in \operatorname{int} P(x_0)$.

Доказательство. Обозначим через $Q(x)$ выпуклую оболочку, натянутую на векторы $z_k = \sum\nolimits_{i\in J_0(x)} c_{ki} f_i'(x)$, где $c_{ki} = \pm 1$, $k \in R(x)$. Тогда $L(x) = z(x) + Q(x)$. Покажем, что

$$L(x) = z(x) - P(x). \tag{10}$$

Так как $P(x) = -P(x)$, то достаточно установить равенство $P(x) = Q(x)$. Включение $P(x) \supset Q(x)$ очевидно. Действительно, пусть $z \in Q(x)$. Тогда

$$z = \sum\nolimits_{k\in R(x)} \alpha_k \sum\nolimits_{i\in J_0(x)} c_{ki} f_i'(x) = \sum\nolimits_{i\in J_0(x)} \left(\sum\nolimits_{k\in R(x)} \alpha_k c_{ki} \right) f_i'(x),$$

$\alpha_k \geqslant 0$, $\sum\nolimits_{k\in R(x)} \alpha_k = 1$. Коэффициенты $\beta_i = \sum\nolimits_{k\in R(x)} \alpha_k c_{ki}$ удовлетворяют неравенствам $-1 \leqslant \beta_i \leqslant 1$, поэтому $z \in P(x)$. Обратное включение $P(x) \subset Q(x)$ следует из того, что система линейных уравнений

$$\sum\nolimits_{k\in R(x)} \alpha_k c_{ki} = \beta_i, \quad i \in J_0(x),$$
$$\sum\nolimits_{k\in R(x)} \alpha_k = 1$$

имеет неотрицательное решение. Проверим последнее утверждение. Для этого достаточно установить, что неравенство

$$\sum\nolimits_{i\in J_0(x)} \beta_i v_i + u \geqslant 0$$

является следствием неравенств

$$\sum\nolimits_{i\in J_0(x)} c_{ki} v_i + u \geqslant 0, \quad k \in R(x).$$

Введем вектор c_{k_0} с компонентами

$$c_{k_0 i} = \begin{cases} -\operatorname{sign} v_i, & \text{если } v_i \neq 0, \\ 1, & \text{если } v_i = 0, \\ \xi_i & \text{при } i \in J(x). \end{cases}$$

Очевидно, что $k_0 \in R(x)$. Учитывая неравенство $|\beta_i| \leqslant 1$, получаем

$$\sum\nolimits_{i\in J_0(x)} \beta_i v_i + u \geqslant \sum\nolimits_{i\in J_0(x)} c_{k_0 i} v_i + u \geqslant 0.$$

Соотношение (10), а вместе с ним и лемма, доказаны.

Напомним, что единичный вектор $g(x)$ называется направлением наискорейшего спуска функции φ в точке x, если

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g(x)} = \min_{g\in S} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}.$$

Предложение 2. *Допустим, что точка x нестационарная, т. е. $\psi(x) < 0$. Тогда направление наискорейшего спуска $g(x)$ функции φ в точке x существует и единственно. При этом*

$$g(x) = \frac{z_0(x) - z(x)}{\|z_0(x) - z(x)\|}, \qquad \frac{\partial\varphi(x)}{\partial g(x)} = -\|z_0(x) - z(x)\|,$$

где $z_0(x)$ — точка $P(x)$, ближайшая (в евклидовой норме) к $z(x)$.

Доказательство непосредственно следует из (10) и [3, с. 83].

Заметим, что нахождение точки $z_0(x)$ сводится к решению задачи квадратичного программирования:

$$\left\| \sum_{i\in J_0(x)} \beta_i f_i'(x) - z(x) \right\|^2 \to \min,$$

$$-1 \leqslant \beta_i \leqslant 1, \quad i \in J_0(x).$$

Предложение 3. *Пусть $|J_0(x^*)| = n$ и векторы $f_i'(x^*)$, $i \in J_0(x^*)$, линейно независимы. Если единственное решение системы линейных уравнений*

$$\sum_{i\in J_0(x^*)} \beta_i f_i'(x^*) = z(x^*)$$

удовлетворяет неравенству $|\beta_i| < 1$ при всех $i \in J_0(x^*)$, то x^* — точка строгого локального минимума функции φ. Более того, существуют такая константа $\eta > 0$ и такая окрестность $B_\delta(x^*) = \{x \mid \|x - x^*\| \leqslant \delta\}$ точки x^*, что

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x^*) + \eta \|x - x^*\| \quad \forall x \in B_\delta(x^*).$$

Доказательство. По условию $z(x^*) \in \operatorname{int} P(x^*)$. Остается сослаться на лемму 3 и [3, с. 87].

Summary

It is shown that the best discrete approximation problem in polyhedral norm is reduable to a minimax problem. Necessary optimality conditions of the first and the second orders are stated. The case of approximation in metric l^1 is considered in detail.

Литература

1. Anderson D. H., Osborne M. R. Discrete, linear approximation problems in polyhedral norms. — Numer. Math., 1976, vol. 26, N 2, p. 179—189. — 2. Anderson D. H., Osborne M. R. Discrete, non-linear approximation problems in polyhedral norms. — Numer. Math., 1977, vol. 28, N 2, p. 143—156. — 3. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М., 1972. 368 с.

Статья поступила в редакцию 22 января 1981 г.

УДК 517.524

М. А. Ковалевский

АСИМПТОТИКА НЕКОТОРОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим асимптотику следующих целых функций:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) x^n \tag{1}$$

при $|x| \to \infty$. Функция $a(t)$ имеет конечное число полюсов $\{a_j\}_{j=1}^N$ в области $D = \{t \in \mathbb{C};\ |\arg(kt - h)| < \pi/2 + \varepsilon\}$ и в остальных ее точках регулярна. При $(t + h/k) \in D$ справедливо равенство

$$a(t + h/k) = (e/(kt))^{kt} \exp(\psi(kt)) f(kt). \tag{2}$$

Здесь $h < 0$ и $0 < \varepsilon < \pi/2$ — некоторые числа, k — комплексное число, и

$$\arg(k) < \pi/2. \tag{3}$$