СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

ТОМ XVI 5 1975

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XVI, № 5 сентябрь — октябрь 1975

УДК 518.12

А. М. ВЕРШИК, В. Н. МАЛОЗЕМОВ, А. Б. ПЕВНЫЙ

НАИЛУЧШАЯ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Введение

В этой работе ставится и изучается наиболее общая задача о кусочно-полиномиальной аппроксимации функций, приводящая к двум последовательным минимаксам. Считаются заданными лишь степень полиномов и число подобластей, в каждой из которых аппроксимирующая функция является полиномом, однако сами подобласти, образующие покрытие, не фиксируются. Легко представить ситуацию, где возникает такая задача. Например, при аппроксимации больших таблиц естественно разбить их наивыгоднейшим образом на некоторое число подтаблиц, а затем каждую из подтаблиц аппроксимировать полиномами. Именно в этой связи задача была поставлена первым из авторов в 1958 г*). Оказывается удобным рассматривать одновременно две близкие постановки (см. задачи 1 и 2 далее).

Трудности, связанные с изучением характера наилучших покрытий, возникают уже в классической ситуации отрезка и алгебраических полиномов и заключаются в необходимости детального исследования величины наилучшего приближения как функции множества, на котором осуществляется аппроксимация.

Насколько нам известно, изучаемая задача является новой. Специальный случай кусочно-линейной аппроксимации с нефиксированными узлами рассматривался в ([1]), с. 196—206. С другими постановками задач кусочно-полиномиальной аппроксимации можно ознакомиться по монографии ([2]) и обзорной статье ([3]).

Перейдем к изложению основных результатов работы. В § 1—3 рассматривается одномерный случай, в § 4 — общая задача.

Пусть f — непрерывная на отрезке $[c, d]$ функция, n — целое неотрицательное, m — натуральное число, $P(A, t)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i$. Обозначим через T совокупность разбиений $\tau=\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$, где $c=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_m=d$. Положим

$$E_n(f; [\xi_{k-1}, \xi_k]) = \min_A \max_{t\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |f(t)-P(A,t)| =$$

$$= \max_{t\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |f(t)-P(A_k(\tau), t)|,$$

$$E_{nm}(f;\ \tau)=\max_{k\in 1:\,m} E_n(f;\ [\xi_{k-1}, \xi_k]),$$

*) В 1965 г. об этом рассказывалось на конференции по оптимальному программированию в Новосибирске. Некоторыее предварительные результаты были получены в дипломных работах А. Грибова и Е. Орловой.

$$E_{nm}(f)=\inf_{\tau\in T} E_{nm}(f;\ \tau).$$

Через $\Phi_{nm}(\tau;\ t)$ обозначим функцию, которая на $[\xi_{k-1},\ \xi_k]$ совпадает с $P(A_k(\tau),\ t)$, $k\in 1:m$.

Разбиение $\tau^*\in T$ назовем оптимальным, если

$$E_{nm}(f;\ \tau^*)=E_{nm}(f).$$

Разбиение $\tau=\{\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_m\}$ назовем *разбиением с равными уклонениями*, если

$$E_n(f;\ [\xi_0,\ \xi_1])=E_n(f;\ [\xi_1,\ \xi_2])=\ldots=E_n(f;\ [\xi_{m-1},\ \xi_m]).$$

В § 1 приводятся вспомогательные предложения о расположении точек альтернанса в классической задаче наилучшего равномерного приближения. Здесь же исследуются свойства величины наилучшего приближения как функции множества, на котором осуществляется аппроксимация.

В § 2 показывается, что разбиение с равными уклонениями существует и является оптимальным (аналогичный результат для кусочно-линейной аппроксимации был получен в ([1]), с. 196—206) Описывается алгорифм, позволяющий находить разбиение с равными уклонениями. Исследуется вопрос о единственности оптимального разбиения τ^* и непрерывности функции $\Phi_{nm}(\tau^*;\ t)$.

Введем обозначение

$$\mathscr{E}_{nm}(W)=\sup_{f\in W} E_{nm}(f).$$

В § 3 доказывается общая теорема, позволяющая сводить задачу о нахождении $\mathscr{E}_{nm}(W)$ к классической проблеме отыскания супремума на классе W величины наилучшего полиномиального приближения. На основе этой теоремы найдено точное значение $\mathscr{E}_{nm}(C^{(n+1)}M)$ и $\mathscr{E}_{1m}(H_\omega)$, $\mathscr{E}_{1m}(C^{(1)}H_\omega)$ в случае выпуклого модуля непрерывности ω.

В § 4 рассматривается более общий подход к задаче наилучшей кусочно-полиномиальной аппроксимации.

Пусть $C(Q)$ — пространство непрерывных функций на метрическом компакте Q, $\mathscr{P}\subset C(Q)$ — конечномерное подпространство, f — функция из $C(Q)$. Сформулируем две задачи.

З а д а ч а 1. *Найти систему компактов* $\tau=\{K_1,\ \ldots,\ K_m\}$, $\bigcup_{j=1}^{m} K_j=Q$, *реализующую инфимум*

$$\inf_{\tau}\max_{j\in 1:m} E(f;\ K_j)=\alpha_m(f),$$

где

$$E(f;\ K_j)=\min_{p\in\mathscr{P}}\max_{t\in K_j}|f(t)-p(t)|.$$

З а д а ч а 2. *Найти систему элементов* $\pi=\{p_1,\ \ldots,\ p_m\}$, $p_i\in\mathscr{P}$ *при всех* $i\in 1:m$, *реализующую инфимум*

$$\inf_{\pi}\max_{t\in Q}\min_{i\in 1:m}|f(t)-p_i(t)|=\beta_m(f).$$

Оказывается, что в определенном смысле эти задачи эквивалентны. Точнее, справедливо равенство $\alpha_m(f)=\beta_m(f)$, и по решению одной задачи легко восстанавливается решение другой. Доказана разрешимость пары задач 1 и 2 (на основе разрешимости задачи 2) и получена одна оценка величины $\alpha_m(f)$.

В заключение сформулируем одну нерешенную задачу: выяснить условия, при которых оптимальное покрытие τ^* состоит из связных компактов. Эта задача представляет интерес даже в одномерном случае (Q — отрезок на вещественной прямой).

§ 1. О расположении точек альтернанса и свойствах величины наилучшего приближения как функции множества

1°. Пусть Q — компакт на вещественной оси, содержащий не менее $n+2$ точек, $f(t)$ — непрерывная на Q функция и $P_n(t)$ — алгебраический полином наилучшего равномерного приближения f на Q. По теореме Чебышева существует (может быть, неединственный) экстремальный базис, т. е. точки $x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}$ из Q такие, что

$$(-1)^k h+P_n(x_k)=f(x_k),\quad k\in 0:n+1, \tag{1.1}$$

где

$$|h|=\max_{t\in Q}|f(t)-P_n(t)|=E_n(f;\ Q).$$

В этом пункте будем считать выполненным

Условие R. *Величина наилучшего приближения $E_n(f;\ Q)$ положительна и разделенная разность $f[t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n+1}]$ неотрицательна для любых $t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n+1}$ из Q.*

Тогда необходимо

$$(-1)^{n+1}h>0. \tag{1.2}$$

Действительно, учитывая, что разделенная разность $(n+1)$-го порядка от полинома n-й степени равна нулю, получаем на основании (1.1)

$$0\leqslant f[x_0,x_1,\ldots,x_{n+1}]=$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f(x_k)-P_n(x_k)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n+1})}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^{n+1}h}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)\ldots(x_{n+1}-x_k)},$$

откуда и следует (1.2).

Лемма 1.1. *Пусть $n\geqslant 1$, выполнено условие R и $x_0<x_1<\ldots$ $\ldots<x_{n+1}$ — некоторый экстремальный базис. Тогда $x_0=m$, $x_{n+1}=M$, где $m=\inf Q$, $M=\sup Q$.*

Доказательство. Допустим, например, что $x_{n+1}<M$. Введем обозначения

$$x_{n+2}=M,\quad \eta=f(x_{n+2})-P_n(x_{n+2}),$$
$$q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+2}).$$

Очевидно,

$$|\eta|\leqslant|h|=(-1)^{n+1}h,$$
$$q'(x_k)=(-1)^{n+2-k}|q'(x_k)|$$

и (см., например, ([4]), с. 6)

$$\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{q'(x_k)}=0.$$

Теперь имеем

$$0 \leqslant f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}] = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{f(x_k) - P_n(x_k)}{q'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k h}{q'(x_k)} +$$

$$+ \frac{\eta}{q'(x_{n+2})} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k h}{q'(x_k)} + \frac{(-1)^{n+1} h}{q'(x_{n+2})} + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{(-1)^n h}{q'(x_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[(-1)^k + (-1)^n] h}{q'(x_k)} = (-1)^{n+1} h \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+k+1} - 1}{|q'(x_k)|} < 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Замечание. При $n=0$ утверждение леммы, вообще говоря, теряет силу (см. рис. 1.)

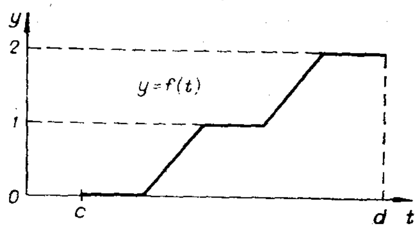

Рис. 1.

Введем обозначение

$$\Delta(t) = f(t) - P_n(t).$$

Лемма 1.2. *Пусть $Q=[c, d]$, $n \geqslant 2$ и выполнено условие R. Тогда экстремальный базис определяется единственным образом.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый экстремальный базис $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$. По лемме 1.1 $x_0 = c$, $x_{n+1} = d$. Допустим, что нашлась точка $x_{n+2} \in (c, d)$ такая, что $|\Delta(x_{n+2})| = |h|$, причем $x_k < x_{n+2} < x_{k+1}$ и, например, $\Delta(x_{n+2}) = \Delta(x_k)$ (случай $\Delta(x_{n+2}) = \Delta(x_{k+1})$ рассматривается аналогично). Возьмем произвольную точку $x_{n+3} \in (x_k, x_{n+2})$. По условию

$$w \overset{\text{def}}{=} f[x_1, \ldots, x_k, x_{n+3}, x_{n+2}, x_{k+1}, \ldots, x_n] \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Введем полином

$$q(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)(x - x_{n+3})(x - x_{n+2}).$$

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q'(x_i)} + \frac{1}{q'(x_{n+3})} + \frac{1}{q'(x_{n+2})} = 0,$$

$$q'(x_{n+3}) = (-1)^{n-k+1} |q'(x_{n+3})|,$$

и при $i \in 1:n$

$$q'(x_i) = (-1)^{n-i} |q'(x_i)|.$$

Заметим также, что для $\eta = \Delta(x_{n+3})$ выполняется неравенство $|\eta| \leqslant (-1)^{n+1} h$. Имеем

$$w = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i h}{q'(x_i)} + \frac{\eta}{q'(x_{n+3})} + \frac{(-1)^k h}{q'(x_{n+2})}.$$

Поскольку

$$\frac{\eta}{q'(x_{n+3})} \leqslant \frac{(-1)^{n+1} h}{|q'(x_{n+3})|} = \frac{(-1)^k h}{q'(x_{n+3})},$$

то

$$w \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i h}{q'(x_i)} + \frac{(-1)^k h}{q'(x_{n+3})} + \frac{(-1)^k h}{q'(x_{n+2})} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} h}{q'(x_i)} + \frac{(-1)^{k+1} h}{q'(x_{n+3})} +$$

$$+\frac{(-1)^{k+1}h}{q'(x_{n+2})}=\sum_{i=1}^{n}\frac{[(-1)^i+(-1)^{k+1}]h}{q'(x_i)}=(-1)^{n+1}h\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{k+i}-1}{|q'(x_i)|}<0,$$

что противоречит (1.3). Лемма доказана.

Замечания. 1. При $n=1$ лемма неверна. Например, для функции $f(t)=\max\{-t-1,\ 0,\ t-1\}$ на $[-2,\ 2]$ полиномом наилучшего приближения будет $P_1(t)\equiv\frac{1}{2}$. Точки альтернанса определяются неединственным образом: $x_0=-2$, $x_1=\xi$, $x_2=2$, где ξ — любая точка из $[-1,\ 1]$.

2. При других предположениях более сильное, чем лемма 1.2, утверждение доказано в ([5], с. 85).

Лемма 1.3. *Пусть $Q=[c,\ d]$, $n\geqslant 1$ и $f[t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n+1}]\geqslant 0$ для любых $t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n+1}$ из Q. Если $[\alpha_1,\ \beta_1]\subset[\alpha_2,\ \beta_2]\subset[c,\ d]$, причем $[\alpha_1,\ \beta_1]\neq\neq[\alpha_2,\ \beta_2]$, и $E_n(f;\ [\alpha_1,\ \beta_1])>0$, то*

$$E_n(f;\ [\alpha_1,\ \beta_1])<E_n(f;\ [\alpha_2,\ \beta_2]).$$

Доказательство. Допустим, что $E_n(f;\ [\alpha_1,\ \beta_1])=E_n(f;\ [\alpha_2,\ \beta_2])$. Обозначим через $X=\{x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}\}$ экстремальный базис в задаче наилучшего приближения функции f на $[\alpha_1,\ \beta_1]$. Тогда X будет экстремальным базисом и на $[\alpha_2,\ \beta_2]$. По лемме 1.1 $x_0=\alpha_2$, $x_{n+1}=\beta_2$, чего не может быть. Лемма доказана.

Замечание. При $n=0$ лемма, вообще говоря, теряет силу (см. рис. 1).

2^0. Пусть $f(t)$ — непрерывная на отрезке $[c,\ d]$ функция.

Лемма 1.4. *Функция двух переменных*

$$E(x,\ y)=E_n(f;\ [x,\ y])$$

непрерывна в треугольнике $\{(x,\ y)\,|\,c\leqslant x\leqslant y\leqslant d\}$. Более того, если $|x_2-x_1|\leqslant\delta$, $|y_2-y_1|\leqslant\delta$, то

$$|E(x_2,\ y_2)-E(x_1,\ y_1)|\leqslant\omega(f;\ \delta),\tag{1.4}$$

где $\omega(f;\ \delta)$ — модуль непрерывности функции f.

Доказательство. Пусть $|x_2-x_1|\leqslant\delta$, $|y_2-y_1|\leqslant\delta$. Если $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, то неравенство (1.4) очевидно. Допустим, например, что $x_1\neq y_1$. Тогда

$$|E_n(f;[x_2,y_2])-E_n(f;[x_1,y_1])|=\left|E_n\left(f\left(x_2+\frac{y_2-x_2}{y_1-x_1}(\cdot-x_1)\right);\ [x_1,y_1]\right)-\right.$$

$$\left.-E_n(f;\ [x_1,y_1])\right|\leqslant\max_{t\in[x_1,y_1]}\left|f\left(x_2+\frac{y_2-x_2}{y_1-x_1}(t-x_1)\right)-f(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{t\in[x_1,y_1]}\omega\left(f;\ \left|\frac{(y_1-t)(x_2-x_1)+(t-x_1)(y_2-y_1)}{y_1-x_1}\right|\right)\leqslant\omega(f;\ \delta).$$

Лемма доказана.

3^0. Пусть $Q=[c,\ d]$, $n\geqslant 2$ и выполнено условие R. Обозначим через $P(A(\xi),\ t)$ полином наилучшего приближения функции $f(t)$ на $[c,\ \xi]$, где $\xi\in(c,\ d]$. Будем считать, что $E_n(f;\ [c,\ \xi])>0$ при всех $\xi\in(c,\ d]$. В этом случае по леммам 1.1 и 1.2 на $[c,\ \xi]$ существует единственный экстремальный базис

$$c=x_0(\xi)<x_1(\xi)<\ldots<x_{n+1}(\xi)=\xi.$$

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Лемма 1.5. *Допустим, что выполнены все условия, сформулированные в начале этого пункта, и функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$. Тогда функция $\varphi(\xi)=E_n(f;\ [c, \xi])$ непрерывно дифференцируема на $(c, d]$, причем*

$$\varphi'(\xi)=\alpha(\xi)\,[f'(\xi)-P'(A(\xi),\ \xi)],$$

где

$$\alpha(\xi)=\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{n}(x_{n+1}(\xi)-x_j(\xi))}\Bigg/\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n+1}|x_i(\xi)-x_j(\xi)|}$$

и $P'(A, t)$ — производная полинома $P(A, t)$ по t.

§ 2. Оптимальные разбиения

1^0. Начнем с одной элементарной леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $\tau=\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$ и $\tau_1=\{\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_m^{(1)}\}$ — произвольные разбиения отрезка $[c, d]$ (см. введение). Тогда при некотором $k\in 1:m$*

$$[\xi_{k-1}, \xi_k]\subset[\xi_{k-1}^{(1)}, \xi_k^{(1)}]. \tag{2.1}$$

Если же $\tau\neq\tau_1$, то найдется такое $k\in 1:m$, при котором включение (2.1) *будет выполняться как строгое.*

Доказательство. Если (2.1) не имеет места ни при каком $k\in 1:m$, то получим последовательно

$$\xi_0=\xi_0^{(1)}=c,\ \xi_1>\xi_1^{(1)},\ \xi_2>\xi_2^{(1)},\ \ldots,\ \xi_m>\xi_m^{(1)}.$$

Однако последнее неравенство противоречит тому, что $\xi_m=\xi_m^{(1)}=d$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Для любого разбиения $\tau=\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$ выполняются неравенства*

$$\min_{k\in 1:m}E_n(f;\ [\xi_{k-1}, \xi_k])\leqslant E_{nm}(f)\leqslant\max_{k\in 1:m}E_n(f;\ [\xi_{k-1}, \xi_k]). \tag{2.2}$$

Доказательство. Правое неравенство в (2.2) очевидно. Докажем левое. Возьмем произвольное разбиение $\tau_1=\{\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_m^{(1)}\}$. Согласно лемме 2.1 при некотором $k\in 1:m$ будет $[\xi_{k-1}, \xi_k]\subset[\xi_{k-1}^{(1)}, \xi_k^{(1)}]$. Поэтому

$$\min_{i\in 1:m}E_n(f;[\xi_{i-1}, \xi_i])\leqslant\max_{i\in 1:m}E_n\left(f;\ [\xi_{i-1}^{(1)}, \xi_i^{(1)}]\right)=E_{nm}(f;\tau_1).$$

Отсюда ввиду произвольности τ_1 получаем

$$\min_{i\in 1:m}E_n(f;\ [\xi_{i-1}, \xi_i])\leqslant\inf_{\tau_1\in T}E_{nm}(f;\ \tau_1)=E_{nm}(f).$$

Лемма доказана.

Из леммы 2.2 очевидным образом следует

Теорема 2.1. *Разбиение с равными уклонениями является оптимальным.*

Покажем, что оптимальное разбиение может и не быть разбиением с равными уклонениями.

Пример. Пусть $[c, d]=[-2, 3]$ и (рис. 2)

$$f(t)=\begin{cases}2(t+1)^2-1, & \text{если } -2\leqslant t\leqslant 0,\\ 1, & \text{если } \ 0\leqslant t\leqslant 2,\\ 7-3t, & \text{если } \ 2\leqslant t\leqslant 3.\end{cases}$$

В этом случае $E_{1,2}(f)=1$. Все разбиения $\tau=\{-2,\ \xi,\ 3\}$, где $\xi\in\left[0,\ 2\frac{2}{3}\right]$, являются оптимальными. Однако разбиением с равными уклонениями будет только одно: $\tau=\{-2,\ 0,\ 3\}$.

Заметим, что при $\xi\in\left[2,\ 2\frac{2}{3}\right]$

$E_1(f;\ [-2,\ \xi])=1,\ E_1(f;\ [\xi,\ 3])=0.$

Принципиальное значение имеет следующая

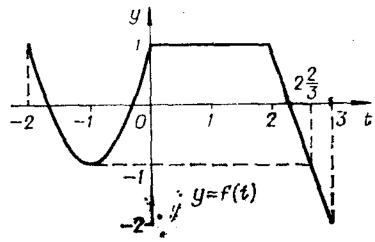

Рис. 2.

Т е о р е м а 2.2. *Разбиение с равными уклонениями существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о *). Если при некотором $\tau=\{\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_m\}$ оказалось, что $E_n(f;\ [\xi_{k-1},\ \xi_k])=0$ для всех $k\in 1:m$, то τ будет искомым разбиением. Поэтому в дальнейшем считаем, что

$$E_{nm}(f;\ \tau)>0 \quad \forall\tau\in T. \tag{2.3}$$

Введем обозначение $E(\xi_{k-1},\ \xi_k)=E_n(f;\ [\xi_{k-1},\ \xi_k])$. Осуществим построение последовательности разбиений $\{\tau_\nu\}$, пределом которой будет интересующее нас разбиение.

Полагаем $\xi_0^{(\nu)}=c$, $\xi_m^{(\nu)}=d$ при всех $\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Выберем $\xi_{m-1}^{(0)}$ так, чтобы

$$c<\xi_{m-1}^{(0)}<\xi_m^{(0)},\quad E\left(c,\ \xi_{m-1}^{(0)}\right)=E\left(\xi_{m-1}^{(0)},\ \xi_m^{(0)}\right).$$

Теперь выберем $\xi_{m-2}^{(0)}$ из условий

$$c<\xi_{m-2}^{(0)}<\xi_{m-1}^{(0)},\quad E\left(c,\ \xi_{m-2}^{(0)}\right)=E\left(\xi_{m-2}^{(0)},\ \xi_{m-1}^{(0)}\right).$$

Аналогично найдем $\xi_{m-3}^{(0)}>\xi_{m-4}^{(0)}>\ldots>\xi_1^{(0)}$.

Имеем

$$c=\xi_0^{(0)}<\xi_1^{(0)}<\ldots<\xi_m^{(0)}=d, \tag{2.4}$$

$$E\left(\xi_0^{(0)},\ \xi_1^{(0)}\right)\leqslant E\left(\xi_1^{(0)},\ \xi_2^{(0)}\right)\leqslant\ldots\leqslant E\left(\xi_{m-1}^{(0)},\ \xi_m^{(0)}\right). \tag{2.5}$$

Опишем, как по разбиению τ_ν, обладающему свойствами (2.4), (2.5) (с заменой 0 на ν), построить $\tau_{\nu+1}$. Выберем $\xi_1^{(\nu+1)}$ так, чтобы

$$\xi_1^{(\nu)}\leqslant\xi_1^{(\nu+1)}<\xi_2^{(\nu)},\quad E\left(\xi_0^{(\nu+1)},\ \xi_1^{(\nu+1)}\right)=E\left(\xi_1^{(\nu+1)},\ \xi_2^{(\nu)}\right).$$

Теперь выберем $\xi_2^{(\nu+1)}$ из условий

$$\xi_2^{(\nu)}\leqslant\xi_2^{(\nu+1)}<\xi_3^{(\nu)},\quad E\left(\xi_1^{(\nu+1)},\ \xi_2^{(\nu+1)}\right)=E\left(\xi_2^{(\nu+1)},\ \xi_3^{(\nu)}\right).$$

Аналогично находим $\xi_3^{(\nu+1)}<\xi_4^{(\nu+1)}<\ldots<\xi_{m-1}^{(\nu+1)}$.

Разбиение $\tau_{\nu+1}$ построено. При этом выполняются соотношения (2.4) и (2.5) (с заменой 0 на $\nu+1$). Последовательность $\{\tau_\nu\}$ обладает следующими свойствами:

I) $c=\xi_0^{(\nu)}<\xi_1^{(\nu)}<\ldots<\xi_m^{(\nu)}=d;$

*) Приводимое доказательство не является самым коротким, но оно представляет некоторый интерес с точки зрения численных методов.

II) при фиксированном $k \in 0:m$

$$\xi_k^{(0)} \leqslant \xi_k^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_k^{(\nu)} \leqslant \ldots;$$

III) $E\left(\xi_{k-1}^{(\nu+1)}, \xi_k^{(\nu+1)}\right) = E\left(\xi_k^{(\nu+1)}, \xi_{k+1}^{(\nu)}\right), \quad k \in 1:m-1.$

В силу II при каждом $k \in 0:m$ существует предел $\lim\limits_{\nu\to\infty} \xi_k^{(\nu)} = \xi_k^*$, причем на основании I, III и леммы 1.4

$$c = \xi_0^* \leqslant \xi_1^* \leqslant \ldots \leqslant \xi_m^* = d,$$
$$E\left(\xi_{k-1}^*, \xi_k^*\right) = E\left(\xi_k^*, \xi_{k+1}^*\right), \quad k \in 1:m-1.$$

Из (2.3) следует еще, что $c = \xi_0^* < \xi_1^* < \ldots < \xi_m^* = d$. Таким образом, разбиение $\tau^* = \{\xi_0^*, \xi_1^*, \ldots, \xi_m^*\}$ является требуемым.

Теорема доказана.

Замечание. Доказательство теоремы конструктивно в том смысле, что оно содержит описание алгорифма для нахождения разбиения с равными уклонениями. На каждом шаге этого алгорифма приходится решать $m-1$ уравнение вида

$$E(\alpha, \xi) - E(\xi, \beta) = 0, \quad \xi \in (\alpha, \beta).$$

При решении этих уравнений может оказаться полезной лемма 1.5.

2°. Переходим к вопросу о единственности оптимального разбиения.

Теорема 2.3. *Пусть $n \geqslant 1$, $E_{nm}(f) > 0$ и разделенная разность $f[t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}]$ неотрицательна для любых $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ из $[c, d]$. Тогда оптимальное разбиение единственно.*

Доказательство. Обозначим через $\tau^* = \{\xi_0^*, \xi_1^*, \ldots, \xi_m^*\}$ разбиение с равными уклонениями (по теореме 2.2 оно существует), и пусть $\tau = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$ — оптимальное разбиение, отличное от τ^*. Тогда для любых $i \in 1:m$

$$E_{nm}(f) = E\left(\xi_{i-1}^*, \xi_i^*\right) \geqslant E\left(\xi_{i-1}, \xi_i\right).$$

Так как $\tau^* \neq \tau$, то по лемме 2.1 для некоторого $k \in 1:m$ будет

$$\left[\xi_{k-1}^*, \xi_k^*\right] \subset [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad \left[\xi_{k-1}^*, \xi_k^*\right] \neq [\xi_{k-1}, \xi_k],$$

поэтому по лемме 1.3

$$E\left(\xi_{k-1}^*, \xi_k^*\right) < E\left(\xi_{k-1}, \xi_k\right).$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание. При $n=0$ теорема теряет силу (см. рис. 1).

Теорема 2.4. *Если n нечетно и $f[t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}] \geqslant 0$ для любых $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ из $[c, d]$, то функция $\Phi_{nm}(\tau^*; t)$ (см. введение), где τ^* — оптимальное разбиение, непрерывна на $[c, d]$.*

Доказательство. Если $E_{nm}(f) = 0$, то это очевидно. Пусть $E_{nm}(f) > 0$. Так как n нечетно, то $n \geqslant 1$. По теореме 2.3 разбиение $\tau^* = \{\xi_0^*, \xi_1^* \ldots, \xi_m^*\}$ является разбиением с равными уклонениями. В силу соотношений (1.1), (1.2) и леммы 1.1 для любого $i \in 1:m-1$ будет

$$\Phi_{nm}\left(\tau^*; \xi_i^* - 0\right) = f\left(\xi_i^*\right) - E_{nm}(f) = \Phi_{nm}\left(\tau^*; \xi_i^* + 0\right).$$

Теорема доказана.

§ 3. Уклонения на классах

1^0. Через $C^{(r)}H_\omega$ обозначим класс функций, определенных на отрезке $[0, d]$, у которых модуль непрерывности r-й производной не превосходит заданного модуля непрерывности ω. Пусть $r \in 0:n$. Введем обозначение

$$\mathscr{E}_{nm}\left(C^{(r)}H_\omega; d\right) = \sup_{f \in C^{(r)}H_\omega} E_{nm}(f).$$

Для любого $l \in (0, d]$ положим

$$\mathscr{E}_n\left(C^{(r)}H_\omega; l\right) = \sup_{f \in C^{(r)}H_\omega} E_n(f; [0, l]). \tag{3.1}$$

Поскольку при $r \in 0:n$

$$\sup_{f \in C^{(r)}H_\omega} E_n(f; [0, l]) = \sup_{f \in C_0^{(r)}H_\omega} E_n(f; [0, l]),$$

где $C_0^{(r)}H_\omega$ — компактное (в равномерной метрике) множество функций из $C^{(r)}H_\omega$, для которых $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(r)}(0) = 0$, то супремум в (3.1) достигается.

Теорема 3.1. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{nm}(C^{(r)}H_\omega; d) = \mathscr{E}_n(C^{(r)}H_\omega; d/m). \tag{3.2}$$

Доказательство. Для любой функции $f \in C^{(r)}H_\omega$

$$E_{nm}(f) \leqslant E_{nm}(f; \bar{\tau}) \leqslant \mathscr{E}_n(C^{(r)}H_\omega; d/m), \tag{3.3}$$

где $\bar{\tau}$ — равномерное разбиение отрезка $[0, d]$:

$$\bar{\tau} = \{0, d/m, 2d/m, \ldots, d\}.$$

Возьмем функцию $f_0 \in C^{(r)}H_\omega$ такую, что

$$E_n(f_0; [0, d/m]) = \mathscr{E}_n(C^{(r)}H_\omega; d/m).$$

Положим $\varphi(t) = f_0^{(r)}(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant d/m$, $\varphi(t) = \varphi(2d/m - t)$ при $d/m \leqslant t \leqslant 2d/m$. Продолжим $\varphi(t)$ периодически с периодом $2d/m$ на всю ось. Функция

$$f_*(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} \varphi(t)\, dt$$

принадлежит $C^{(r)}H_\omega$ и по теореме 2.1

$$\begin{aligned} E_{nm}(f_*) &= E_{nm}(f_*; \bar{\tau}) = E_n(f_*; [0, d/m]) = \\ &= E_n(f_0; [0, d/m]) = \mathscr{E}_n(C^{(r)}H_\omega; d/m). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) следует (3.2). Теорема доказана.

Аналогично показывается, что при $r \in 1:n+1$

$$\mathscr{E}_{nm}(C^{(r)}M; d) = \mathscr{E}_n(C^{(r)}M; d/m),$$

где $C^{(r)}M$ — класс функций, определенных на $[0, d]$, r-я производная которых не превосходит по модулю заданного числа $M>0$.

При $r=n+1$, согласно одной теореме С. Н. Бернштейна (см., например, ([1]), с. 39), имеем

$$\mathscr{E}_n\left(C^{(n+1)}M;\ l\right) = \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{l}{4}\right)^{n+1}.$$

Поэтому

$$\mathscr{E}_{nm}\left(C^{(n+1)}M;\ d\right) = \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{d}{4m}\right)^{n+1}.$$

2^0. При $n=1$ удается получить более тонкие результаты (ср. ([7])).

Теорема 3.2. *Если ω — выпуклый модуль непрерывности, то*

$$\mathscr{E}_{1m}(H_\omega;\ d) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{d}{2m}\right),$$

$$\mathscr{E}_{1m}\left(C^{(1)}H_\omega;\ d\right) = \frac{1}{8}\int_0^{d/m}\omega(u)\,du.$$

Доказательство. В силу теоремы 3.1 достаточно установить, что

$$\mathscr{E}_1(H_\omega;\ l) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{l}{2}\right), \tag{3.5}$$

$$\mathscr{E}_1\left(C^{(1)}H_\omega;\ l\right) = \frac{1}{8}\int_0^{l}\omega(u)\,du. \tag{3.6}$$

Вначале сделаем замечание общего характера. Пусть $f(t)$ — функция, непрерывная на $[0, l]$, и $x_0<x_1<x_2$ — экстремальный базис в задаче наилучшего приближения f на $[0, l]$ полиномами первой степени. Положим $h_1=x_1-x_0$, $h_2=x_2-x_1$, $h=x_2-x_0=h_1+h_2$. Тогда (см. ([1]), с. 36)

$$E_1(f;\ [0, l]) = \left|\frac{f[x_0, x_1, x_2]}{\chi[x_0, x_1, x_2]}\right|,$$

где

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{h_1}{h}[f(x_2)-f(x_1)] - \frac{h_2}{h}[f(x_1)-f(x_0)]\right\},$$

$$\chi[x_0, x_1, x_2] = \frac{2}{h_1h_2}.$$

Значит,

$$E_1(f;\ [0, l]) = \frac{1}{2}\left|\frac{h_1}{h}[f(x_2)-f(x_1)] - \frac{h_2}{h}[f(x_1)-f(x_0)]\right|. \tag{3.7}$$

Если $f\in H_\omega$, где ω — выпуклый модуль непрерывности, то

$$E_1(f;\ [0, l]) \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{h_1}{h}\,\omega(h_2) + \frac{h_2}{h}\,\omega(h_1)\right] \leqslant \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2h_1h_2}{h}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{h}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{l}{2}\right). \tag{3.8}$$

Пусть $f\in C^{(1)}H_\omega$. Тогда в силу (3.7)

$$E_1(f;\ [0, l]) = \frac{1}{2}\left|\frac{h_1}{h}\int_{x_1}^{x_2} f'(z)\,dz - \frac{h_2}{h}\int_{x_0}^{x_1} f'(z)\,dz\right| =$$
$$= \frac{h_1h_2}{2h^2}\left|\int_0^{h}\left[f'\left(x_1+\frac{h_2}{h}\,u\right) - f'\left(x_1-\frac{h_1}{h}\,u\right)\right]du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h_1h_2}{2h^2}\int\limits_0^h \omega(u)\,du \leqslant \frac{1}{8}\int\limits_0^l \omega(u)\,du. \tag{3.9}$$

Построим функцию $f_0 \in H_\omega$, для которой в (3.8) достигается равенство. Положим

$$f_0(t) = \begin{cases} \omega(t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant l/2, \\ \omega(l-t), & \text{если } l/2 \leqslant t \leqslant l, \end{cases}$$

и распространим $f_0(t)$ периодически с периодом l на всю ось. Очевидно, $f_0 \in H_\omega$ и $E_1(f_0; [0, l]) = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{l}{2}\right)$. Отсюда и из (3.8) следует (3.5).

Соотношение (3.6) доказывается аналогично. Нужно построить функцию $f_0 \in C^{(1)}H_\omega$, для которой в (3.9) достигается равенство. Положим

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(l-2z), & \text{если } 0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}, \\ -\frac{1}{2}\omega(2z-l), & \text{если } \frac{l}{2} \leqslant z \leqslant l, \end{cases}$$

$$\psi(z) = \psi(2l-z), \quad \text{если } l \leqslant z \leqslant 2l,$$

и распространим $\psi(z)$ периодически с периодом $2l$ на всю ось. Тогда

$$f_0(t) = \int\limits_0^t \psi(z)\,dz.$$

Поскольку ω — выпуклый модуль непрерывности, то $f_0 \in C^{(1)}H_\omega$. Кроме того,

$$E_1(f_0; [0, l]) = \frac{1}{2} f_0\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{l/2} \omega(l-2z)\,dz = \frac{1}{8}\int\limits_0^l \omega(u)\,du.$$

Теорема доказана.

§ 4. Эквивалентность и разрешимость задач 1 и 2

1^0. В этом параграфе будут рассматриваться задачи 1 и 2, сформулированные во введении. Заметим, что среди подмножеств, образующих покрытие $\tau = \{K_1, \ldots, K_m\}$ компакта Q, допускаются пустые подмножества. Если $K_i = \varnothing$, то по определению $E(f; K_i) = 0$ и любое $p \in \mathscr{P}$ является элементом наилучшего приближения функции f на K_i.

Теорема 4.1. *Справедливо равенство*

$$\alpha_m(f) = \beta_m(f).$$

Доказательство. Возьмем произвольное покрытие $\tau = \{K_1, \ldots, K_m\}$ компакта Q. Через $\tilde{p}_i$ обозначим элемент наилучшего приближения функции f на компакте K_i. Имеем

$$\beta_m(f) \leqslant \max_{t \in Q}\min_{i \in 1:m} |f(t) - \tilde{p}_i(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{j \in 1:m}\max_{t \in K_j} |f(t) - \tilde{p}_j(t)| = \max_{j \in 1:m} E(f; K_j). \tag{4.1}$$

В силу произвольности τ

$$\beta_m(f) \leqslant \alpha_m(f).$$

Возьмем теперь произвольную систему элементов $\pi = \{p_1, \ldots, p_m\}$ из $\mathscr{P}$. Положим

$$K_j = \{t \in Q \mid \min_{i \in 1:m} |f(t) - p_i(t)| = |f(t) - p_j(t)|\}. \tag{4.2}$$

Очевидно, все K_j — компакты и $\bigcup_{j=1}^{m} K_j = Q$. Далее,

$$\alpha_m(f) \leqslant \max_{j\in 1:m} E(f;\ K_j) \leqslant \max_{j\in 1:m} \max_{t\in K_j} |f(t)-p_j(t)| =$$
$$= \max_{t\in Q} \min_{i\in 1:m} |f(t)-p_i(t)|.$$

В силу произвольности π отсюда следует неравенство $\alpha_m(f)\leqslant\beta_m(f)$. Теорема доказана.

Теперь ясно, как по решению одной задачи строить решение другой. Действительно, если $\tau^*=\{K_1, \ldots, K_m\}$ — оптимальное покрытие компакта Q, то в силу (4.1) совокупность элементов наилучшего приближения функции f на компактах K_i дает оптимальный набор π^* для задачи 2. Наоборот, пусть известно решение задачи 2: $\pi^*=\{p_1, \ldots, p_m\}$. Тогда оптимальное для задачи 1 покрытие компакта Q определяется формулой (4.2).

2^0. Докажем разрешимость задачи 2. Будем считать, что $\mathscr{P}$ является подпространством обобщенных полиномов вида $p(t)=\sum_{s=1}^{n} a_s u_s(t)$, где $u_s(t)$, $s\in 1:n$,— непрерывные на Q функции.

Теорема 4.2. *Решение задачи* 2 (*а следовательно, и задачи* 1) *существует.*

Предварительно установим одну лемму.

Лемма 4.1. *Пусть последовательность обобщенных полиномов $\{p^{(n)}\}$ сходится поточечно на некотором множестве $D\subset Q$. Тогда существует последовательность полиномов $\{\bar p^{(n)}\}$ и полином p^* такие, что*

$$\bar p^{(n)}(t)=p^{(n)}(t) \quad \forall n=1, 2, \ldots, \forall t\in D, \tag{4.3}$$
$$\bar p^{(n)}(t) \longrightarrow p^*(t) \text{ равномерно по } t\in Q. \tag{4.4}$$

Доказательство. Если все $u_s(t)$ тождественно равны нулю на D, то утверждение леммы очевидно. Допустим, что среди $u_s(t)$ есть функция, не равная тождественно нулю на D. Тогда, исключая последовательно нулевые, а затем линейно-зависимые на D функции, придем к линейно-независимой на D подсистеме $u_{s_1}, \ldots, u_{s_r}$, причем для всех $t\in D$

$$p^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{r} c_j^{(n)} u_{s_j}(t)$$

Положим $\bar p^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} c_j^{(n)} u_{s_j}$. Тогда условие (4.3), очевидно, выполняется.

Поскольку последовательность $\{p^{(n)}\}$ сходится на D, а система функций $u_{s_1}, \ldots u_{s_r}$ линейно-независима на D, то сходятся все последовательности коэффициентов:

$$c_j^{(n)} \to c_j^* \quad \forall j\in 1:r.$$

Соотношение (4.4) будет иметь место, если положить $p^* = \sum_{j=1}^{r} c_j^* u_{s_j}$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Возьмем последовательность $\pi_n = \{p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}\}$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in Q} \min_{i\in 1:m} \left|f(t)-p_i^{(n)}(t)\right| = \beta_m(f) = \beta.$$

Очевидно, что для каждого $t \in Q$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \min_{i\in 1:m} \left|f(t) - p_i^{(n)}(t)\right| \leqslant \beta. \tag{4.5}$$

Пусть $\widetilde{Q} \subset Q$ — счетное всюду плотное в Q множество точек $\{t_s\}$. Применяя диагональный процесс, можно выделить подпоследовательность индексов $\{n_k\}$ такую, что все числовые последовательности $\left\{\min_{i\in 1:m}\left|f(t_s) - p_i^{(n_k)}(t_s)\right|\right\}$ будут сходящимися, причем в силу (4.5)

$$\lim_{k\to\infty} \min_{i\in 1:m} \left|f(t_s) - p_i^{(n_k)}(t_s)\right| \leqslant \beta, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{4.6}$$

Более того, можно считать, что для каждого s существует индекс $i(s) \in 1:m$ такой, что для всех $n_k \geq n_k(s)$

$$\min_{i\in 1:m} \left|f(t_s) - p_i^{(n_k)}(t_s)\right| = \left|f(t_s) - p_{i(s)}^{(n_k)}(t_s)\right|. \tag{4.7}$$

Положим $\widetilde{Q}_i = \{t_s \mid i(s) = i\}$, $i \in 1:m$ (среди множеств $\widetilde{Q}_i$ могут быть пустые). В этом случае последовательность $\left\{\left|f(t) - p_i^{(n_k)}(t)\right|\right\}$ сходится для всех $t \in \widetilde{Q}_i$. Зафиксируем i и пусть $\widetilde{Q}_i \neq \varnothing$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно добиться того, что последовательность $\left\{p_i^{(n_k)}\right\}$ будет сходиться в каждой точке множества $\widetilde{Q}_i$. По лемме 4.1 найдется последовательность $\left\{\bar{p}_i^{(n_k)}\right\}$ и полином p_i^* со свойствами:

$$\bar{p}_i^{(n_k)}(t) = p_i^{(n_k)}(t) \ \forall k = 1, 2, \ \ldots, \forall t \in \widetilde{Q}_i, \tag{4.8}$$

$$\bar{p}_i^{(n_k)}(t) \to p_i^*(t) \text{ равномерно по } t \in Q. \tag{4.9}$$

(Если $\widetilde{Q}_i = \varnothing$, то полагаем $p_i^* = 0$.) Покажем, что $\pi^* = \{p_1^*, \ldots, p_m^*\}$ является оптимальным набором полиномов.

Возьмем произвольную точку $t_s \in \widetilde{Q}$. Тогда $t_s \in \widetilde{Q}_{i_0}$, причем $\widetilde{Q}_{i_0} \neq \varnothing$. В силу (4.6)—(4.9)

$$\lim_{k\to\infty} \min_{i\in 1:m} \left|f(t_s) - p_i^{(n_k)}(t_s)\right| = \left|f(t_s) - p_{i_0}^*(t_s)\right| \leqslant \beta.$$

Тем более,

$$\min_{i\in 1:m} \left|f(t_s) - p_i^*(t_s)\right| \leqslant \beta.$$

По непрерывности

$$\min_{i\in 1:m} \left|f(t) - p_i^*(t)\right| \leqslant \beta \ \ \forall t \in Q.$$

Учитывая определение β, получаем требуемое равенство

$$\max_{t\in Q} \min_{i\in 1:m} \left|f(t) - p_i^*(t)\right| = \beta.$$

Теорема доказана.

3°. Получим одну оценку для $\alpha_m(f)$.

Т е о р е м а 4.3. *Если подпространство $\mathcal{P}$ содержит константы, то*

$$\alpha_m(f) \leqslant \frac{1}{m} E(f; Q).$$

Доказательство. Обозначим через p полином наилучшего приближения f на Q, и пусть $h=E(f;\ Q)$. Разобьем $[-h,\ h]$ на m частей точками

$$\lambda_j = -h + \frac{2h}{m} j, \quad j \in 0 : m.$$

Введем компакты

$$K_j = \{t \in Q \mid \lambda_{j-1} \leqslant f(t) - p(t) \leqslant \lambda_j\}, \quad j \in 1 : m.$$

Очевидно, $\bigcup_{j=1}^{m} K_j = Q$ и для $t \in K_j$

$$-\frac{h}{m} \leqslant f(t) - p(t) - \frac{\lambda_{j-1} + \lambda_j}{2} \leqslant \frac{h}{m}.$$

Поэтому $E(f;\ K_j) \leqslant h/m$, $j \in 1 : m$, и, следовательно, $\alpha_m(f) \leqslant h/m$. Теорема доказана.

В заключение авторы благодарят Г. Ш. Рубинштейна за полезные замечания.

Поступила в редакцию
25 июля 1973 г.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Ремез Е. Я.* Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев, Изд-во АН УССР, 1957.
2 *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972.
3 *Schumaker L. L.* Apporoximation by splines. В сб.: Theory and applications of spline functions. Edited by T. N. E. Grevielle. New York—London, Acad. Press., 1969.
4 *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск, «Вышэйшая школа», 1968.
5 *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов. Л.— М., ОНТИ, 1937.
6 *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М., «Наука», 1972.
7 *Малоземов В. Н.* Об отклонении ломаных. Вестн. Ленингр. ун—та, № 7, 1966, 150—153.